数理解析研究所講究録
第 120 巻 1971 年 10-27

Orr-Sommerfeld 方程式の解法

京大 理 池田紀人

・ はじめに

O.S.方程式の解法は、解析的には、いわゆる漸近理論として、既に完成されており、攪乱が無限小である範囲で臨界Reynolds数を求めるという線型安定問題の本来の目的のためには、この漸近理論で十分である。従って漸近理論が完成された後の、O.S.方程式の解法上の問題は、漸近理論が実際にはかなり面倒な手続きを必要とすることから、より複雑な非線型安定問題への発展を念頭において、線型問題の範囲の段階で解法を出来るだけ簡単化する事が主眼になる様に思われる。又、この非線型問題への発展という見方からすると、固有函数の具体的な形といった、臨界Reynolds数を求める目的からすれば必ずしも重視されない情報が必要とされる。漸近理論はこの様な情報を得るにはあまり適当ではない。

差分法による数値解法、或いは直交函数展開の方法によって解法の簡単化をはかることが出来るが、同時に、これらの方法によって漸近理論で欠けた情報を補う事が出来る。

こゝでは、まず数値解法の代表的な手法を紹介し、それぞれ、どの様にしてO.S.方程式の数値解法固有の困難を処理しているかについて述べ、次いで筆者が行った直交函数展開のO.S.方程式への適用について述べる。

§1. 数値解法

O.S.方程式

$$(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi-\frac{1}{i\alpha R}(\phi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\phi''+\alpha^4\phi)=0 \qquad (1.1)$$

及び同次境界条件

$$\phi(a)=\phi'(a)=\phi(b)=\phi'(b)=0 \qquad (1.2)$$

は固有値問題を構成する。こゝで y 軸は主流の変化する方向にとられ、U は主流の速度分布、ϕ, α, c はそれぞれ撹乱の流れ函数、波数、複素位相速度である。R はReynolds数、$'$ は y についての微分を表わす。又、a, b は境界の y 座標であり一方又は双方が $\pm\infty$ になる場合をも含む。この固有値問題は、原理的には、この方程式の4つの独立な解を、パラメーター α、c、R、を含む形で求める事で解決されるが、この事は勿論容易でない。周知の様に、漸近理論ではパラメーター αR が十分大きい、或いは十分小さい事を仮定して、αR のそれらの値に対する方程式の漸近的な解が用いられるが、臨界Reynolds数

R_c をもとめる目的の為に漸近理論が極めて有効であったについては、今迄調べられた流れでは、αR_c が十分大きいか、又は十分小さい事が幸いしたのであり、この様な事情が常に期待出来るとは限らない。事実、ある種の流れについては、αR_c が数百の程度であり、(例えば [1]) この様に十分大きくも小さくもない αR の値に対しては、従来の漸近理論の近似の程度では満足な結果は期待し難い。この様な場合、微小パラメーターについて高次の展開をすゝめる事は、その複雑さからして得策ではなく、むしろ O.S. 方程式を直接に数値的に解くのがより現実的な方法であろう。勿論、十分大きい、或は、十分小さい αR_c の場合といえども、それらが現実には有限の値をとる事による誤差は当然問題になり得る。

一方、固有函数の問題については、特に αR が大きい場合 O.S. 方程式の4つの独立な解のうち、いわゆる粘性解は、流場内で、非粘性方程式の特異点近傍と、それ以外では異った表現を持ち、固有函数の中にこれらの解を表現するには、かなりの複雑さが伴う。漸近理論の第三の難点は主流毎に個別的な複雑な取扱いを必要とする事であり、この事は例えば安定特性の主流依存性といった問題を扱う事を著しく困難にする。又、主流が数値的な形でしか与えられない様な時には、それらを適当な函数で近似してまであえて漸近理論を適用

する必要は、今日ではむしろ少いといえよう。

O.S. 方程式の数値解法は、まず、十分大きいが有限である様な αR の値に対し、漸近理論による結果の精度を調べる目的で始められたのであるが[2]、前記の点についてはすべて好都合であり、漸近理論を補う事が出来ると思われる。

しかし、実際に O.S. 方程式を差分法により数値的に解く手続きを実行する際には、若干の固有の問題点がある。まず O.S. 方程式の微分演算を差分演算におきかえる事から必然的に生ずる誤差の問題があるが、これは適当な差分 Scheme を撰び、且つ、分点の間隔を十分小さくとる事により解決されるので、こゝでは分点の間隔は αR が大きいとき急激に変動する粘性解を表現するためには少くとも $(\alpha R)^{-1/3}$ 程度より小さくとる必要があることを注意するにとどめる。より主要な困難は、αR が大きいとき、O.S. 方程式の4つの独立な解のうち2つの粘性解が指数函数的に急激な変化をすることから生ずる桁落ちの問題である。今、境界の一方で境界条件を満たす O.S. 方程式の二つの独立な解 ϕ_1, ϕ_2 が得られたとする。固有値方程式 $F(\alpha, R, c)=0$ は他方の境界条件を満たす様に ϕ_1, ϕ_2 の一次結合を作ることによって得られる。即ち、

$\phi = A\phi_1 + B\phi_2$　、但し　$\phi_1(a) = \phi_1'(a) = \phi_2(a) = \phi_2'(a) = 0$

とすると、$\phi(b) = \phi'(b) = 0$ なる為には、

$$F(\alpha, \beta, c) = \begin{vmatrix} \phi_1(b) & \phi_2(b) \\ \phi_1'(b) & \phi_2'(b) \end{vmatrix} = 0 \qquad (1.3)$$

でなければならない。二つの独立な解 ϕ_1, ϕ_2 の中に $y=a$ から $y=b$ に向って急激に増加する特解の成分が含まれているときには、$y=a$ から $y=b$ に向って方程式の数値積分を実行していくにつれて、この特解の成分は他の特解の成分に比べて優越していくが、計算機の有効桁数が有限であることによって、他の解の成分の情報は次第に失われて精度の低下をもたらす。極端な場合として、優越する特解と他の特解の成分の比が有効桁数をこえた場合を考えると、明らかに二つの解は定数因子を別にすれば同一なものになってしまう。この様なことが $y=b$ 以前で起れば、関係(1.3)は完全に無意味となる。桁落ちによるこの様な精度の低下は、たとえ二つ解の一方を、$y=a$ で急激に増大する特解の成分を含まない様に選んだとしても解消しない。計算機の中での、急激に増大する特解に独立な解は、真の意味で独立な解とは計算機の桁数以下ではあるが誤差を常に含み、これが急激に増大する解の成分として働く為に同様の現象はそのままではさけることが出来ない。この様な事情は急激に変化する特解を持つ方程式の境界値

問題に共通であって、その際、精度がいかに著しく低下するかは、Bellmann-Kalaba[3] によって示された簡単な方程式による具体例に見る事が出来る。しかし、この困難は大きいαR に対して O.S. 方程式を扱う限り常に現われるものであるから O.S. 方程式に於いて数値解法に固有な課題は、この困難をいかに処理するかにあると思われる。

その為の手法は、Thomas[2] によって最初に O.S. 方程式に対して適用された Matrix-Inversion の方法、Kaplan[4] による Orthogonalization の方法、Reid[5] により提案された、非粘性方程式のみを数値積分し、粘性解は漸近理論によって得られるものを用いる方法の三つに大別される。

Matrix-Inversion の方法は、前述の精度の低下が、一端での境界条件をみたす二つの解を数値積分する過程で生じるものであることから、まず固有関係をもとめ、その後でそれに対応する単一の固有函数をもとめることによって、その困難をさけようとするものである。まず区間を N- 等分し、各分点での函数 ϕ の値を ϕ_k　$k=0,1,2,\cdots,N$. とする：方程式を差分化し、すべての境界条件を用いると、方程式は ϕ_k　$k=0,1,2,\cdots N-2$. に対する $N-1$ 個の連立同次の一次方程式

$$\sum_{k=-2}^{2} B_{n,n+k}(\alpha,R,c)\,\phi_{n+k}=0 \quad , n=0,1,2,\cdots,N-2 \tag{1.4}$$

になる。この方程式がすべてが0でない ϕ_k を持つ為には、

$$\det \left| B(\alpha, R, c) \right| = 0 \qquad (1.5)$$

が成りたたねばならない。これが固有関係としてもとめるものである。この固有関係は Gauss の消去法（例えば[6]参照）により計算される。Thomas がこの方法を用いて二次元 Poiseuille 流に対して行った計算の結果は、精度の高いものとして信頼されている。その際の分点の間隔は $(\alpha R)^{-1/3}$ の程度である。この方法の一つの難点は、計算機の容量を多く必要とすることにあったが、今日では、それはさしたる問題でなくなった様である。今一つの難点は、試行錯誤的に α, R, 等のパラメーターを与えて固有値方程式（1.5）を解く為に、既知の結果の精密化という場合は良いにしても、安定特性が全く未知の問題に対して非能率的であるという問題は残る。Thomas はかなり技巧的な差分 Scheme を用いて差分化の際の誤差を少くする事に努め、この Scheme はその後も踏襲されているが、その事は必ずしも本質的なことではなく、これと同程度の近似度を持つより簡単な Scheme を採用しても差支えない様に思われる。

Orthogonalization の方法は、Matrix-Inversion の方法と異って二つの独立な解を用いるのであるが、解の間の独立性が、数値積分の進行と共に次第に失われるのを防ぐ為に、全区間を

いくつかの小区間に分割し、各小区間毎にGram-Schmidtの直交化を行って、その都度新しく独立な初期条件から積分を始める。その際、それまで積分して来た区間での解は直交化に伴う変換をうける。独立な初期条件から出発した二つの解は、急激に増大する特解の成分を共にその一部として含むが、その様な操作によって、急激に増加する解とそれに独立な解とに次第に分けられていく。急激に増加する解のみに対応する初期値と、それに独立な解に対応する初期値は、あらかじめ判っていないのが普通であるが、この操作によって、出発点での二つの解の値は、それらの初期値に次第に近づいていく事が期待される。しかも、仮にそれらが既知として最初からその様な初期値を選んで数値積分を出発させた場合にも、誤差を原因として、急激に増加する特解の成分は増大したのであるが、今度の場合は、操作が、直交化に伴う単なる変換であって、それらの初期値が変換の結果としてでてくるという事情によって、精度の低下は生じない。具体例は[3]に与えられている。この方法は精度を低下させる原因に対するいわば正攻法であり、他の同種の問題へ応用する道が広いという点で優れているかと思われるが、κRが大きくなるにつれて直交化をひんぱんに行う必要があり、それだけ煩雑になることはさけがたい。

第三の方法は、αRが大きい場合に桁落ちを生じる原因となる粘性解を含むO.S.方程式の解全体を数値積分によってもとめることをさけて、O.S.方程式の解を微小量$(\alpha R)^{-1}$で展開した最低次の項が従う非粘性方程式

$$(U-c)(\phi''-\alpha^2\phi)-U''\phi=0 \qquad (1.6)$$

のみを数値積分するものである。(1.6)を解くことによっては得られないO.S.方程式の残りの二つの急激に変化する粘性解については、漸近理論でよく知られたTietjens函数を用いる。これは、漸近理論との折衷的な手法ではあるが、(αR)が十分大きい場合には、安定特性の主流依存性が非粘性方程式だけにうけもたれている為に、異る主流毎に解く必要があるのは、実際には非粘性方程式(1.6)であることからして、能率的な方法と言えるだろう。この際、非粘性方程式(1.6)は $U(y_c)=c$ である様な点 $y=y_c$ で特異性を示すから、数値積分に際しては注意が必要である。Reidの用いた手法は、$y=y_c$が(1.6)の確定特異点であり、そのまわりで(1.6)の二つの解は

$$\left.\begin{aligned}\phi_1(y)&=(y-y_c)P_1(y-y_c)\\ \phi_2(y)&=P_2(y-y_c)+\frac{U''(y_c)}{U'(y_c)}\phi_1(y)\log(y-y_c)\end{aligned}\right\}\qquad(1.7)$$

但し P_1, P_2 は定数項から始まる多項式

の形に書けることから，(1.7)の特異解ϕ_2については，(1.7)の形を(1.6)に代入して得られる正則な方程式

$$(U-c)(\phi_2''-\alpha^2\phi_2)-U''\phi_2 = -\frac{U''(y_c)}{U'(y_c)}\frac{U-c}{y-y_c}\left\{2\phi_1'-\frac{\phi_1}{y-y_c}\right\} \qquad (1.8)$$

を数値積分するものである。他の方法として，(1.7)を複素平面上に解析延長し特異点を含まぬ正則な領域で数値積分を行う事が考えられる。但し，(1.6)の解がO.S.方程式(1.1)の解の$\alpha R\to\infty$の場合の正しい漸近形になるためには，漸近理論の教える所に従って特異点をさける積分路を選ばなければならない。後藤[7]は(1.6)を更に変換$\phi'/\phi=f$によってfに対する非線型の一階方程式に帰着させ，上記の積分路にそって数値積分を実行することにより，O.S.方程式の数値解法を更に単純化したものに導いた。

§2　直交函数展開

直交函数展開は，熱対流の安定問題に用いられて，非常に有効であった。[8] もし，O.S.方程式の場合にもこの方法が使えるとすると，解法は著しく単純化され，且つ数値解法と共通の利点を利用することが出来る。のみならず，非線型問題に

対しても、基本的にはそのまゝの形で拡張出来ることが期待される。この様な意図の下に、今まで二、三の試みがなされている。Dolph と Lewis[9] は O.S.方程式で $U=0$ とおいたときの固有函数系（三角函数と双曲線函数の和の形で表わされる）を用いて、二次元 Poiseuille 流を調べ、Clenshaw と Elliott[10] は Chebyshev 多項式を用いて二次元 Jet を調べた。又、Dowell[11] は境界条件を満たす三角函数の系を用いて、二次元 Poiseuille 流を調べている。これらの例において、満足すべき結果を得る為に必要とした展開の項数は、才一と才三の場合は約30項、才二の場合は96項を必要としている。才一と才三の場合は非線型問題をも同時に扱っているが、その際用いられた展開の項数は、計算量の制限の為に線型問題よりもずっと少いので、その結果はせいぜい定性的なものに止まると思われる。この様に直交函数展開を O.S.方程式に適用した場合、満足な近似を得るに必要な項数はかなり多く、直交函数展開の利点を生かすまで至っていない。前に述べた様に、O.S.方程式の固有函数には、αR が大きい場合急激に変動する粘性解を成分として含むので、この固有函数を忠実に表現しようとすれば、展開する函数系の中にこの粘性解と同じ程度に変動する高波数成分を含む必要があるから、この様に多数の項数を必要とするのはやむを得ないことである。但し Jet の場合の様に αR が大きい

ときに、粘性解は主要でなく、粘性の影響が非粘性解の高次の修正項を通じて入ってくるときには直交函数展開はかなり有効である。筆者は簡単な三角函数の展開によって、この場合高々十数項の項数で、αが小さい領域を除けば十分な結果が得られる事を知った。[12] しかし、固体壁のある流れのときには、粘性解の影響はさけ難く、直交函数展開が成功する可能性は、固有函数における局所的な不正確さが、固有関係にあまり敏感でなく、固有函数の大局的な振舞いで固有関係がきまることを期待する外ない。しかし、試行の結果この期待は裏切られたので、この困難をさける為に何らかの工夫を導入する必要がある。ここでは、ゆるやかに変動する非粘性解のみを直交函数展開し、粘性解の部分を受けもつTietjens函数とで固有値方程式を構成する方法を試みた。[13] 速度分布の個性を反映するのは非粘性解の部分であるから、主流に関して普遍的な取扱いの方法を開発するという目的にとって、この方法は決して不都合ではない。これは先に数値解法の部分でReidの方法として述べたものに対応する。ここでは更に、非粘性方程式が特異点を持つ事から来る困難を回避するために、実軸上の展開ではなく、複素平面内での正則領域にとった曲線まで展開することを試みた。

漸近理論の教えるところに従えば、αRが大きいときの

O.S.方程式の4つの特解は非粘性方程式(1.6)の二つの解ϕ_1, ϕ_2と粘性解ϕ_3, ϕ_4とから成る。ϕ_3, ϕ_4は

$$\left.\begin{aligned} \phi_3 &= \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta\, h_1(\eta) , \\ \phi_4 &= \int_{\infty}^{\eta} d\eta \int_{\infty}^{\eta} d\eta\, h_2(\eta) , \end{aligned}\right\} \qquad (2.1)$$

の形に書ける。但し、ηは非粘性方程式(1.6)の特異点$y=y_c$の近傍をscale変数した変数

$$\eta = (\alpha R)^{1/3}\left[-U'(y_c)\right]^{1/3}(y-y_c) \qquad (2.2)$$

であり、$h_{1,2}(\eta)$は$1/3$次Hankel函数$H^{(1),(2)}_{1/3}(\eta)$を用いて

$$h_{1,2}(\eta) = \left(\frac{2}{3}e^{-3\pi i/4}\eta^{3/2}\right)^{1/3} H^{(1),(2)}_{1/3}\left(\frac{2}{3}e^{-3\pi i/4}\eta^{3/2}\right) \qquad (2.3)$$

と表わされる。ϕ_3, ϕ_4がそれぞれ$\eta\to-\infty$又は$+\infty$のとき指数函数的に0に近づくことから、固有値方程式は、$\phi=\sum_{i=1}^{4} A_i\phi_i$が境界条件(1.2)をみたすために

$$\begin{vmatrix} \phi_1(a) & \phi_2(a) & \phi_3(a) & \phi_4(a) \\ \phi_1'(a) & \phi_2'(a) & \phi_3'(a) & \phi_4'(a) \\ \phi_1(b) & \phi_2(b) & \phi_3(b) & \phi_4(b) \\ \phi_1'(b) & \phi_2'(b) & \phi_3'(b) & \phi_4'(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_1(a) & \phi_2(a) & \phi_3(a) & 0 \\ \phi_1'(a) & \phi_2'(a) & \phi_3'(a) & 0 \\ \phi_1(b) & \phi_2(b) & 0 & \phi_4(b) \\ \phi_1'(b) & \phi_2'(b) & 0 & \phi_4'(b) \end{vmatrix} = 0$$

(2.4)

となる。今主流としては、安定特性がよく知られている二次元Poiseuille流を比較のためにとる。即ち、

$$U(y) = 1 - y^2 \qquad -1 \leq y \leq 1 \tag{2.5}$$

Uは偶函数だから、固有函数は偶函数のものと奇函数のものとに分離される。従って区間 $0 \leq y \leq 1$ だけで考えれば十分であるが、一般に偶函数解の方がより小さい臨界Reynolds数を与えることが知られているので、更に偶函数のみを扱えば十分である。ϕ_1として(1.6)の偶函数解、ϕ_2として奇函数解をとると、$y=1$で有限な解ϕ_3、$y=-1$で有限な解ϕ_4は$y=0$でほとんど0に等しいから、固有値方程式(2.4)は簡単化されて、

$$\frac{\phi_1(1)}{\phi_1'(1)} = \frac{\phi_3(1)}{\phi_3'(1)} \tag{2.6}$$

となる。

所が、(2.6)の右辺はTietjens函数 $F(\eta)$ を用いて

$$\phi_3(1) / \phi_3'(1) = (1 - y_1) F(\eta_1) \tag{2.7}$$

$$F(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta\, h_1(\eta) \Big/ \eta \int_{-\infty}^{\eta} d\eta\, h_1(\eta) \tag{2.8}$$

と表わされる。こゝでy_1は1に最も近い特異点であり、η_1は$y=1$に対応するηの値である。ηの実数値、即ち$\mathcal{I}_m c = 0$

(中立撹乱)に対する $F(\eta)$ の値は既に計算されたものを用いることが出来るから、必要な量は $\phi_1(1)/\phi(1)$ だけということになる。この値を非粘性方程式(1.6)を直交函数展開によって解くことにより求める。(1.6)の解は(1.7)の様に対数的特異性を持ち、その正しい分枝は $Re[U'(y_c)]>0$ なら複素平面上で特異点の下側、$Re[U'(y_c)]<0$ なら上側を通って積分することで得られる。今の場合は後者であるから、その条件を満たし、区間の両端点を通る曲線上で解を直交函数展開することを考える。ここでは下図の様な曲線を選んだ。この $y_0=e^{-\pi/3\,i}$ を中心とし、$y=0,1$ を通る円弧は変換 $y=y_0+e^{(2\pi-t)i/3}$ によって t の実区間 $0\leq t\leq \pi$ にうつされる。(1.6)を変換された独立変数 t について書きかえると、

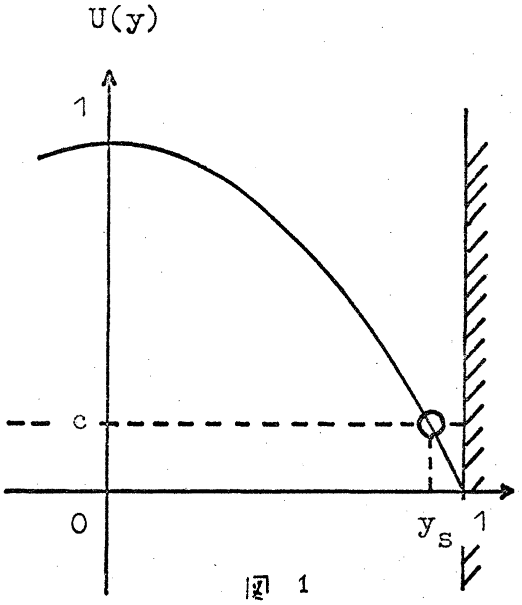

図 1

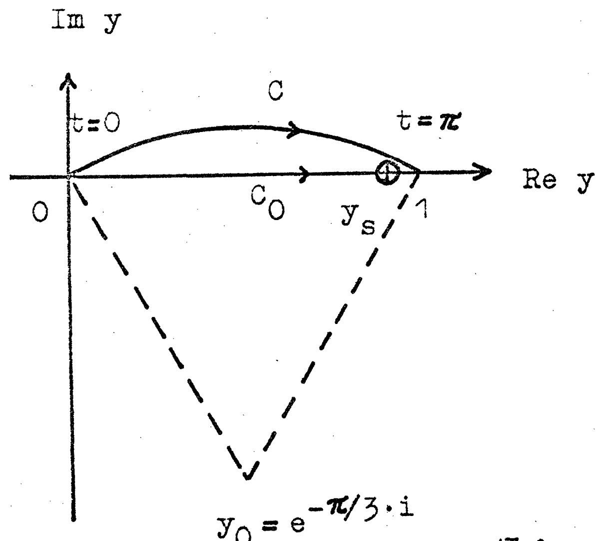

図 2

$$[\hat{v}(t)-c][-9e^{2(t-2\pi)/3i}(\frac{d^2}{dt^2}+\frac{i}{3}\frac{d}{dt})-\alpha^2]\phi-\hat{w}(t)\phi=0 \qquad (2.9)$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{v}(t) &= v(y) = 1+e^{\pi i/3}(1-e^{-ti/3})^2\\ \hat{w}(t) &= v''(y) = -2\end{aligned}\right\} \qquad (2.10)$$

となる。曲線 C の上で偶函数解 ϕ_1 を cos の列で展開する。

$$\left.\begin{aligned}&\phi_1-\phi_1(1)=\sum_{n=0}^{\infty}E_n\cos\gamma_n t\ ,\\ &\gamma_n=(n+\frac{L}{2})\ ,\quad n=0,1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

同次線型方程式を考えているから、一般性を失うことなく、$\phi_1(1)=1$ とおける。(2.11) を (2.9) に代入し、$\cos\gamma_m t$ についてのモーメントをとると

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}A_{mn}(\alpha,c)E_n = B_n(\alpha,c)\\ &\qquad m=0,1,2,\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

の形の方程式系が得られる。これを適当な項数で打ち切って E_n について解くと、$\phi_1'(1)$ は

$$\phi_1'(1)=3i\,e^{-\pi i/3}\sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1}\gamma_n E_n \qquad (3.13)$$

としてもとめられる。$\phi_1(1)=1$ と normalize しているから、固有値方程式(2.6)を解く上で必要な量はすべて得られたことになる。求める中立安定曲線上の点は、t を与えたとき、(2.6)を満たすような α, Rc の組を繰返し計算で求めることで得られ、そのときの αR の値は(2.2)から求められる。もし、実軸上の固有函数が必要なときには、t について得られた固有函数(2.11)を実軸上に関係 $y=y_0+e^{(2\pi-t)i/3}$ により解析接続して得られる。計算の結果、中立安定曲線、固有函数共に、少数項の展開（8項）で満足すべき値が得られた。又実軸上の固有函数についても結果は十分高精度であった。

今までに述べた二つの手法、即ち、非粘性解のみを直交函数展開すること、非粘性方程式の正則領域にある曲線上で展開すること、によって少い項数で展開を収束させることが出来、既知の結果とほゞ十分な精度で一致する結果を得た。これは、従来の直交函数展開の結果に比べてかなりの改善と見做し得る様に思われる。

おわりに

漸近理論を補う方法には、色々の variety があり、漸近理論にない性質のうちで、特にどれに重きをおくかによって、（固有函数を得るためか、解法の単純化か 等）適当な方法

も自ずから異るであろう。ただ一般的に言えることは、漸近理論を全く無視することは、当然のことながら、決して得策ではなく、それぞれの目的に応じ、漸近理論の結果をうまく利用することにより、より好都合な方法が開発出来るであろう。

引用文献

1) C.M.Vest and V.S.Arpaci: J.Fluid Mech. 36 (1969) 1.

2) L.H.Thomas: Phys.Rev. 91 (1953) 780.

3) R.E.Bellman and R.E.Kalaba: Quasilinearization and Nonlinear Boundary-Value Problem (Elsevier,1965).

4) R.E.Kaplan:ASRL-TR 116-1 (1964).

5) W.H.Reid: Basic Development in Fluid Dynamics (Academic Press, 1965) Vol.1.

6) K.S.Kunz: Numerical Analysis (McGraw-Hill, 1957).

7) K.Gotoh: J.Phys.Soc.Japan 28 (1970) 780.

8) S.Chandrasekhar: Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability (Oxford Univ.Press, 1961).

9) C.L.Dolph and D.C.Lewis: Quart.appl.Math. 16 (1958) 97.

10) C.W.Clenshaw and D.Elliott: Quart.J.Mech.appl.Math. 13 (1960) 300.

11) E.H.Dowell: J.Fluid Mech. 38 (1969) 401.

12) N.Ikeda: J.Phys.Soc.Japan 27 (1969) 1035.

13) N.Ikeda: J.Phys.Soc.Japan 30 (1971) 276.