

Spatially growing disturbance について

京大 数理研 後藤金英

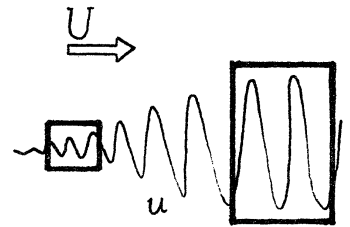
§ 1. はじめに

一般に力学系の安定性は、系に加えられた微小攪乱の時間的消長によつて判定される。層流の安定性の場合も勿論この定義に従う。二次元平行流(およそそれに準ずる流れ)の場合、攪乱を含まぬ速度分布は流れ方向の座標に独立であるから、攪乱もこの座標について Fourier 分解すると各モードは互いに独立に振舞う。特別な初期条件を満たすためには、一般に全てのモードが一次結合として必要であるが、任意の初期条件に従う攪乱を対象とする立場からは、各モードの消長を個別に調べれば事足りるとされる。従つて、攪乱の振舞は各モードの振舞としてとらえられる。この場合単一モードは流れ方向の構造を持たないから、攪乱は流れの方向に平均的に一様である。

このような理論的な取扱いに対し、安定性の実験では攪

乱はリボンの振動で導入されるにしろ, loudspeaker による音で導入されるにしろ実際には流れ方向の構造をもつて導入される。空間の同一点で観測する限り攪乱の増幅は見られず, この意味で流れの場は stationary であるが, 一方下流方向には増幅・減衰し平均的にも非一様である。

これらの実験と理論を比較するには, 従来次のような考えが基礎におかれて来た。即ち, 実験で実現される流れの場でも, 適当に狭い領域を考えるとその中では攪乱は空間的に一様であり, その領域が下流に流されて攪乱が増幅され



ても領域内の一様性は失われないうとすると, 空間的に一様な攪乱が時間的に(下流に流されるに要する時間内に)増幅するとして処理し得る。

しかし, この解釈に基づく理論と実験の対応は, 結果から見て十分とは云えない。例えば次のような相違がある。

(i) 増幅率 理論で扱われる攪乱伝播波が単位距離を伝播する時間を  $1/c_r$  ( $c_r$ : 位相速度) とし, 時間的増幅率/ $c_r$  を実験の空間的増幅率と対比することは, Schubauer と Skramstad の実験以来行われてきたことであるが, 実験と理論の一致はそれ程良くない。

(ii) 位相反転 流れに直角な座標について増幅攪乱を描くと、理論では位相反転が *critical layer* 内に現われるが、実験ではその外側に現れる。

(iii) 位相速度の波数依存 例えは、速度分布として、*tanh* 分布を用いる自由境界層流についての理論では位相速度は一定であるが、実験では主流がほぼ *tanh* 分布であるにもかかわらず位相速度は波数に依存し群速度は位相速度と異なる。

そこで攪乱の振舞について、実験をより良く説明するような理論の展開が安定問題とは別に興味ある問題となる。表題の *spatially growing disturbance* はそのような発想で考えられた攪乱で、流れの方向に増大し時間的には *stationary* であり、その振舞は先に述べた時間的に増大する攪乱に比べて実験により近いであろうことは直観的に想像されるが事実そうである。以下この *spatially growing disturbance* についてこれまでに知られているいくつかの結果を自由流を中心として述べることにする。

## §2. 空間増幅攪乱

非圧縮・粘性流体の二次元平行流を考え、その速度を

$$U = [U(y), 0, 0]$$

で表わし、攪乱を

$$u = \text{Re}[\phi(y) \exp\{i(\alpha x + \gamma z - \beta t)\}]$$

で表わすことにしよう。座標は流れの方向に  $x$  軸, 流れの変化する方向に  $y$  軸, 両者に直角に  $z$  軸をとる。  $\text{Re}[\ ]$  の real part を表わす。渦度方程式に  $U+u$  を代入し,  $u$  およびその微分について線型化した方程式から  $\phi_x$  と  $\phi_z$  を消去すると, 一般化された Orr-Sommerfeld 方程式:

$$(U - \beta/\alpha)(\phi_y'' - \Lambda^2 \phi_y) - U'' \phi_y = \frac{1}{i\alpha R}(\phi_y^{iv} - 2\Lambda^2 \phi_y'' + \Lambda^4 \phi_y),$$

$$\text{ただし } \Lambda^2 = \alpha^2 + \gamma^2,$$

が得られる。以下特に断らない限り, 簡単さのために二次元攪乱 ( $\gamma = 0$ ) を考えることにしよう。

この定式化で  $\alpha$  を実数に限り  $\beta$  を複素数として取扱うと従来の安定理論の定式化が導かれるが, 以下ではこの攪乱を *timewise disturbance* - T攪乱と呼び, この攪乱を対象とする場合を (T) と書くことにする。即ち (T) では,

$\alpha$  (real): 波数,

$\beta$  (complex) =  $\beta_r + i\beta_i$ ;  $\beta_r$ : 振動数,  $\beta_i$ : 時間的増幅率と定義し, 攪乱は

$\beta_i \geq 0$  に従って 時間的  $\begin{pmatrix} \text{増幅} \\ \text{中立} \\ \text{減衰} \end{pmatrix}$  攪乱となる。

これに対し  $\alpha$  を複素数,  $\beta$  を実数にとると攪乱は時間的に stationary, 空間的には  $x$  方向に指数函数的に増減する。

この攪乱を spacewise disturbance - S 攪乱と呼ぶ, この攪乱を対象とする場合を (S) と書くことにする. 即ち (S) では,

$\alpha$  (complex) =  $\alpha_r + i\alpha_i$ ;  $\alpha_r$ : 波数,  $\alpha_i$ : 空間的増幅率

$\beta$  (real): 振動数

と定義し, 攪乱は

$\alpha_i \begin{matrix} \leq \\ > \end{matrix} 0$  に従って 空間的  $\begin{pmatrix} \text{増幅} \\ \text{中立} \\ \text{減衰} \end{pmatrix}$  攪乱

となる.

この定義から, (T) では  $\beta_i = 0$  で, (S) では  $\alpha_i = 0$  で与えられる (安定・不安定を堺する) 中立攪乱は (T)·(S) 両者に共通であり, 従ってこの条件の下での Reynolds 数の最小値で定義される臨界 Reynolds 数は (T)·(S) に共通であることがわかる。

### § 3. 主な結果

#### 3-1. 増幅率の関係

一般に固有値関係で complex  $\beta$  が complex  $\alpha$  の解析函数として表わされる  $\alpha$  の領域  $D$  では,  $\beta_{im} (\stackrel{\text{def.}}{=} \max_D (|\beta_i|)) \ll 1$ ,  $\partial\beta_i / \partial\alpha_r = O(\beta_{im})$ ,  $\alpha_i(S) / \beta_i(T) = O(1)$  の仮定のもとに  $O(\beta_{im}^2)$  を省略する近似で,

$$\alpha_r(S) = \alpha_r(T),$$

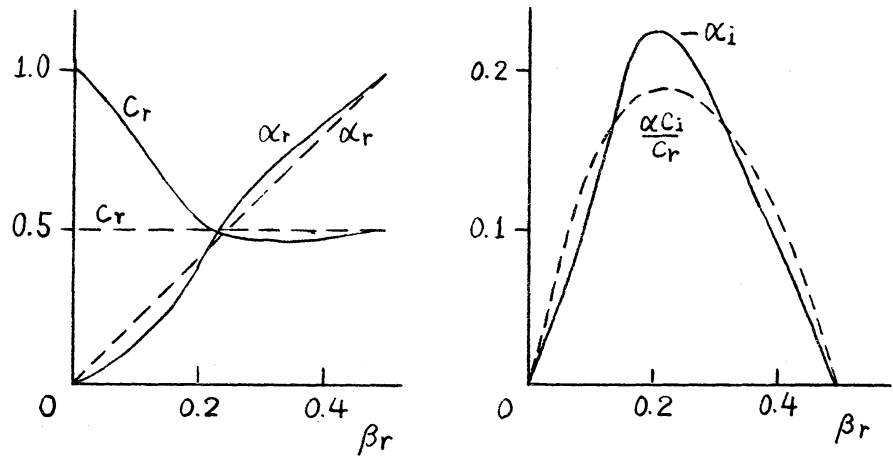
$$\beta_r(S) = \beta_r(T),$$

$$\alpha_i(S) = -\beta_i(T) / (\partial \beta_r / \partial \alpha_r)$$

が得られる (Gaster, 1962, J.F.M., Vol. 14, p. 222). この結果, (T) に於ける  $\alpha_r, \beta_r, \beta_i$  の関係がわかれば, (S) に於ける  $\beta_r, \alpha_r, \alpha_i$  が得られる. この結果は, 実験に見られる攪乱の Fourier 分解が T-攪乱であると考えれば一応了解される.

### 3-2. 有限増幅率の関係

$\beta_i = O(1)$  の場合には, 3-2 の関係は成立しないから  $\alpha_i(S)$  は改めて計算しなければ求まらない.  $U(y) = 0.5\{1 + \tanh y\}$  に対する結果は次のようである (Michalke, 1965, J.F.M., Vol. 23, p. 521).



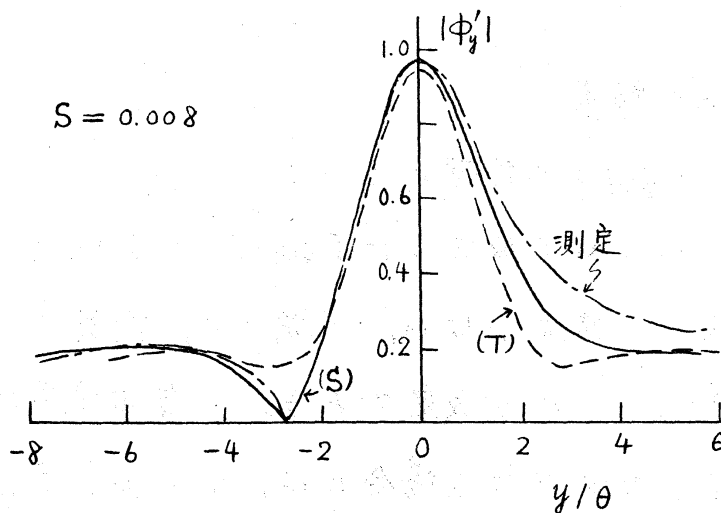
$C = \beta/\alpha$ , 実線は S-攪乱, 点線は T-攪乱についての結果.  $C_r$  は位相速度.

#### §4. 実験との比較

自由境界層流の実験 (P. Freymuth, 1966, J.F.M., Vol. 25, p. 683) の結果は適当な規格化の結果, Strauhals 数  $S (= f\theta/U_0$ ,  $f$ : 擾乱源となる音の振動数,  $\theta$ : 境界層の運動量厚,  $U_0$ : 一様速度) だけに依存する。速度分布は  $U = 0.5(1 + \tanh 0.5y)$  にほぼ一致。

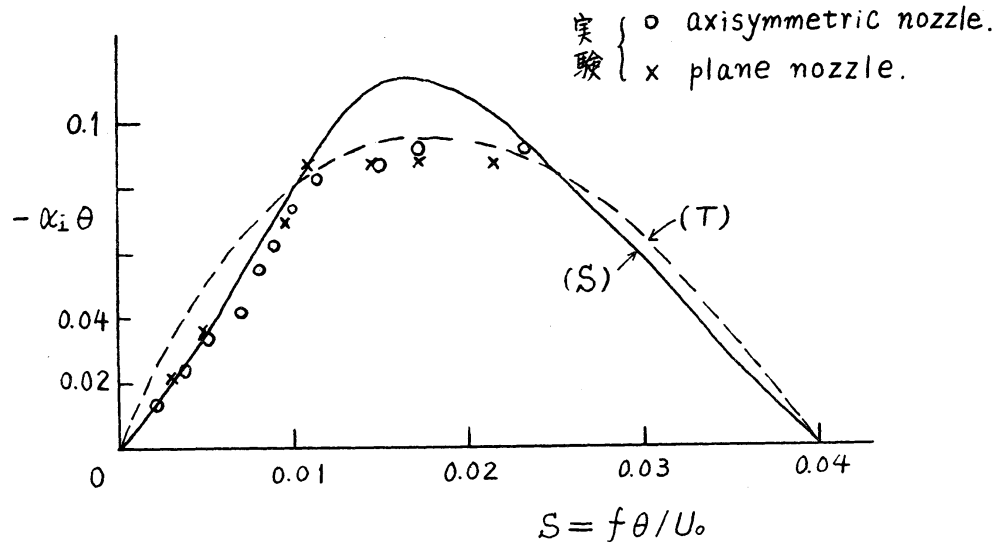
##### 4-1. 位相反転

一例を図に示すが理論は実験を良く説明する。



##### 4-2. 増幅率

低 Strauhals 数に対しては,  $S$ -擾乱の増幅率が実験を良く説明する。しかし最大増幅率を与える Strauhals 数のあたりでは, 実験はむしろ  $T$ -擾乱の増幅率とよく一致する。この事実は未だ説明されていない。



## § 5. その他の結果

### 5-1. Squire の定理について

T-攪乱について成立した Squire の定理は S-攪乱については一般には成立しない。従って、攪乱の二次元性はいくまで単純化のための仮定である。自由境界層  $U = 0.5[1 + \tanh y]$  の非粘性の場合には、しかし、事実上 Squire の定理が成立することが数値計算によって示されている。

(A. Michalke, 1969, J.F.M., 38, p.765)

### 5-2. 自由境界層の場合の増幅率

Blasius 方程式に従う自由境界層速度分布について、低 Reynolds 数 ( $0 < R < 50$ ) の場合の空間的増幅率が求められている (S. H. Ko & M. Lessen, 1969, Phys Fluids Vol. 12, p. 404)。



### 5-3. 噴流の場合の増幅率

Bickley の jet :  $U = \text{sech}^2 y$  について低 Reynolds 数 ( $0 < R < 50$ ) の場合の空間的増幅率が求められている。

(S. H. Ko & M. Lessen, 1969, Phys. Fluids, Vol. 12, p. 2270).

## § 6. 非線型理論

T-攪乱に対する Stuart-Watson の準線型理論を S-攪乱に適用。理論の構成は (T) の場合と全く同様で、振幅  $A$  の大きさの  $x$ -依存は (T) の場合の振幅の  $t$ -依存に対応して、

$$|A|^2 = -\alpha_i K e^{-2\alpha_i x} / (1 - a_{ir} K e^{-2\alpha_i x})$$

で与えられる。十分小さな  $|\alpha_i|$  の場合の  $a_1$  の値は、(T) で十分小さな  $|\beta_i|$  の場合に戻る  $a_1$  と同じ値になる。  $\alpha_i < 0$  の場合  $a_{ir}$  が負値をとれば平衡振幅が、  $\alpha_i > 0$  の場合  $a_{ir}$  が正值ならば臨界振幅が、それぞれ

$$|A|^2 = \alpha_i / a_{ir}$$

で与えられる。(J. Watson, 1962, J.F.M., Vol 14, p 211).

有限振幅の攪乱に対する決定的な理論の確立が T-攪乱に対してまだ成功していない現状に於て、S-攪乱に対してもこれ以上の非線型理論はない。