数理解析研究所講究録
第 120 巻 1971 年 28-35

非定常回転する円柱のまわりの流れの線型安定性

東大工　桑原真二
農工大教養　高木隆司

§1. 序

粘性流体の中で無限に長い円柱を軸のまわりに回転させると，円柱のまわりに回転方向を向いた速度の場ができる．この場は半径方向の遠心力を伴っているので，速度場がある条件を満すと，軸に近い流体と遠い流体が入れかわるような2次流が生じ，基本の流れが不安定であることが考えられる．

円柱の回転角速度が正弦的に振動するときや，零から急に一定の値になるときについて，2次流の観測を行った結果がTaneda[1]によって報告された．この問題は基本流の線型安定問題として解析的な研究が可能であり，とくに基本流が非定常なので従来の安定性の研究と異っており興味が持たれる．ここでは円柱が振動するばあいを扱かう．

§2. 基本流

図1のように諸物理量を定義する．空間内の点の円筒座

標を(x_1, x_2, x_3)とし，円柱表面を$x_2 = a$とする．基本流は$(0, 0, V_3(x_2))$と表わされ，それに重ね合される攪乱速度を(v_1, v_2, v_3)とする．動粘性率をνとすると，基本流を決める方程式と境界条件は

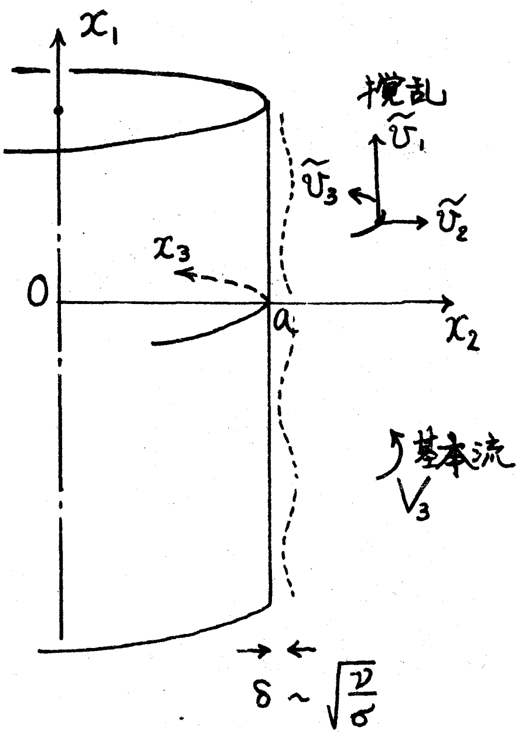


図1

$$\frac{\partial V_3}{\partial t} = \nu\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{1}{x_2^2}\right)V_3,$$

$$V_3(a) = Re\left(V_0 e^{-i(\sigma t+\phi)}\right).$$

である．ただし，V_0は振動の振幅，σは振動の角振動数，ϕはV_3の解の形が簡単になるようにあとで決められる位相定数である．これは，時間の原点を適当に選ぶことに相当する．

速度場はあらゆる点で角振動数σで振動するから，

$$V_3 = Re\left\{V(x_2)e^{-i\sigma t}\right\}$$

とおくことができ，$V(x_2)$は次の方程式を満す．

$$\left\{\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} + \left(i - \frac{1}{\xi^2}\right)\right\} V(\xi) = 0.$$

ただし,

$$\xi = \alpha x_2 , \quad \alpha = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}$$

である．この方程式の解で，$\xi \to \infty$ のとき $V \to 0$ となるものは

$$V(\xi) = A\ (\mathrm{ker}_1\, \xi - i\, \mathrm{kei}_1\, \xi) = A\, J_1 (e^{-\frac{3}{4}\pi i} \xi)$$

である．ただし，J_1 は1次のベッセル関数であり，Aは定数である．前述した境界条件より，$x_2 = a$ で

$$|V(\alpha a)| = |A| \cdot \sqrt{\mathrm{ker}_1^2(\alpha a) + \mathrm{kei}_1^2(\alpha a)} = V_0$$

となる．そこで，Aが実数となるように ϕ が選んであるとすると，

$$A = \frac{V_0}{\sqrt{\mathrm{ker}_1^2(\alpha a) + \mathrm{kei}_1^2(\alpha a)}}$$

となる．速度分布は，減衰しながら半径方向に伝播するような形を持ち，$\xi = \alpha a$（円柱表面）から $\xi = \alpha a + O(1)$ の範囲で主に変化している．もとの座標では分布は x_2 について $1/\alpha$ の程度の幅の中に限られている．

実際の実験のばあいもそうであったように，$a \gg 1/\alpha$ と仮定する．すなわち速度分布は円柱表面近くの薄い層の中

に限られている．

物理量を V_0, a, ν で無次元化する．無次元量も今までと同じ記号で表わす．このとき，速度は $x_2=1$ から $1+O(\frac{1}{\alpha})$ まで，あるいは $\xi=\alpha$ から $\alpha+O(1)$ までに分布している．

§3．攪乱速度の方程式

基本流は $e^{\pm i\sigma t}$ という時間依存性を持つ．攪乱速度 $(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)$ の満すべき方程式を見ると，基本流と相互作用しているのは，攪乱のフーリエ成分の内でも

$$\tilde{v}_1 : \text{const},\ e^{\pm 2i\sigma t},\ e^{\pm 4i\sigma t}, \dots$$
$$\tilde{v}_2 : \text{const},\ e^{\pm 2i\sigma t},\ e^{\pm 4i\sigma t}, \dots$$
$$\tilde{v}_3 : e^{\pm i\sigma t},\ e^{\pm 3i\sigma t},\ e^{\pm 5i\sigma t}, \dots$$

だけであり，他の成分は仮に初期に存在していてもやがて減衰してしまうであろう．　ここで，簡単な閉じた方程式系を得るために，攪乱の基本的な性質を表わす上の列の左端の成分だけを残しあとを無視する．すなわち，

$$\tilde{v}_1 = v_1 e^{ikx_1}, \quad \tilde{v}_2 = v_2 e^{ikx_1},$$
$$\tilde{v}_3 = \frac{1}{2}(v_3 e^{-i\sigma t} + v_3^* e^{i\sigma t}) e^{ikx_1}$$

とおく．　v_1, v_2, v_3 は ξ だけの関数である．攪乱の方程式は，v_2, v_3 および攪乱の渦度の第3成分

$$\omega_3 = ik v_2 - \alpha \frac{dv_1}{d\xi}$$

だけで閉じさせることができる．円柱表面から測る座標 η を

$$\eta = \alpha(x_2 - 1) = \xi - \alpha$$

で定義すると，方程式　と境界条件は次のようになる．

$$\{\alpha^2 D - k^2(\alpha+\eta)^2\} v_2 = ik(\alpha+\eta)^2 \omega_3,$$

$$\{\alpha^2 D - (k^2 - i\alpha)^2(\alpha+\eta)^2\} v_3$$
$$= -\alpha R(\alpha+\eta)\{(\alpha+\eta)\frac{dV}{d\eta} + V\} v_2,$$

$$\{\alpha^2 D - k^2(\alpha+\eta)^2\} \omega_3$$
$$= -\frac{i}{2}\alpha k R(\alpha+\eta)(v_3^* V + v_3 V^*),$$

$$v_2 = v_3 = \frac{dv_2}{d\eta} = 0 \qquad (\eta = 0),$$

$$v_2,\ v_3,\ \omega_3 \longrightarrow 0 \qquad (\eta \to \infty).$$

ただし，

$$R = \frac{aV_0}{\nu},$$

$$D = (\alpha+\eta)^2 \frac{d^2}{d\eta^2} + (\alpha+\eta)\frac{d}{d\eta} - 1.$$

§4. 直交関数展開

v_2, v_3, w_3 を，境界条件を自動的に満すような適当な直交関数で展開する．

$$v_2 = \sum_l a_l \varphi_l^{(1)}(\eta), \quad \varphi_l^{(1)} = \sqrt{\frac{l!}{(l+4)!}}\, e^{-\frac{1}{2}\eta} L_l^{(4)}(\eta)\cdot\eta^2,$$

$$v_3 = \sum_l b_l \varphi_l^{(2)}(\eta), \quad \varphi_l^{(2)} = \sqrt{\frac{l!}{(l+2)!}}\, e^{-\frac{1}{2}\eta} L_l^{(2)}(\eta)\cdot\eta,$$

$$w_3 = i\sum_l c_l \varphi_l^{(3)}(\eta), \quad \varphi_l^{(3)} = e^{-\frac{1}{2}\eta} L_l(\eta),$$

ただし，

$$L_l^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x} x^{n+\alpha}\right)$$

はラゲールの陪多項式である． l についての和は $l=2$ まで取り，あとは無視する．

α が大きいときには V として漸近形を使うことができる．すなわち，

$$\mathrm{ker}_1\,\xi - i\,\mathrm{kei}_1\,\xi = J_1\left(e^{-\frac{3}{4}\pi i}\xi\right)$$

$z\to\infty$ で

$$= -J_0'\left(e^{-\frac{3}{4}\pi i}\xi\right),$$

$$J_0\left(e^{-\frac{3}{4}\pi i}z\right) \cong \frac{1}{\sqrt{2z/\pi}}\, e^{\alpha(-z) - i\beta(-z)}, \quad \left(|\arg z| < \tfrac{5}{4}\pi\right)$$

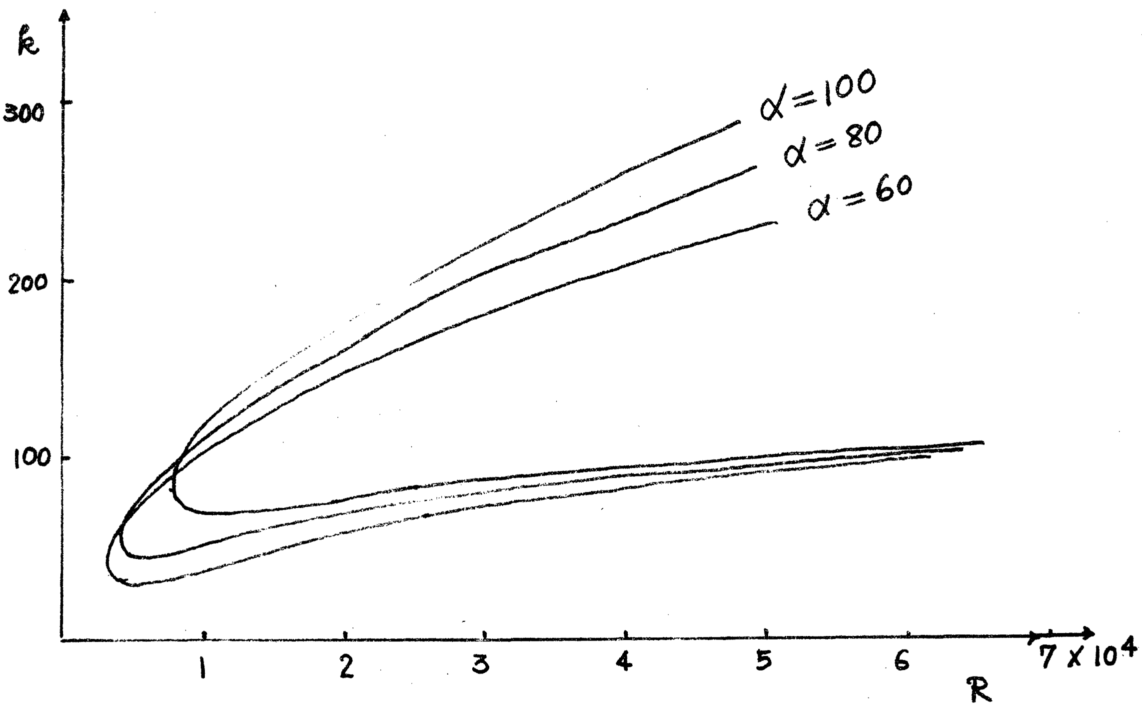
$$\alpha(z) \cong \frac{z}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8\sqrt{2}\,z} + \cdots,$$

$$\beta(z) \cong \frac{z}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8\sqrt{2}\,z} + \cdots$$

$\xi \approx \alpha \gg 1$ のばあいを考えているから，$\alpha(z)$, $\beta(z)$ の展開のうち $O(z^{-1})$ の項を無視できる．こうして簡単化された形の基本流を方程式に代入し，展開係数 a_ℓ, b_ℓ, c_ℓ がすべてゼロにならないための条件を求めれば，安定性に関する中立曲線を得る．

§5. 結果

実験によって与え得るパラメーターは α と R であり，波数 k は系自身が選択して現れる．計算結果は異なる α の値毎に，k–R 曲線として示すのが便利である．図2に，$\alpha = 100$, 80, 60 についての k–R 曲線を示す．



$\alpha=100, 80, 60$ のときの臨界レイノルズ数は，それぞれ約 8000, 4500, 2500 で，kの値が約 70, 50, 40 のときに起きる．さらに詳しい計算結果を得たのちに実験結果と比べる予定である．

参考文献

1) S. Taneda etal : 日本物理学会第25回年会予稿集，2巻 91ページ (1970).