数理解析研究所講究録
第120巻 1971年 81-101

Wiener-Hermite展開の応用
―― Burgers系のエネルギースペクトル ――

関学大 理　　矢野正文
今村勤

§1　まえがき

時間的に変る *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開が導入され，非圧縮性非粘性流体の厳密にガウス分布をしている解（Hopf の特解）が展開の第1項のみで表はされた[1]。その考え方は，各時刻時刻で異った適当な *ideal random function* を用い，未知の確率関数を Wiener-Hermite 展開の始めの数項で長時間近似しようとするものである。この方法は 3-*mode problem* の近似的にガウス分布をしている解を取り扱うのに用いられ，展開の始めの2項を用いてよく近似されることが示された[2]。一方時間的に変らない *ideal random function* を用いた Wiener-Hermite 展開の Burgers 系への応用は，今迄数人の人々によってなされて来た[4)~7)]。特に展開の始めの2項を用いて初期値問題を数値的に解く試みがなされ，エネルギースペクトル $E(k) \sim k^{-2}$ が妥当と

思はれる結果が得られている。[7] しかしながらそこでは展開の第2項目がかなりの波数領域で第1項より大きくなるという不満足な点があり，展開の妥当性に疑問をなげかけている。このような場合にこそ，適当な時間的変化を持った ideal random function を用い収斂性をよくすることが望まれるのであろう。

ここでは時間的に変る ideal random function を用いた Wiener-Hermite 展開の始めの2項を，Burgers 系の エネルギースペクトルが $E(k)\sim k^{-2}$, $E(k)\sim k^{-\frac{3}{2}}$, $E(k)\sim k^{-5/2}$ であるような3つのガウス分布を初期値とした問題の数値積分に適用する。その結果，(1) ideal random function の時間変化を適当にとることにより，展開の収斂性をよくすることが出来ることを示す。即ち時間的に変らない ideal random function を用いた Wiener-Hermite 展開の場合に較べて，かなり大きな波数領域にわたって展開の第1項を第2項に較べて大きくたもたれることを示す。(2) $E(k)\sim k^{-2}$ の初期条件のときはエネルギースペクトルの形は安定であり，$E(k)\sim k^{-\frac{3}{2}}$, $E(k)\sim k^{-\frac{5}{2}}$ の場合はエネルギースペクトルの形が k^{-2} に近づく傾向を示す。即ち $E(k)\sim k^{-\alpha}$ $(\alpha\sim 2)$ のような近似的に平衡なエネルギースペクトルがある公算が大きいことを示す。

§2 で Burgers 系に対し時間的に変る ideal random function を用いた Wiener-Hermite 展開の概要をのべ，適当な ideal random function の時間変化についてのべる。§3 で数値積分の結果をのべる。

§2 Burgers 系に対する時間的に変る ideal random function を用いた Wiener-Hermite 展開

我々が取り扱う系は1次元の Burgers 方程式

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\tilde{u}(x,t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\tilde{u}^2(x,t) = \nu\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tilde{u}(x,t)$$

に従う速度場 $\tilde{u}(x,t)$ である。その Fourier 変換

$$u(k,t) = \frac{1}{(2\pi)}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(x,t)e^{-ikx}dx$$

に対する方程式は

$$(2) \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(k,t) + \frac{ik}{2}\int u(k-k',t)u(k',t)dk' = -\nu k^2 u(k,t)$$

である。$u(k,t)$ に対する Wiener-Hermite 展開は次の様にかける

$$(3) \qquad u(k,t) = K^{(1)}(k,t)H^{(1)}(k,t) + \int K^{(2)}(k-k',k',t)H^{(2)}(k-k',k',t)dk' + \cdots$$

ここで $K^{(n)}$ は普通の関数であり，$H^{(n)}$ は時間的に変る ideal random functions を用いた Wiener-Hermite 汎関数の Fourier 変換

$$H^{(n)}(k_1\cdots k_n,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\tilde{H}^{(n)}(x_1 x_2\cdots x_n t)e^{-ik_1x_1-ik_2x_2-\cdots-ik_nx_n}dx_1dx_2\cdots dx_n$$

である[1]。$u(k,t)$ の統計的平均（以下 $\langle\ \rangle$ で示す）は0とし，空間的な統計的一様性を仮定している。$H^{(n)}$ の性質は参考文献(1)と(8)にかかれているが，ここで使う性質は

$$\left\langle H^{(n)}(k_1,\cdots k_n,t)\right\rangle = \left\langle H^{(1)}(k_1,t)\,H^{(2)}(k_1,k_2,t)\right\rangle = 0$$

$$\left\langle H^{(1)}(k_1,t)\,H^{(1)}(k_2,t)\right\rangle = \delta(k_1+k_2)$$

$$\left\langle H^{(1)}(k,t)\,H^{(1)}(l,t)\,H^{(2)}(m,n,t)\right\rangle = \delta(k+m)\delta(l+n)+\delta(k+n)\delta(l+m)$$

$$\left\langle H^{(2)}(k,l,t)\,H^{(2)}(m,n,t)\right\rangle = \delta(k+m)\delta(l+n)+\delta(k+n)\delta(l+m)$$

$$\begin{aligned}\left\langle H^{(2)}(k,l,t)\,H^{(2)}(m,n,t)\,H^{(2)}(p,q,t)\right\rangle &= \delta(k+m)\delta(n+p)\delta(q+l)\\ &+\delta(k+n)\delta(m+p)\delta(q+l)+\delta(k+m)\delta(n+q)\delta(p+l)\\ &+\delta(k+n)\delta(m+q)\delta(p+l)+\delta(k+p)\delta(m+q)\delta(l+n)+\delta(k+p)\delta(m+l)\delta(q+n)\\ &+\delta(k+q)\delta(m+p)\delta(l+n)+\delta(k+q)\delta(m+l)\delta(p+n)\end{aligned}$$

δはDiracのδ-関数である。

である。展開の第1項はガウス分布を示し，第2項以下はその補正を表はす。

ideal random function の時間的変化は次の方程式に従うとしよう。

(4) $$\frac{\partial}{\partial t}H^{(1)}(k,t) = \int L^{(2)}(k-k',k',t)\,H^{(2)}(k-k',k',t)\,dk' + \cdots\cdots$$

以下 $K^{(1)}$, $K^{(2)}$, $L^{(2)}$ の変数に t をかかないことにする。$H^{(2)}(k,l,t)$ は k と l について対称であるから，$K^{(2)}(k,l)$ $L^{(2)}(k,l)$ も対称としてよい。$H^{(1)}(x,t_0)$ が ideal random function であるために $L^{(2)}(k,l)$ の充すべき性質は，

$$\frac{d}{dt}\left\langle H^{(1)}(k,t)\,H^{(1)}(l,t)\,H^{(1)}(-k-l,t)\right\rangle = 0$$

から容易に導かれ，

$$(5) \qquad L^{(2)}(k,l) + L^{(2)}(l,-k-l) + L^{(2)}(-k-l,k) = 0$$

である。展開(3)(4)を $H^{(2)}$ の項できると $K^{(1)}(k)$，$K^{(2)}(k,l)$ に対する方程式は

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) K^{(1)}(k) = -2ik \int K^{(1)}(k') K^{(2)}(-k',k)\,dk' + 2\int K^{(2)}(k-k',k') L^{(2)}(k'-k,-k')\,dk'$$

$$(7) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu (k+l)^2\right) K^{(2)}(k,l) = -K^{(1)}(k+l) L^{(2)}(k,l) - i(k+l)\left[\frac{1}{2}K^{(1)}(k)K^{(1)}(l) + 2\int K^{(2)}(k,k')K^{(2)}(l,-k')\,dk'\right]$$

となる。簡単のため，初期値として $K^{(1)}(k)$ が実数，$K^{(2)}(k,l)$ が純虚数をとるとすると，$L^{(2)}(k,l)$ を純虚数にとれば，方程式(6)(7)からこの性質は後の時刻迄保たれることが判る。そこで以下 $K^{(2)}(k,l)$，$L^{(2)}(k,l)$ の虚数部分を改めて夫々 $K^{(2)}(k,l)$，$L^{(2)}(k,l)$ とかくことにすると(6)(7)は

$$(8) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu k^2\right) K^{(1)}(k) = 2k \int K^{(1)}(k') K^{(2)}(-k',k)\,dk' - 2\int K^{(2)}(k-k',k') L^{(2)}(k'-k,-k')\,dk'$$

$$(9) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu (k+l)^2\right) K^{(2)}(k,l) = -K^{(1)}(k+l) \quad L^{(2)}(k,l) - (k+l)\left[\frac{1}{2}K^{(1)}(k)K^{(1)}(l) - 2\int K^{(2)}(k,k')K^{(2)}(l,-k')\,dk'\right]$$

となり，実変数の実関数の微積分方程式となる。

さて展開の収斂性を最もよくするには$L^{(2)}(k,l)$をどう選べばよいか？それに対して一意的なきめかたはないように思はれる。しかしその選びかたにはいくつかのヒントがある。まづどうしても條件(5)を充さねばならない。條件(5)はもし$L^{(2)}(k,l)$が

$$(10) \qquad L^{(2)}(k,l) = (k+l)F(k,l,-k-l)$$

の形をしていれば，$F(k,l,-k-l)$を任意の対称関数として，自働的に充されている。次に方程式(8)(9)で$\nu=0$とすると，$L^{(2)}(k,l)$を

$$L^{(2)}(k,l) = -\frac{(k+l)}{2}\varkappa \qquad (\varkappa \ \ \text{const.})$$

ととつて，

$$K^{(1)}(k) = \varkappa \quad , \qquad K^{(2)}(k,l) = 0$$

が解となつていることが判る。これがHopfの特解に対応するものである。従つて$\nu\to 0$の極限でこの解につながるような解があるとすると，$L^{(2)}(k,l)$は

$$(11) \qquad \lim_{\substack{\nu\to 0\\ K^{(1)}(k)\to\varkappa\\ K^{(2)}(k,l)\to 0}} L^{(2)}(k,l) = -\frac{(k+l)}{2}\varkappa$$

を充していることが望ましい。最後に$L^{(2)}(k,l)$の導入が展開の收斂をよくするためには，どうであればよいか？今$u(k+l)$の展

開で $K^{(2)}(k,l)$ の項が $K^{(1)}(k+l)$ に較べて小さければ，展開の収斂がよいといえるであろう。$K^{(2)}(k,l)$ を小さくするには，それを大きくする原因である(9)の右辺の $K^{(1)}(k)K^{(1)}(l)$ の項の寄与を $K^{(1)}(k+l)L^{(2)}(k,l)$ の項の寄与で出来るだけ打消すように $L^{(2)}(k,l)$ をとることが必要であろう。即ち非線形項 $K^{(1)}(k)K^{(1)}(l)$ の影響の大きな部分を'くりこみ'項 $K^{(1)}(k+l)L^{(2)}(k,l)$ でうちけし，それを ideal random function の時間的変化によるガウス項のくみかえにおしこめることである。これを完全に消すには一見 $L^{(2)}(k,l)=-\frac{1}{2}(k+l)K^{(1)}(k)K^{(1)}(l)/K^{(1)}(k+l)$ とればよい様にみえるが，條件(5)のためにそうはいかない。條件(5)を考えるためには，$K^{(2)}(k,l)$, $K^{(2)}(l,-k-l)$, $K^{(2)}(-k-l,k)$ に対する打消しの効果を同時に考えねばならない。今その打消しの度合を表はすものとして次の量

$$(12)\qquad \sum_{\substack{a,b,c \text{ cyclic } 1,2,3\\ k_1+k_2+k_3=0}} \left| \frac{\frac{(k_a+k_b)}{2}K^{(1)}(k_a)K^{(1)}(k_b)-K^{(1)}(k_c)L^{(2)}(k_a,k_b)}{K^{(1)}(k_c)} \right|^2$$

を考えることが出来るであろう。今 $L^{(2)}(k,l)$ として次の形

$$(13)\qquad L^{(2)}(k_1,k_2)=\frac{-(k_1+k_2)}{2}\frac{1}{k_1^2+k_2^2+(k_1+k_2)^2}\sum_{\substack{a,b,c \text{ cyclic } 1,2,3\\ k_1+k_2+k_3=0}}\frac{k_a^2K^{(1)}(k_b)K^{(1)}(k_c)}{\max\{|K^{(1)}(k_a)|,\beta\}\,\mathrm{sign}\,K^{(1)}(k_a)}$$

をとる。これは條件(5)を充す。また $|\alpha|>\beta$ にとれば條件(11)を充す。更に $\beta=0$ にとると，(13)は関数形(10)を持つ $L^{(2)}(k,l)$ のなかで量(12)を極小にする。$\beta=\infty$ にとれば，時間的に変らぬ ideal random function を用いた Wiener-Hermite 展開に戻る。大きな k に対して

$K^{(1)}(k)$はいくらでも小さくなる。従ってその関数形によっては小さいが0ではないβを導入しておかねば，(13)から本来ならない筈の特異性が出る場合もあるであろう。

§3 数値積分の結果

以下微積分方程式(8)(9)をmeshにきり 連立階差方程式として数値積分をおこなう。meshは$|k|\leq 6$迄とり巾$\Delta k=0.2$にとる。時刻の巾は$\Delta t=0.01$にとる。νは$1/100$にとる。

最初 は初期値として

$$(14)\qquad K^{(1)}(k)=\frac{1}{(4\pi)^{1/4}}\frac{0.2}{\sqrt{0.04+k^2}}\quad,\qquad K^{(2)}(k,l)=0$$

をとり，$L^{(2)}(k,l)$を(13)にとる。そこでβとして0, 0.05, ∞の3つの場合につき計算を行った。この初期値に対しては代表的な速度U_0($t=0$での速度の2乗平均)は大体0.4，代表的な波数は大体$K_0\sim 0.2$と考えられるから，乱流のレイノルズ数は大体$U_0/\nu K_0\sim 10^2$と考えられる。エネルギースペクトル$E(k)$は$K^{(1)}(k)$，$K^{(2)}(k,l)$を用いて

$$E(k)=\left(K^{(1)}(k)\right)^2+2\int\left(K^{(2)}(k-k',k')\right)^2dk'$$

と表はせる。$t=0$で領域$|k|\leq 6$の中に含まれているエネルギーは大体全体の97.8%である。

計算結果として，上述の3つのβの値に対してのエネルギ

ースペクトルの時間的変化を $E_1(k)$ と共に夫々圖1,2,3に示した。また $K^{(1)}(k)$, $K^{(2)}(k,k)$, $K^{(2)}(k,0)$ の時間的変化を $\beta=0$ と $\beta=\infty$ の場合に対して圖4,5に示した。3つの β の値に対して $E(k)$, $E_1(k)/E(k)$, $\int_0^k E(k)dk \Big/ \int_0^6 E(k)dk$ の値を表1に書いた。$\beta=\infty$ の場合は時間的に変らない ideal random function を用いた Wiener-Hermite 展開によるものであり，圖3と圖4,5の $\beta=\infty$ に対する曲線は Meecham Su[7] の得た圖3,4,5と同じである。

次に初期値として

$$(15)\qquad K^{(1)}(k)=\frac{1}{(4\pi)^{1/4}}\frac{0.2}{\sqrt{0.04+k^{3/2}}},\qquad K^{(2)}(k,l)=0$$

$$(16)\qquad K^{(1)}(k)=\frac{1}{(4\pi)^{1/4}}\frac{0.2}{\sqrt{0.04+k^{5/2}}},\qquad K^{(2)}(k,l)=0$$

をとり，$L^{(2)}(k,l)$ を(13)にとり $\beta=0$ として計算を行った。これらの場合も代表的な速度，波数は初期値(14)のときと大体同じ程度の大きさと考えられる。従って乱流のレイノルズ数は大体 10^2 である。エネルギースペクトルの時間的変化を(15)(16)に対して夫々圖6,7に示した。(16)の場合は $E(k)$ の傾斜の変化が非常に小さいため，一部の波数領域に限ってこれを示した。この領域ではエネルギーがふえているが，これは低い波数領域からエネルギーが移って来ていることによるものである。

以上の諸結果から我々は次の結論を得る。(1) $L^{(2)}(k,l)$ を適当にとることによって，収斂性を非常によくすることが出来る。即ち(13)のように $L^{(2)}(k,l)$ をとることにより，補正項 $K^{(2)}(k,l)$ を主項 $K^{(1)}(k+l)$ に較べて小さくすることが出来る。例へば $t=1.5$ で $|k|\le 6$ の領域のエネルギーの97.7%を含む領域で，$(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ の極小は $\beta=0$, $\beta=0.05$ に対して夫々 0.869, 0.957 に保たれるが $\beta=\infty$ に対してはわづか 0.108 である。図1, 2または表1から判るように，$\beta=0.05$ に対しては $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ が k の小さい領域では $\beta=0$ のときに較べて大きく保たれるが，k の大きい領域では逆に小さくなる。

$\beta=0$ に対しては $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ が殆どすべての波数領域で大きく保たれる。例へば，$|k|\le 6$ の領域の99.9%のエネルギーを含む領域で $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ の極小はなお0.819である。従って大きな波数領域が本質的な役割を果すような現象に対しては，$\beta=0$ を用いることが望ましく，大きな波数領域がそれほど本質的な役割を果さないような現象に対しては，$\beta=0.05$ 等を用いるとよいであろう。(2) 近似的に安定なエネルギースペクトルとして $E(k)\sim k^{-\alpha}$ $(\alpha\sim 2)$ がありそうであることが示された。即ち図1, 2から k^{-2} のエネルギースペクトルの形は非常に安定であり，図5, 6から初期スペクトルの形が $k^{-\frac{3}{2}}$, $k^{-\frac{5}{2}}$ の場合は共に k^{-2} の形に近づく傾向を示す。例へば初期に $k^{-\frac{3}{2}}$ のとき $t=0.5$ で大体 $k^{-1.66}$ (このとき $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ の極小は大体 0.989) $t=1$ で大体 $k^{-1.92}$ (この

とも $(K^{(1)}(k))^2/E(k)$ の極小は大体 0.883) である。

Navier-Stokes 系のような複雑な系に応用するためには[*)]、簡単のために $K^{(2)}K^{(2)}$ 項を無視することが望ましい。従ってこの事情を Burgers 系で調べておくことは意味があろう。方程式(8)と、(9)の右辺で $K^{(2)}K^{(2)}$ の項をおとした方程式とを、$\beta=0$ にとり初期値(14)に対して数値積分し、これをもとの(8)と(9)を積分した結果と比較した。$E(k)$, $K^{(1)}(k)$ については殆ど図に表はれない差は僅かであった。$K^{(2)}(k,k)$ については図8に示した。その差は僅かである。

Δk を 0.15, 0.25 としても、Δt を 0.005 としてもエネルギースペクトルにはあまり変化が認められなかった。

最後に研究会で全エネルギーの減衰の時間的依存度について質問があったが、この場合 $t=1.0$ で 1/100 程度にすぎず、はっきりした依存度は判らなかった。

参考文献

(1) M. Doi and T. Imamura ; Progr. Theoret. Phys. 41 (1969) 358

(2) S. Tanaka and T. Imamura ;

(3) J. M. Burgers ; Verhandel. Kon. Ned. Akad. Wetenschap. Afdel. Natuurk. Sect. I 17 (1939) 2

(4) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meecham ; Phys. Fluids 6 (1963) 1519

(5) W. C. Meecham and A. Siegel ; Phys. Fluids 7 (1964) 1178

(6) A. Siegel, T. Imamura and W. C. Meecham ; J. Math. Phys. 6 (1965) 707

(7) W. C. Meecham and M. Y. Su ; Phys. Fluids 12 (1969) 1582

(8) T. Imamura, W. C. Meecham and A. Siegel ; J. Math. Phys. 6 (1965) 695

*) Navier-Stokes 系にこの方法を適用して，Kolmogoroff や Heisenberg のエネルギースペクトル等について調べることを，関学の田辺憲一君　　　と共に行っている。

表 1

k	ENERGY $\beta=\infty$	ENERGY $\beta=0.05$	ENERGY $\beta=0$	$(K^{(1)2}/E)\times 100$ $\beta=\infty$	$(K^{(1)2}/E)\times 100$ $\beta=0.05$	$(K^{(1)2}/E)\times 100$ $\beta=0$	$(\sum_{k=0}^{k} E(k) / \sum_{k=0}^{30} E(k))\times 100$ $\beta=\infty$	$(\sum_{k=0}^{k} E(k) / \sum_{k=0}^{30} E(k))\times 100$ $\beta=0.05$	$(\sum_{k=0}^{k} E(k) / \sum_{k=0}^{30} E(k))\times 100$ $\beta=0$
0.6	2.76×10^{-2}	2.72×10^{-2}	2.72×10^{-2}	88.3	94.9	88.5	88.8	88.8	89.2
1.2	7.58×10^{-3}	7.19×10^{-3}	7.16×10^{-3}	53.4	95.5	87.5	94.9	94.7	95.0
1.8	3.43×10^{-3}	3.16×10^{-3}	3.13×10^{-3}	19.1	96.8	87.1	97.2	96.9	97.2
2.4	1.84×10^{-3}	1.72×10^{-3}	1.70×10^{-3}	1.1	91.6	86.7	98.4	98.0	98.3
3.0	1.05×10^{-3}	1.08×10^{-3}	1.03×10^{-3}	5.7	57.3	86.3	99.1	98.7	99.0
4.0	4.26×10^{-4}	6.33×10^{-4}	5.15×10^{-4}	57.4	0.0	85.5	99.7	99.4	99.6
5.0	1.98×10^{-4}	3.79×10^{-4}	2.56×10^{-4}	99.9	33.7	81.9	99.9	99.8	99.9
6.0	1.05×10^{-4}	1.71×10^{-4}	4.55×10^{-5}	65.5	66.9	68.1	100.0	100.0	100.0

圖 1　　初期値 (14)，$\beta = 0$

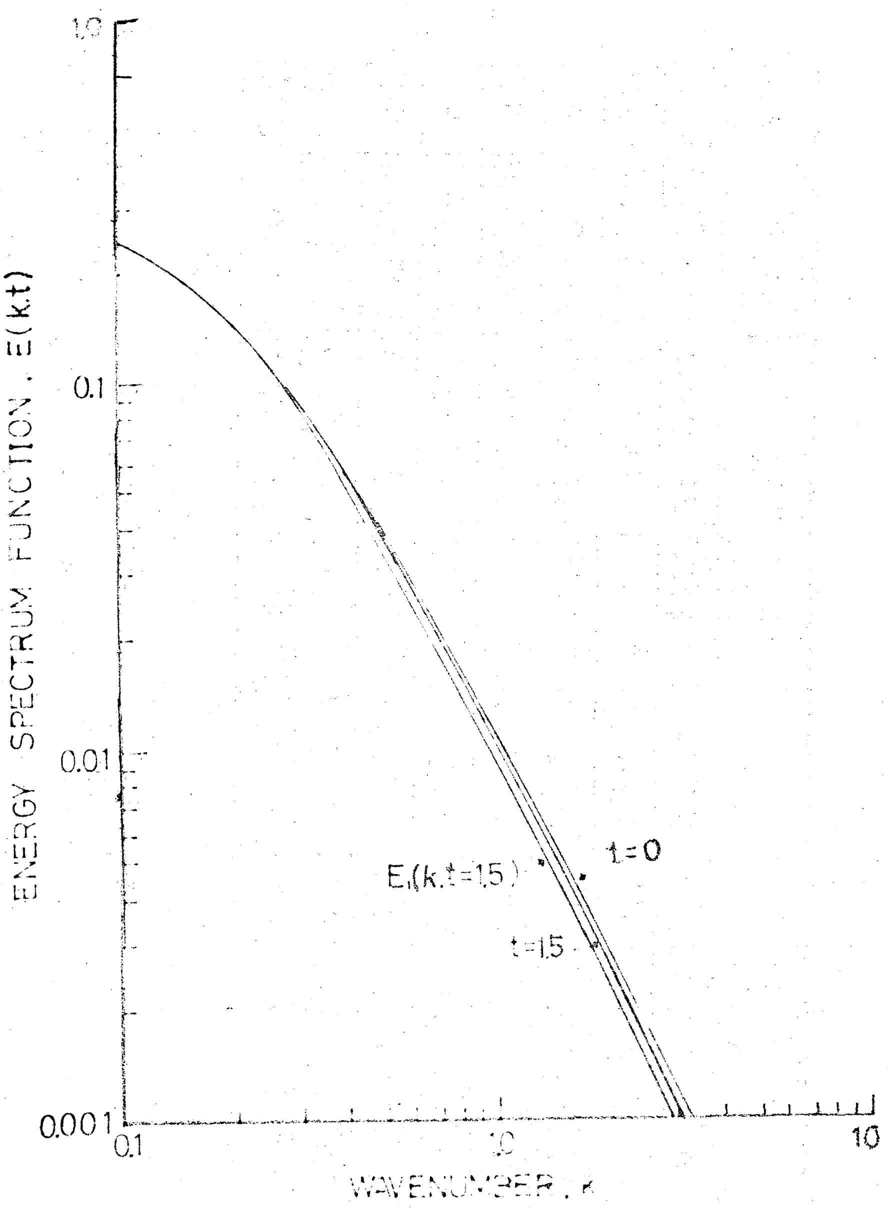

圖 2　初期值 (14) , $\beta = 0.05$

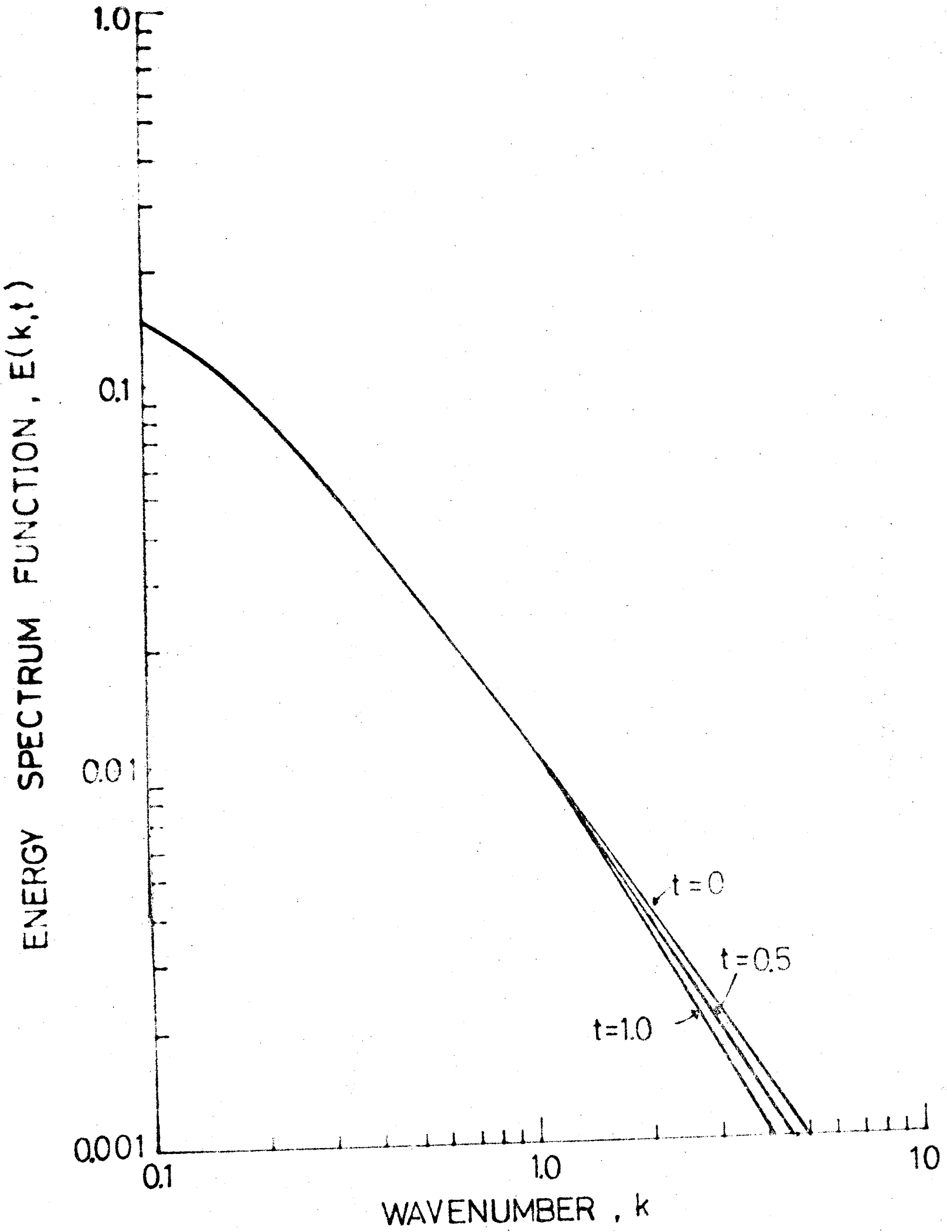

圖 3 初期值 (14), $\beta=\infty$

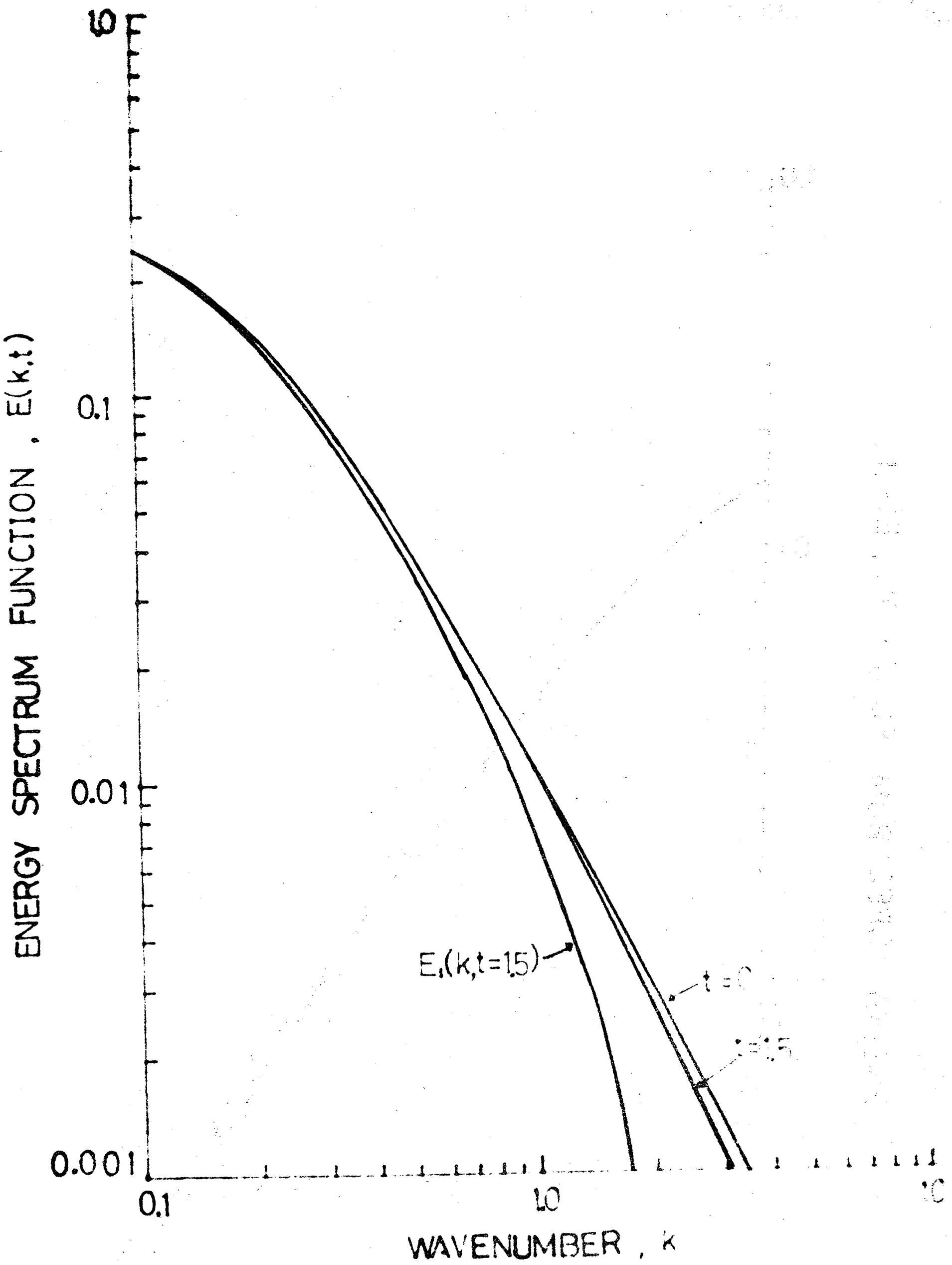

圖 4　初期值 (14)，$\beta=0$，$\beta=\infty$

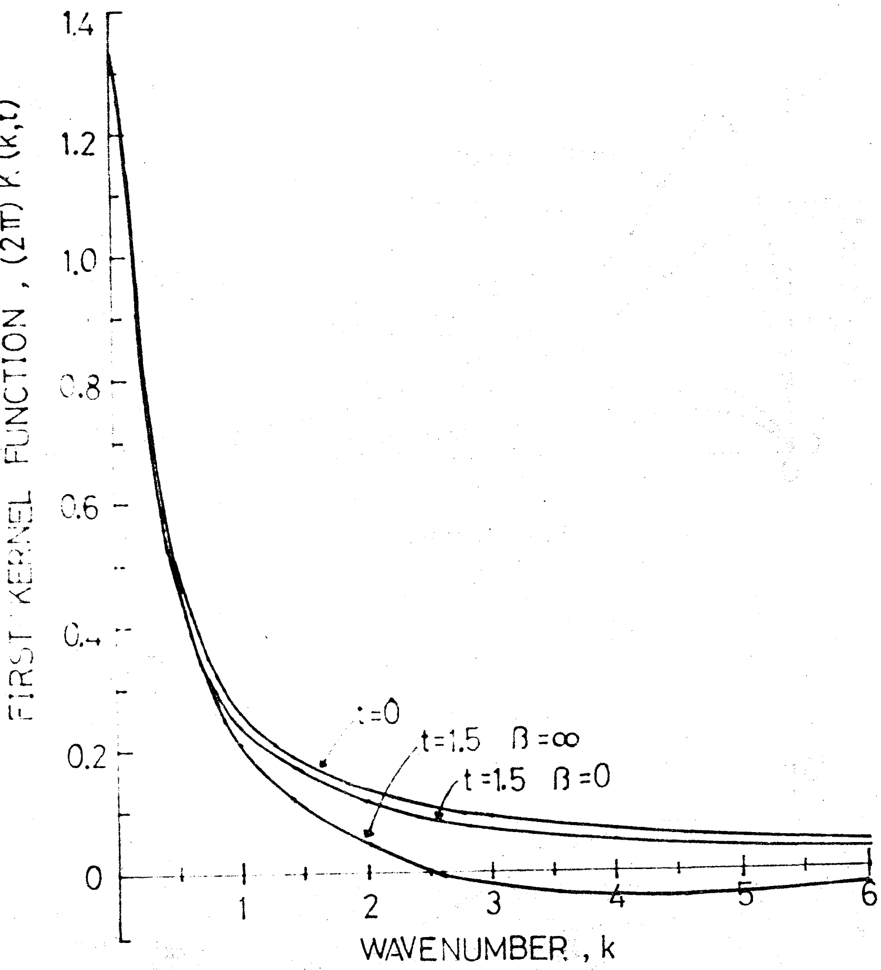

圖5 初期値 (14), $\beta=0$, $\beta=\infty$

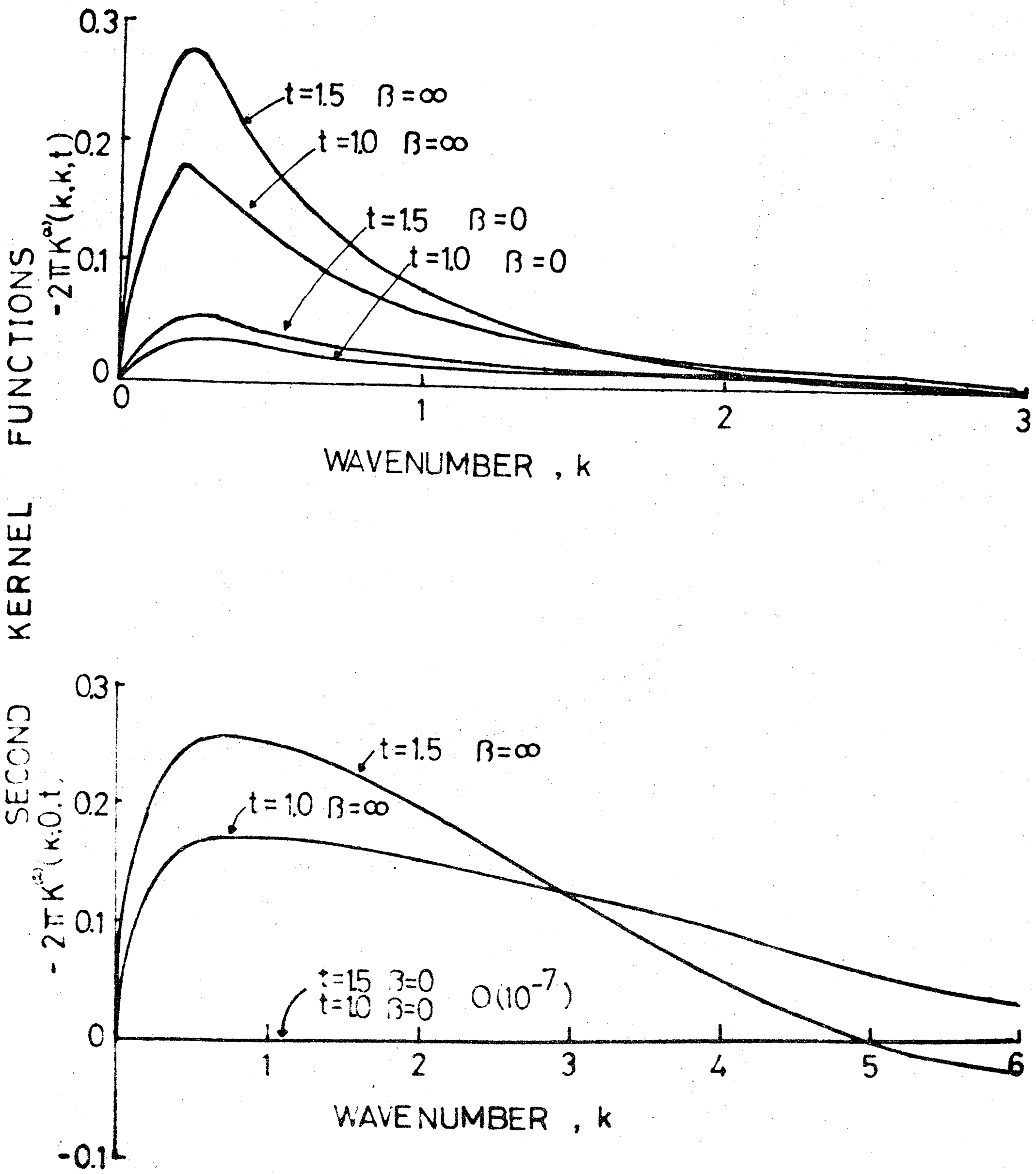

圖 6　初期値 (15), $\beta = 0$

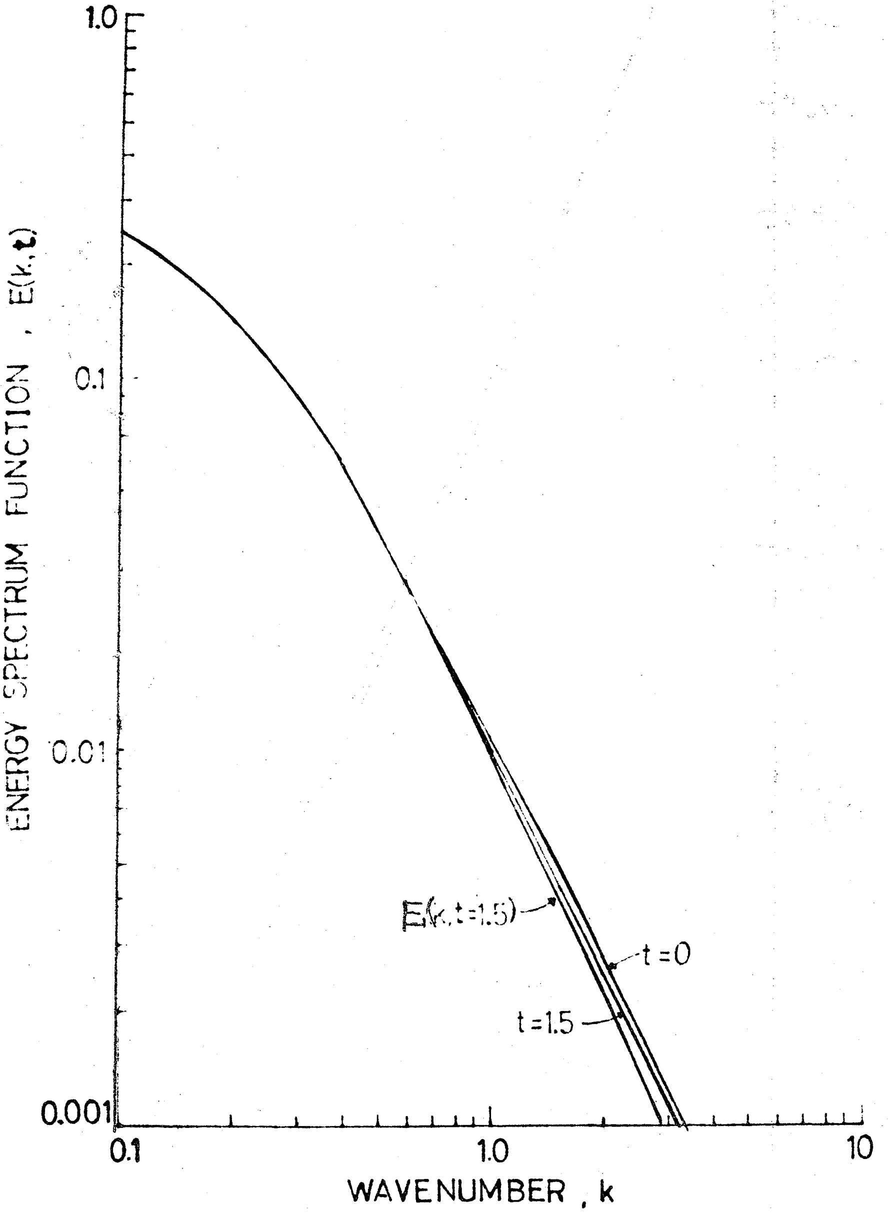

圖7 初期值(16)，$\beta=0$

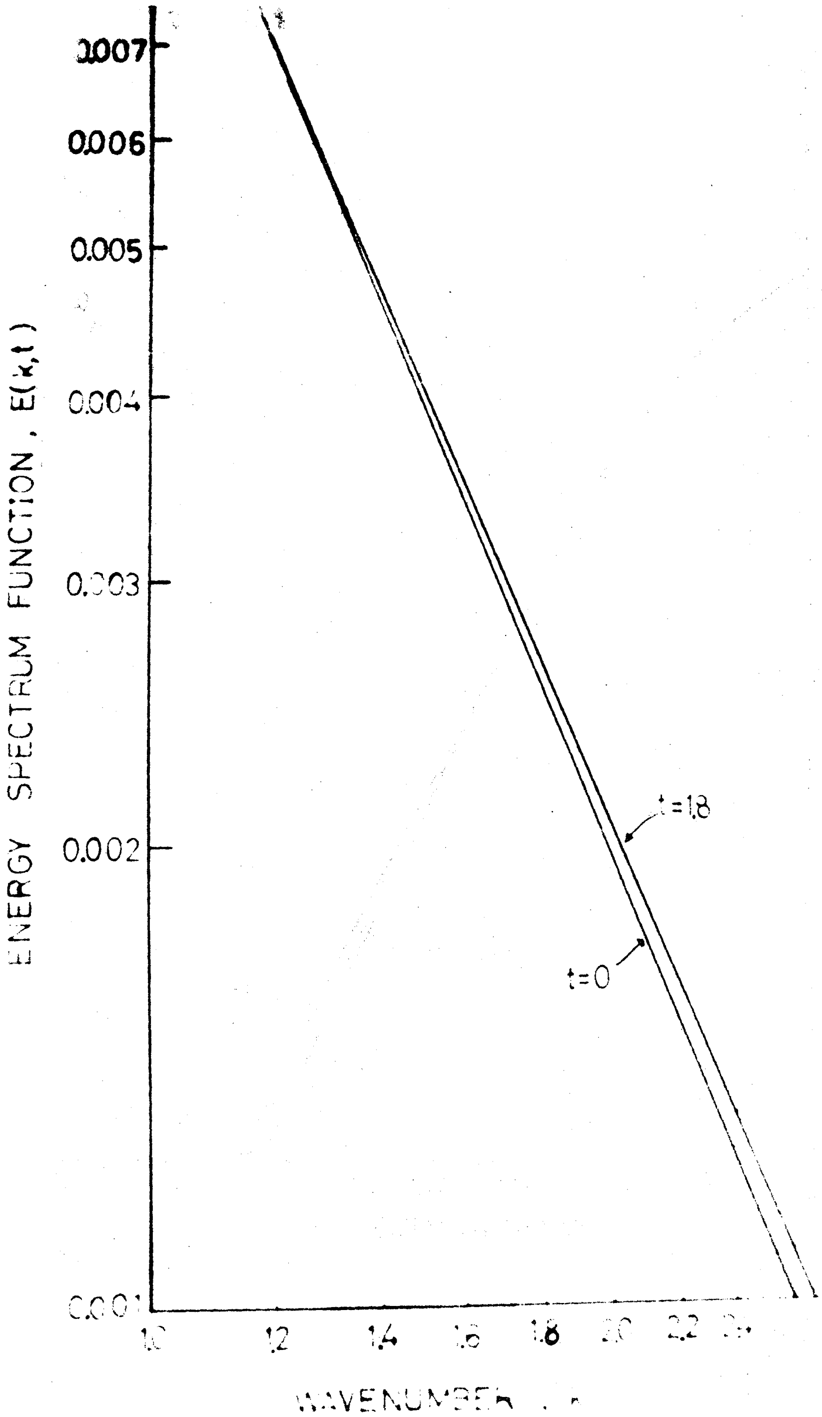

圖8　初期値(14), $\beta=0$