数理解析研究所講究録
第 121 巻 1971 年 1-15

Complex Powers of Non-elliptic Operators

大阪産業大学　長瀬 道弘
大阪府立大学　新開 謙三

§ 1. 序

擬微分作用素（以下，PsDOと略記）の複素巾が symbol の局所的な計算と $S^{-\infty}$ class を modulo class として考えることによって定義されることを示す.

これまでは作用素Aの分数巾について多くの研究がなされているが，これらは

$$(1.1)\qquad A^{\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\zeta^{\alpha}(\zeta-A)^{-1}d\zeta$$

を基礎としている. Aが order m の elliptic な微分作用素の場合には，例えば Burak [1] によって A^{α} が order $m\alpha$ の elliptic な PsDOとなることが示された. Seeley [6] は α が複素数であってAがある斉次性をみたす symbol をもつ elliptic PsDO であるときも同様で

あることを示した．　同時にこれらの論文ではA^αの symbol の漸近展開も与えられている．　これらは（1.1）を定義の基礎としているため，Aの global な性質が要求される．

我々はΨDOの symbol $p(x,\xi)$ に対してのみ条件を与えることによって複素巾を与える symbol $p(z;x,\xi)$ の公式を

$$(2.18)\quad p(z;x,\xi)\sim p(x,\xi)^z+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{2j}\frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}\times p(x,\xi)^{z-k}\,p_{j,k}(x,\xi)$$

なる形で与える．　ここでの symbol についての条件は λ-ellipticity と呼ぶが，これは semi-ellipticity を含むかなり広いものである．　このとき $\{p(z;X,D_x)\}$ は $S^{-\infty}$-class を modulo class として one parameter group になる．　$p_{j,k}$ は z に無関係であって $p(x,\xi)$ のみであらわせる．（公式（2.17））．　したがって適当な z に対して $p(z;X,D_x)$ の核 $K_z(x,x-y)$ が具体的に symbol の逆 Fourier 変換によって計算できる．　したがって核の（x, y）についての連続性及び z についての解析性が直接しらべられる．

§2. 定義と定理

<u>定義 1.</u> 次の条件をみたす実数値 $C^\infty(R^n)$ 関数 $\lambda(\xi)$ を *basic weight function* と呼ぶ.

(2.1) $$1 \leqq \lambda(\xi) \leqq C(1+|\xi|)$$

(2.2) $$|\partial_\xi^\alpha \lambda(\xi)| \leqq C_\alpha \lambda(\xi)^{1-|\alpha|}$$

(Kumano-go [5] 参照)

<u>定義 2.</u> $\lambda(\xi)$ を *basic weight function* とするとき, $p(x,\xi) \in S_\lambda^m$ とは

(2.3) $$|D_x^\alpha \partial_\xi^\beta p(x,\xi)| \leqq C_{\alpha,\beta} \lambda(\xi)^{m-|\beta|}$$

が成立つことを云う.

<u>定義 3.</u> $p(x,\xi) \in S_\lambda^m$ に対して定数 δ と C とがあって

(2.4) $$|p(x,\xi)| \geqq \delta \lambda(\xi)^m \quad \text{for } |\xi| \geqq C$$

が成立つとき $p(x,\xi)$ は λ-*elliptic* であると云う.

今後この稿では $\lambda(\xi)$ は

(2.5) $$\lambda(\xi) \geqq C_0(1+|\xi|)^\rho \qquad (1 \geqq \rho > 0)$$

をみたすものとする. このとき Hörmander [4] と同様に次の補題が成立つ.

<u>補題 1.</u> $p_j(x,\xi) \in S_\lambda^{m_j}$, $j=0,1,2,\cdots$ であって, $m_0 > m_1 > m_2 > \cdots \to -\infty$ のとき $p(x,\xi) \in S_\lambda^{m_0}$ かつ

$$(2.6)\qquad p(x,\xi)-\sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi)\in S_\lambda^{m_{N+1}}$$

となる $p(x,\xi)$ が $S_\lambda^{-\infty}=\bigcap_{-\infty<m<\infty} S_\lambda^m$ を modulo として一意に定まる.

このとき

$$(2.7)\qquad p(x,\xi)\sim\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

と書くことにする.

<u>補題 2.</u> $p_j(x,\xi)\in S_\lambda^{m_j}$ $(j=1,2)$ とするとき

$$(2.8)\qquad \sigma\big(p_1(X,D_x)\,p_2(X,D_x)\big)\sim\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}p_1^{(\alpha)}(x,\xi)\,p_{2(\alpha)}(x,\xi)$$

となる. 記号の説明は下記.

<u>(記号)</u> $p(X,D_x)$ は $p(x,\xi)$ を symbol とする PsDO で

$$p(X,D)\,u(x)=\int e^{ix\xi}p(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,đ\xi$$

$$\hat{u}(\xi)=\int e^{-ix\xi}u(x)\,dx\,,\qquad đ\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$$

$$\sigma(p(X,D_x))=p(x,\xi)\,.$$

$u(x)$ は急減少関数. また $p_1(X,D_x)p_2(X,D_x)$ と書くと operator としての積.

$$p(X,D_x)\equiv q(X,D_x)\qquad \text{あるいは}$$

$$p(x,\xi)\equiv q(x,\xi)$$

と書けば, $p(x,\xi)-q(x,\xi)\in S_\lambda^{-\infty}$ の意味である.

$$p_{(\alpha)}^{(\beta)}(x,\xi)=D_x^\alpha\partial_\xi^\beta p(x,\xi)$$

と書く.

<u>定理 1.</u> $p(x,\xi) \in S_\lambda^m$ は λ-elliptic で

(2.9) $$-\pi < \arg p(x,\xi) < \pi$$

とする．このとき複素数 z をパラメーターとする族 $\{p(z;x,\xi)\}$，$p(z;x,\xi) \in S_\lambda^{m\,\mathrm{Re}\,z}$ で次の

(2.10) $$p(z_1;X,D_x)\,p(z_2;X,D_x) \equiv p(z_1+z_2;X,D_x)$$

(2.11) $$\begin{cases} p(1;X,D_x) \equiv p(X,D_x) \\ p(0;X,D_x) \equiv I \qquad (I \text{ は identity operator}) \end{cases}$$

(2.12) $p(z;x,\xi)$ は z について entire function

(2.13) $$p(z;x,\xi) - p(x,\xi)^z \in S_\lambda^{m\,\mathrm{Re}\,z-1}$$

をみたすものが存在する．

<u>証明.</u> l を正の整数とするとき、補題2を l 回くりかえし用いることによって

(2.14) $$\sigma(\{p(X,D_x)\}^l) = \sigma(\overbrace{p(X,D_x)\cdots p(X,D_x)}^{l}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(l;x,\xi), \quad p_j(l;x,\xi) \in S_\lambda^{ml-j}$$

(2.15) $$\begin{cases} p_0(l;x,\xi) = p(x,\xi)^l \\ p_j(l;x,\xi) = \sum \dfrac{1}{\alpha_2^1!\,\alpha_3^1!\cdots\alpha_l^{l-1}!}\, p^{(\beta_1)}(x,\xi)\, p^{(\beta_2)}_{(\alpha_2^1)}(x,\xi)\, \times \\ \quad \times p^{(\beta_3)}_{(\alpha_3^1+\alpha_3^2)}(x,\xi) \cdots p^{(\beta_{l-1})}_{(\alpha_{l-1}^1+\cdots+\alpha_{l-1}^{l-2})}(x,\xi) \times \\ \quad \times p_{(\alpha_l^1+\cdots+\alpha_l^{l-1})}(x,\xi) \end{cases}$$

となる．ただし(2.15)の右辺の $\sum$ は $(\alpha_2^1, \alpha_3^1, \cdots, \alpha_l^{l-1})$ が

$$|\alpha_2^1+\alpha_3^1+\cdots\alpha_\ell^{\ell-1}|=j$$

をみたすすべてについての和であって,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_2^1+\alpha_3^1+\cdots+\alpha_\ell^1\\ \beta_2 &= \qquad\alpha_3^2+\cdots+\alpha_\ell^2\\ &\cdots\cdots\\ \beta_{\ell-1} &= \qquad\qquad\alpha_\ell^{\ell-1}\end{aligned}$$

である.

ここで(2.15)の右辺の和の各項について、そのℓ個の因数のうちxについてもξについても微分しないものすなわち$|\beta_\nu+\alpha_\nu^1+\cdots+\alpha_\nu^{\nu-1}|=0$ となる因数を丁度$(\ell-k)$個だけ含む項をまとめて$p(x,\xi)^{\ell-k}$でくくると,

(2.16) $$p_j(\ell;x,\xi)=\sum_{k=2}^{2j}\frac{\ell(\ell-1)\cdots(\ell-k+1)}{k!}\,p(x,\xi)^{\ell-k}p_{j,k}(x,\xi)$$

(2.17) $$p_{j,k}(x,\xi)=\sum\frac{1}{\alpha_2^1!\,\alpha_3^1!\cdots\alpha_k^{k-1}!}\,p^{(\beta_1)}(x,\xi)\,p^{(\beta_2)}_{(\alpha_2^1)}(x,\xi)\times$$
$$\times p^{(\beta_3)}_{(\alpha_3^1+\alpha_3^2)}(x,\xi)\cdots p^{(\beta_{k-1})}_{(\alpha_{k-1}^1+\cdots+\alpha_{k-1}^{k-2})}(x,\xi)\,p_{(\alpha_k^1+\cdots+\alpha_k^{k-1})}(x,\xi)$$

となる. ただし

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_2^1+\alpha_3^1+\cdots+\alpha_k^1\\ \beta_2 &= \qquad\alpha_3^2+\cdots+\alpha_k^2\\ &\cdots\cdots\\ \beta_k &= \qquad\qquad\alpha_k^{k-1}\end{aligned}$$

であって，(2.17)の右辺の$\sum$は，

$$|\alpha_2^1+\alpha_3^1+\cdots+\alpha_k^{k-1}|=j$$
$$|\beta_\nu+\alpha_\nu^1+\cdots+\alpha_\nu^{\nu-1}|\neq 0\ ,\quad \nu=2,\cdots,k-1$$
$$|\beta_1|\neq 0\ ,$$
$$|\alpha_k^1+\alpha_k^2+\cdots+\alpha_k^{k-1}|\neq 0$$

をみたすすべての$(\alpha_2^1,\alpha_3^1,\cdots,\alpha_k^{k-1})$についての和である．したがって$p_{j,k}(x,\xi)\in S_\lambda^{mk-j}$で，重要なことは$l$に無関係になることである。

したがって、このことと$p(x,\xi)^z$が定理の条件から自然に定義できることとから、任意の複素数に対して

$$(2.18)\qquad p(z;x,\xi)\sim p(x,\xi)^z+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{2j}\frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}\times$$
$$\times\, p(x,\xi)^{z-k}\,p_{j,k}(x,\xi)$$

として$p(z;X,D_x)$を定義することができる．こうして定義した$\{p(z;x,\xi)\}$が，$p(z;x,\xi)\in S_\lambda^{m\operatorname{Re}z}$となり、定理の$(2.11)$，$(2.12)$，$(2.13)$をみたすことは定義から直接わかる．

(2.10)が成立つことは次の様にしてわかる．l_1，l_2を正の整数とすると$\{p(X,D_x)\}^{l_1}\{p(X,D_x)\}^{l_2}=\{p(X,D_x)\}^{l_1+l_2}$であるから補題2と$(2.14)$とから

$$p_j(l_1+l_2;x,\xi)=\sum_{\substack{j_1+j_2+|\alpha|=j\\ j_1\geqq 0,\ j_2\geqq 0}}\frac{1}{\alpha!}p_{j_1}^{(\alpha)}(l_1;x,\xi)p_{j_2(\alpha)}(l_2;x,\xi) \tag{2.19}$$

を得る．（2.16）と，$p_{j,k}$ が l に無関係であることとから（2.19）の両辺を $p(x,\xi)^{l_1+l_2}$ で割ると l_1 と l_2 についての多項式についての恒等式を得る．そしてこの多項式についての関係式から逆に

$$p(l_1+l_2;X,D_x)\equiv p(l_1;X,D_x)p(l_2;X,D_x)$$

が得られるから，l_1，l_2 の代りに z_1，z_2（任意の複素数）を代入しても同じ関係式が成立つ．よって（2.10）が示される．

（証明終り）

この定理の定める *one parameter group* $\{p(z;X,D_x)\}$ を $p(X,D_x)$ の複素巾とよぶのは自然であろう．次にこの様な *one parameter group* の一意性について述べる．まず z が有理数である場合については主部を決めると低次が必然的に決まるという次の補題が成立つ．これは熊ノ郷氏によるが，$p(z;X,D_x)$ の核の形を決める意味からも重要である．

補題 3．$p(x,\xi)$ を定理1のものとし，これに対して $\{p^{(1)}(z;X,D_x)\}$，$\{p^{(2)}(z;X,D_x)\}$ が共に（2.10）～（2.13）をみたすとする．このとき任意の正の有理数 r に対して

$$p^{(1)}(r;x,\xi)\equiv p^{(2)}(r;x,\xi) \tag{2.20}$$

が成立つ．

証明.

$$p^{(2)}(r;x,\xi)=p^{(1)}(r;x,\xi)+q(r;x,\xi)$$

とおくと(2.13)によって $q(r;x,\xi)\in S_\lambda^{mr-1}$ である.

いま、νを任意の正整数として $q(r;x,\xi)\in S_\lambda^{mr-\nu}$ となるとすれば $q(r;x,\xi)\in S_\lambda^{mr-(\nu+1)}$ が成立つ. 実際, $r=k/l$ とすると

$$\begin{aligned}0&\equiv\{p^{(2)}(k/l;X,D_x)\}^l-\{p^{(1)}(k/l;X,D_x)\}^l\\&=\{p^{(1)}(k/l;X,D_x)+q(k/l;X,D_x)\}^l-\{p^{(1)}(k/l;X,D_x)\}^l\\&=\sum_{j=1}^{l}\{p^{(1)}(k/l;X,D_x)\}^{l-j}q(k/l;X,D_x)\{p^{(1)}(k/l;X,D_x)\}^{j-1}\\&\qquad+q'(k/l,l;X,D_x)\end{aligned}$$

$$q'(k/l,l;x,\xi)\in S_\lambda^{km-2\nu}$$

となる. したがって $q(k/l;x,\xi)\in S_\lambda^{km/l-(\nu+1)}$ となる.

(証明終り)

zを任意の複素数とするときには、この補題を用いて次の定理を得る.

定理 2. $p(x,\xi)$を定理1のものとし

(2.21) $$p^{(i)}(z;x,\xi)\sim p(x,\xi)^z+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N_j^{(i)}}C_{j,k}^{(i)}(z)\,p(x,\xi)^z\,p_{j,k}^{(i)}(x,\xi)$$

$$p_{j,k}^{(i)}(x,\xi)\in S_\lambda^{-j}\qquad(i=1,2)$$

が共に(2.10)〜(2.13)をみたすとすると,

(2.22) $$p^{(1)}(z;x,\xi)\equiv p^{(2)}(z;x,\xi)$$

<u>証明.</u>　補題3によってzが正の有理数の場合には(2.22)は成立つ．　すなわち任意のNに対して

$$\sum_{j=1}^{N}\left\{\sum_{k=1}^{N_j^{(1)}} C_{j,k}^{(1)}(z)\, p_{j,k}^{(1)}(x,\xi) - \sum_{k=1}^{N_j^{(2)}} C_{j,k}^{(2)}(z)\, p_{j,k}^{(2)}(x,\xi)\right\} \in S_\lambda^{-N-1} \tag{2.23}$$

がzを正有理数として成立つ．　これが任意の複素数zに対しても成立つことを示す．　まず，$N=1$の場合は，$C_{1,k}(z)$ $k=1,\cdots,M$ を1次独立な適当な解析関数として

$$\sum_{k=1}^{N_1^{(1)}} C_{1,k}^{(1)}(z)\, p_{1,k}^{(1)}(x,\xi) - \sum_{k=1}^{N_1^{(2)}} C_{1,k}^{(2)}(z)\, p_{1,k}^{(2)}(x,\xi) = \sum_{k=1}^{M} C_{1,k}(z)\, q_{1,k}(x,\xi)$$

とかける．　そして正の有理数r_j，$(j=1,\cdots,M)$で，$(C_{1,1}(r_j),\cdots\cdots C_{1,M}(r_j))$　$(j=1,\cdots,M)$がM-vectorとして1次独立となるものが存在する．　もちろんこのr_jに対しては

$$\sum_{k=1}^{M} C_{1,k}(r_j)\, q_{1,k}(x,\xi) \in S_\lambda^{-2}$$

であるから，このことから$q_{1,k}(x,\xi)$がS_λ^{-2}に入るsymbolの1次結合であらわされることがわかる．　したがって任意の複素数zに対して

$$\sum_{k=1}^{M} C_{1,k}(z)\, q_{1,k}(x,\xi) \in S_\lambda^{-2}$$

となる．　すなわち$N=1$のときに(2.23)が示された．以下帰納的に(2.23)が示される．　　　　（証明終り）

注 1. 定理 1 の $p(x,\xi)$ に対する仮定は, $|\xi| \geqq C$ において $p(x,\xi)^z$ が自然に定義できるものでさえあれば良い。したがって例えば, $\delta > 0$ と θ とがあって $|p(x,\xi)| \geqq \delta \lambda(\xi)^m$, $\arg p(x,\xi) \neq \theta$ が $|\xi| \geqq C$ に対して成立てばよい.

注 2. $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, $0 \leqq \delta < \rho$ を Hörmander [4] のものとするとき, $p(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ に対しても定理 1 と同様の仮定で同様の結果が得られる.

注 3. system の場合には symbol の積の可換性がないので我々の方法は適用できないが, この場合にも Hayakawa-Kumano-go [3] によって, やはり symbol から複素巾が定義されている.

注 4. $p(x,\xi)$ が ξ について多項式であって $z = l$ が正整数の場合には (2.18) の右辺は有限和となり $\sigma(\{p(x,D)\}^l)$ と全く一致する.

§3. 例

いままでには取りあつかわれていなかった放物型微分作用素の複素巾も我々の方法によると定義できる. さらにその核の形も逆 Fourier 変換によって計算できる. 以下に例として放物型微分作用素 $p(t,x,D_t,D_x)$ の symbol を

(3.1) $$p(t,x,\tau,\xi) = i\tau + \sum_{|\alpha|\leqq m} a_\alpha(t,x)\xi^\alpha$$

(3.2) $$\mathrm{Re}\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(t,x)\xi^\alpha \geqq \delta|\xi|^m$$

であるものとしてその複素巾の核を求める．　いま basic weight function を

(3.3) $$\lambda(\tau,\xi) = (1+\tau^2+|\xi|^{2m})^{\frac{1}{2m}}$$

とすれば，$p(t,x,\tau,\xi)$ は定理1の仮定をみたすから，公式（2.18）によって複素巾の symbol が

(3.4) $$p(z;t,x,\tau,\xi) \sim p(t,x,\tau,\xi)^z + \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{2j} \frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!} \times$$
$$\times p(t,x,\tau,\xi)^{z-k}\, p_{j,k}(t,x,\tau,\xi)$$

とあらわせる．　公式（2.17）によると，$p_{j,k}(t,x,\tau,\xi)$ の各項は $p(t,x,\tau,\xi)$ を少くとも1回以上微分したものの積であるから τ に無関係となる．　したがって，以下は

$$p_{j,k}(t,x,\xi) = p_{j,k}(t,x,\tau,\xi)$$

と書くことにする．　さらに公式（2.17）から，$p_{j,k}(t,x,\xi)$ が ξ について高々（$mk-j$）次の多項式であって，$mk-j < m$ であれば消えることもわかる．

$p(z;t,x,D_t,D_x)$ の核 $K(z;t,x,\sigma,\eta)$ を

$$p(z;t,x,D_t,D_x)\,u(t,x) = \iint K(z;t,x,t-s,x-y)\,u(s,y)\,ds\,dy$$

となるものとして求める．　ゲリファンド＝シーロフ［7］によると

$$(3.5)\qquad \int e^{i\tau\sigma}(\tau-ia)^{z}\,đ\tau = i^{-z}\frac{\sigma_+^{-z-1}}{\Gamma(-z)}e^{-a\sigma},\quad a>0$$

$$(3.6)\qquad \int e^{i\tau\sigma}(\tau-i0)^{z}\,đ\tau = i^{-z}\frac{\sigma_+^{-z-1}}{\Gamma(-z)}$$

である．　ただし　$đ\tau=(2\pi)^{-1}d\tau$,　$đ\xi=(2\pi)^{-n}d\xi$,

$$(\tau-i0)^{z}=\begin{cases}\tau^{z}, & \tau>0\\ e^{-i\pi z}|\tau|^{z}, & \tau<0,\end{cases}\qquad \sigma_+^{\lambda}=\begin{cases}\sigma^{\lambda}, & \sigma>0\\ 0 & \sigma<0\end{cases}$$

$$\left.\frac{\sigma_+^{-z-1}}{\Gamma(-z)}\right|_{z=n}=\delta^{(n)}(\sigma)$$　; Dirac の δ-関数の第 n 次導関数．

である．　これらの公式によって

$$(3.7)\qquad \begin{aligned}&\iint e^{i\tau\sigma+i\xi\eta}\,p(t,x,\tau,\xi)^{z-k}\,p_{j,k}(t,x,\xi)\,đ\tau\,đ\xi\\ &=\frac{\sigma_+^{k-z-1}}{\Gamma(k-z)}\,p_{j,k}(t,x,D_\eta)\int e^{i\xi\eta}\,e^{-\sigma\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(t,x)\xi^\alpha}\,đ\xi\end{aligned}$$

となる．　ここで右辺の積分を

$$(3.8)\qquad Z(t,x,\sigma,\eta)=\int e^{i\xi\eta}\,e^{-\sigma\sum_{|\alpha|\leq m}a_\alpha(t,x)\xi^\alpha}\,đ\xi$$

とおく．　これはいわゆる parametrix で，　たとえば，Friedman [2] によると　$\sigma>0$　のとき

$$(3.9)\qquad \left|D_\eta^\alpha Z(t,x,\sigma,\eta)\right|\leq C_\alpha\,\sigma^{-\frac{n+|\alpha|}{m}}\exp\left\{-c_\alpha\left(\frac{|\eta|^m}{\sigma}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right\}$$

なる評価式が成立つ. したがって

$$K(z;t,x,\sigma,\eta) \sim \frac{\sigma_+^{-z-1}}{\Gamma(-z)} Z(t,x,\sigma,\eta) +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=2}^{2j}\frac{z(z-1)\cdots(z-k+1)}{k!}\cdot\frac{\sigma_+^{k-z-1}}{\Gamma(k-z)} p_{j,k}(t,x,D_\eta) Z(t,x,\sigma,\eta)$$

を得る. 右辺の support は $\sigma \geqq 0$ となる所に含まれる.

文献表

[1] J. Burak: Fractional powers of elliptic differential operators. Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa, 22, 113–132 (1968).

[2] A. Friedman: Partial differential equations of parabolic type, Prentic-hall (1964)

[3] K. Hayakawa and H. Kumano-go: Complex powers of a system of pseudo-differential operators. (to appear)

[4] L. Hörmander: Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations. Amer. Math. Soc., Proc. Symposium on Singular Integrals. 10, 138–183 (1967).

[5] H. Kumano-go: Pseudo-differential operators and the uniqueness of Cauchy problem. Comm. Pure Appl. Math., 22, 73–129 (1969).

[6] R.T. Seeley: Complex powers of an elliptic operator. Amer. Math. Soc., Proc. Symposium on Singular Integrals. 10, 288–307 (1967).

[7] ゲリファンド＝シーロフ（功力金二郎 他訳）超関数論入門I. 共立出版（1963）.