数理解析研究所講究録
第121巻 1971年 101-116

縮退した放物型方程式について

名大・理　松沢忠人

§1. 序.

Λ は Hilbert 空間 Y で稠密な定義域 $D(\Lambda)$ をもつ自己共役，正値な作用素とする。この時 α を $\alpha > -1/2$ なる実数として次のような形の発展方程式に対する初期値問題の解の存在と一意性について考える。(定理2.1―2.3)。

$$(1.1)\qquad u_t + t^\alpha \Lambda u = f \quad \text{in }]0,\infty[\,, \quad f \in L^2(0,\infty;Y),$$

$$(1.2)\qquad u_t + |t|^\alpha \Lambda u = f \quad \text{in }]-T,\infty[\,, \quad f \in L^2(-T,\infty;Y).$$

L^2－理論を行う場合，端点における係数の singularity (degeneracy) に応じた初期条件を与える必要がある。初期条件の class として，方程式(1.1)に対しては $D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$ を，(1.2)(この場合端点に係数の singularity なし)に対しては $D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$ ととることが適当である。$\alpha > \frac{-1}{2}$ のとき $0 < \frac{1}{2(\alpha+1)} < 1$ であり補間空間の記号では

(1.3) $$D\left(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}}\right) = [D(\Lambda), Y]_{\frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)}}$$

なることに注意しよう。

Λ に関する 対角化 を用いると、問題は (1.1), (1.2) に対応する常微分方程式に関する問題に帰着される。(補題 2.2 — 2.3)。又、上記の初期値問題は $\Lambda = \Lambda(t)$ が変数 t に連続的に従属する場合にも考えることができる。但しその場合には有限区間で考えることとする。(定理 3.1 — 3.2)。

次に、以上の結果の応用について述べる。§4 で次のような形の放物型方程式に対する初期値境界値問題の解の(然るべき関数空間での)存在と一意性について述べる。

(1.4) $$u_t + (-1)^m t^\alpha \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu,\nu}(x,t) D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} \sum_{|\gamma|=j} b_\gamma(x,t) D_x^\gamma u + (x,t)u = f,$$

$$\alpha > -\frac{1}{2},\quad \beta_j > \max\left(\frac{j(\alpha+1)}{2m} - 1, \frac{-1}{2}\right),\quad j = 0, 1, \ldots, 2m-1.$$

ここで $\beta_j < \frac{j(\alpha+1)}{2m} - 1$ とすると一般に問題が well posed でなくなることが implicitely に分るのであるが §5 に於て次の方程式 (1.5) に対する Cauchy 問題は Hadamard の意味で Well posed でないことを示す。

(1.5) $$u_t - t^\alpha u_{xx} + i t^\beta u_x = 0,\quad -\infty < x < \infty,\quad t > 0;\quad -1 < \beta < \frac{\alpha-1}{2}.$$

最後に§6で係数が縮退した放物型方程式に対する Hypoellipticity, Gevrey class property に関する注意を与える。

§2. 方程式 $u_t + |t|^\alpha \Lambda u = f \quad (\alpha > \frac{1}{2})$.

主として[6]の記号を用いる。 Y はある Hilbert 空間/$\mathbb{C}$, $L^2(T_1, T_2; Y)$ は区間 $]T_1, T_2[$ $(T_1 < T_2)$ で定義された Y に値をとる L^2-可積分な関数 f (の class) の全体で、ノルム $\|f\|_{L^2(T_1,T_2;Y)} = \left(\int_{T_1}^{T_2} \|f(t)\|_Y^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$ に関して Hilbert 空間をなす。 $H^1(T_1, T_2; Y)$ は f, $f_t = df/dt \in L^2(T_1, T_2; Y)$ なる関数 f の全体でノルム

$$\|f\|_{H^1(T_1,T_2;Y)} = \left\{ \|f\|^2_{L^2(T_1,T_2;Y)} + \|f_t\|^2_{L^2(T_1,T_2;Y)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

に関して Hilbert 空間をなす。

次に Λ は Y で稠密な定義域をもつ自己共役,正値な作用素とする。 Λ^θ $(\theta \geqq 0)$ の定義域 $D(\Lambda^\theta)$ はノルム

$$\|v\|_{D(\Lambda^\theta)} = \left\{ \|v\|_Y^2 + \|\Lambda^\theta v\|_Y^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

に関して Hilbert 空間である。

さて,実数 α, θ, $\alpha > \frac{1}{2}$, $\theta \geqq 0$, に対して次のような Hilbert 空間を導入する。

$$W^1(T_1,T_2;\alpha,\theta)=\{u\,;\,u\in H^1(T_1,T_2;Y),\ |t|^\alpha\Lambda^\theta u\in L^2(T_1,T_2;Y)\}.$$

そのノルムは

$$\|u\|_{W^1(T_1,T_2;\alpha,\theta)}=\{\|u\|^2_{H^1(T_1,T_2;Y)}+\||t|^\alpha\Lambda^\theta u\|^2_{L^2(T_1,T_2;Y)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

以下 $\alpha>\frac{1}{2}$ として、次の3つの定理を得る。

定理2.1. 任意の $f\in L^2(0,\infty;Y)$, $u_0\in D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$ に対して、初期値問題：

(2.1) $\qquad Lu=u_t+t^\alpha\Lambda u=f \quad \text{in }]0,\infty[,$

(2.2) $\qquad u(0)=u_0$

は一意的な解 $u\in W^1(0,\infty;\alpha,1)$ をもつ。更に、f, u_0 に無関係な定数 C が存在して次の評価式がなり立つ。

(2.3) $\qquad \|u\|_{W^1(0,\infty;\alpha,1)}\leqq C^{1)}(\|f\|_{L^2(0,\infty;Y)}+\|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})}).$

定理2.2. 任意の $f\in L^2(-T,0;Y)$ $(T>0)$, $u_0\in D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$ に対して、初期値問題：

(2.4) $\qquad Lu=u_t+|t|^\alpha\Lambda u=f \quad \text{in }]-T,0[,$

(2.5) $\qquad u(-T)=u_0$

は一意的な解 $u\in W^1(-T,0;\alpha,1)$ をもつ。

---

1) 以下同じ文字 C で相異る定数を表わすものとしよう。

更に次の評価式が成り立つ。

(2.6) $$\|u\|_{W^1(-T,0;\alpha,1)} \leqq C\left(\|f\|_{L^2(-T,0;X)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2}})}\right).$$

定理2.1, 2.2の結果として次の定理を得る。

<u>定理</u>2.3. 任意の $f \in L^2(-T,\infty;X)$ $(T>0)$, $u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$ に対して初期値問題：

(2.7) $$Lu = u_t + |t|^\alpha \Lambda u = f \quad \text{in }]-T,\infty[,$$

(2.8) $$u(-T) = u_0。$$

の一意的な解 $u \in W^1(-T,\infty;\alpha,1)$ が存在し次の評価式が成り立つ。

(2.9) $$\|u\|_{W^1(-T,\infty;\alpha,1)} \leqq C\left(\|f\|_{L^2(-T,\infty;X)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2}})}\right).$$

これらの定理の証明のために以下で補題を準備する。

<u>補題</u> 2.1. (一意性). 上記3つの定理の解は対応する各空間で一意的である。

(証明).

$u \in W^1(-T,\infty;\alpha,1)$ が $f=0$, $u_0=0$ に対して(2.7), (2.8)を満すとする。 $t>-T$ なる t に対して.

$$\int_{-T}^{t}(u_t(\tau), u(\tau))_Y\, d\tau + \int_{-T}^{t}(|\tau|^\alpha \Lambda u(\tau), u(\tau))_Y\, d\tau = 0.$$

これから

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_Y^2 + \int_{-T}^{t}(|\tau|^\alpha \Lambda u(\tau), u(\tau))_Y\, d\tau = 0$$

が従い，Λが自己共役，正値なことから $u \equiv 0$ でなければならない。他の場合も同様である。 Q.E.D.

次に常微分方程式

(2.10) $\quad dv/dt + \lambda t^\alpha v = f(t) \quad \text{in }]0, \infty[$

を考える。ここで $f(t) \in L^2(0,\infty)$ とし，λは正のパラメータとする。

補題 2.2. $\lambda > 0$ に対して次のような性質をもった線型作用素 $G_\lambda : L^2(0,\infty) \longrightarrow H^1(0,\infty)$ が存在する。

(1) 任意の $f \in L^2(0,\infty)$ に対して $G_\lambda f = v(t)$ は (2.10) の解.

(2) $f \in L^2(0,\infty)$，$\lambda > 0$ に無関係な定数 C が存在して

(2.11) $\quad \|v\|_{H^1(0,\infty)} + \lambda\|t^\alpha v\|_{L^2(0,\infty)} \leqq C\|f\|_{L^2(0,\infty)}.$

（証明） Vishik - Grushin [9] の方法によって証明する。

(i) まず問題は $\lambda = 1$ の場合に帰着されることを示そう。$v(t)$ を (2.10) の1つの解とすると $u(t) = v(\lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} t)$ は方程式

$$u'(t) + t^{\alpha} u(t) = \lambda^{\frac{1}{\alpha+1}} f(\lambda^{\frac{-1}{\alpha+1}} t)$$

を満すことから $\lambda=1$ の場合に帰着されることが分る。

(ii) $\lambda=1$ の場合. $t^{\alpha+1}=\tau$, $t_0^{\alpha+1}=\tau_0$ ($t_0>0$ は後できめる)とおき $f_1(\tau)=(\alpha+1)^{-1}t^{\frac{\alpha}{2}}f(t)$ とおけば

$$\frac{-1}{(\alpha+1)}\int_{t_0}^{\infty}|f(t)|^2\,dt = \int_{\tau_0}^{\infty}|f_1(\tau)|^2\,d\tau .$$

更に $v(t)$ を (2.10) ($\lambda=1$) の1つの解として. $w(\tau)=t^{\frac{\alpha}{2}}v(t)$ とおけば $w(\tau)$ は方程式

(2.12) $$w_\tau + \frac{1}{\alpha+1}w + \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}\frac{1}{\tau}w = f_1(\tau) \quad \text{in }]\tau_0,\infty[$$

を満す。

そこで $f\in L^2(\tau_0,\infty)$ に対して初期値問題:

(2.13) $$L_1 w = w_\tau + \frac{1}{\alpha+1}w = f \quad \text{in }]\tau_0,\infty[$$

(2.14) $$w(\tau_0)=0$$

を考えると,この解は $w(\tau)=\int_{\tau_0}^{\tau}e^{\frac{-(\tau-\sigma)}{\alpha+1}}f(\sigma)\,d\sigma$ で一意的に与えられる。

この対応 $f\longrightarrow w$: $L^2(\tau_0,\infty)\longrightarrow H^1(\tau_0,\infty)$ を L_1^{-1} とかけば明らかにある定数 C^* が存在して

(2.15) $$\|L_1^{-1}f\|_{H^1(\tau_0,\infty)} \leqq C^*\|f\|_{L^2(\tau_0,\infty)} .$$

ここで C^* は, $w(\tau)$ の表示から, τ_0 に無関係にとれることに注意する。

次に方程式(2.12), 初期条件(2.14)に関する初期値問題は次の方程式の解 $w \in \mathring{H}^1(\tau_0, \infty)$ を求めることと同値である:

$$w + L_1^{-1} L_2 w = L_1^{-1} f_1, \quad f_1 \in L^2(\tau_0, \infty),$$

ここで $L_2 w = \alpha/2(\alpha+1) \cdot 1/\tau \; w$ とした。

τ_0 を充分大にとって $\alpha/2(\alpha+1) \cdot 1/\tau_0 < \frac{1}{2C^*}$ となるようにすれば $\|L_1^{-1} L_2\|_{\mathring{H}^1(\tau_0,\infty)} \leqq 1/2$ だからこの問題の解は

(2.16) $\quad w = \lim_{n\to\infty} w_n \quad (\text{in } \mathring{H}^1(\tau_0, \infty))$

$$w_1 = L_1^{-1} f_1, \quad w_n = -L_1^{-1} L_2 w_{n-1} + L_1^{-1} f_1, \quad n \geqq 2$$

で与えられ次の評価式が成り立つ。

(2.17) $\quad \|w\|_{H^1(\tau_0,\infty)} \leqq 2C^* \|f_1\|_{L^2(\tau_0,\infty)}.$

これから, $v(t) = t^{\frac{\alpha}{2}} w(\tau)$, $t_0 = \tau_0^{\frac{1}{\alpha+1}}$ とおけば

(2.18) $\quad \|v\|_{H^1(t_0,\infty)} + \|t^\alpha v\|_{L^2(t_0,\infty)} \leqq C_1 \|f\|_{L^2(t_0,\infty)}$

なる不等式を得る。

上の解 $v(t)$ は (2.10) $(\lambda=1)$ の解として全半区間 $]0,\infty[$ に拡張され次の不等式が成り立つことが容易に分る:

(2.19) $\quad \int_0^{t_0} |v(t)|^2 dt + \int_0^t |v_t(t)|^2 dt \leqq C_2 \left(\int_0^{2t_0} |f(t)|^2 dt + \int_{t_0}^{2t_0} |v(t)|^2 dt \right).$

従って (2.18), (2.19) から $\lambda=1$ の場合を得る。Q.E.D.

次に方程式

(2.20) $Lu = u_t + \lambda |t|^\alpha u = f(t)$ in $]-T, 0[$ $(T>0)$

を考える。ここで $f \in L^2(-T,0)$，λ は >0 なるパラメータである。

補題 2.3. $\lambda>0$ に対して次のような性質をもった作用素 $G'_\lambda : L^2(-T,0) \longrightarrow H^1(-T,0)$ が存在する。

(1) 任意の $f \in L^2(-T,0)$ に対して $G_\lambda f = v(t)$ は (2.20) の解.

(2) $f \in L^2(-T,0)$，$\lambda>0$ に無関係な定数 C が存在して

(2.21) $\|v\|_{H^1(-T,0)} + \lambda \||t|^\alpha v\|_{L^2(-T,0)} \leqq C\|f\|_{L^2(-T,0)}$.

(証明は補題 2.2 のとほぼ同様であるが省略する。).

補題 2.4. (cf. Théorème I. 2, [1]). $-\frac{1}{2} < \beta \leqq \alpha$ なる任意の実数 α, β に対して次の代数的,位相的な包含関係が成立つ。

(2.22) $W^1(T_1, T_2; \alpha, s) \subset W^1(T_1, T_2; \beta, s\cdot\frac{\beta+1}{\alpha+1})$

$(T_1 \leqq 0 < T_2;\ s \geqq 0)$

又 (2.22) に於て $\beta=0$ の場合から連続写像 $u \longrightarrow u(0)$: $W^1(T_1, T_2; \alpha, s) \longrightarrow D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$ を得る。

(定理 2.1 の証明). Λ の対角化 (cf. [2]) によって，補題 2.2 から直ちに次のような性質をもった作用素 $G: L^2(0,\infty; \mathcal{H}) \longrightarrow W^1(0,\infty; \alpha, 1)$ の存在が分る:

(1) 任意の $f \in L^2(0,\infty;\mathcal{H})$ に対して関数 $Gf = u(t)$ は方程式 (2.1) の解である。

(2) $f\in L^2(0,\infty;Y)$ に無関係な定数 C が存在して次の評価式が成り立つ。

(2.23) $\|u\|_{W^1(0,\infty;\alpha,1)} \leqq C\|f\|_{L^2(0,\infty;Y)}$.

一方，初期値問題：

(2.24) $Lu = u_t + t^\alpha \Lambda u = 0 \quad \text{in }]0,\infty[$,

(2.25) $u(0) = u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$

の解（$\in W^1(0,\infty;\alpha,1)$）は

(2.26) $u(t) = \exp(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Lambda)\cdot u_0$

で与えられ評価式(2.3)が成り立つことが容易に証明できる。従って任意の $f\in L^2(0,\infty;Y)$, $u_0\in D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$ に対する問題(2.1), (2,2)の解は

(2.27) $u = Gf + \exp(\frac{-t^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Lambda)(u_0 - Gf(0))$

で与えられる。又評価式(2.3)が成り立つことも補題2.4などから容易に分る。 Q.E.D.

(定理2.2の証明は補題2.3などを用いることにより定理2.1の場合と殆んど同様にして得られる。)

(定理2.3は定理2.1, 2.2から従う。)

§3. 方程式 $u_t + |t|^\alpha \Lambda(t)u = f$.

$\Lambda(t)$ は各 $t\in[-T,T]$ $(T>0)$ に対して Y で稠密な定

義域を有する自己共役，正値な作用素でその定義域 $D(\Lambda(t))$ $\equiv X$ は t に無関係とし，更に対応 $t \longrightarrow \Lambda(t) : [-T, T] \longrightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ は連続とする。ここで $\mathcal{L}(X, Y)$ は X から Y への有界線型作用素のなす空間である。$\Lambda = \Lambda(0)$ とおこう。

以上の仮定のもとに，

定理3.1. 任意の $f \in L^2(0, T; Y)$, $u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})$ に対して初期値問題:

(3.1) $Lu = u_t + t^\alpha \Lambda(t) u = f \quad \text{in }]0, T[,$

(3.2) $u(0) = u_0$

は一意的な解 $u \in W^1(0, T; \alpha, 1)$ をもち次のような評価式が成り立つ。

(3.3) $\|u\|_{W^1(0,T;\alpha,1)} \leqq C\left(\|f\|_{L^2(0,T;Y)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2(\alpha+1)}})}\right).$

定理3.2. 任意の $f \in L^2(-T, T; Y)$, $u_0 \in D(\Lambda^{\frac{1}{2}})$ に対して初期値問題:

(3.4) $Lu = u_t + |t|^\alpha \Lambda(t) u = f \quad \text{in }]-T, T[,$

(3.5) $u(-T) = u_0$

は一意的な解 $u \in W^1(-T, T; \alpha, 1)$ をもち次の形の評価式が成り立つ。

(3.6) $\|u\|_{W^1(-T,T;\alpha,1)} \leqq C\left(\|f\|_{L^2(-T,T;Y)} + \|u_0\|_{D(\Lambda^{\frac{1}{2}})}\right).$

（定理3.1, 3.2の証明はまず初期条件が0の場合に帰着でき，定理2.1, 2.3と逐次近似の方法を用いるのであるが省略する。）

§4. 初期値境界値問題への応用.

ΩはR^nの有界領域でその境界Γは充分滑らかとし，$Q=\Omega\times]-T,T[$　$(T>0)$　とおく。　$a_{\mu,\nu}(x,t)\in C^\infty(\bar{Q})$, $|\mu|=|\nu|=m$, はreal valuedで

(4.1)　$\displaystyle\sum_{|\mu|=|\nu|=m} a_{\mu,\nu}(x,t)\xi^\mu\xi^\nu \geqq c|\xi|^{2m}$,　$(x,t)\in\bar{Q}$, $\xi\in R^n$

なる定数$c>0$が存在し. $a_{\mu,\nu}=a_{\nu,\mu}$　$(\forall\mu,\nu,\ |\mu|=|\nu|=m)$
なる条件を満すとする。

$$X=L^2(\Omega),\quad \Lambda(t)u=(-1)^m\sum_{|\mu|=|\nu|=m}D_x^\nu(a_{\mu,\nu}(x,t)D_x^\mu),$$
$$D(\Lambda(t))=\mathring{H}^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega)$$

として次の関数空間を導入する。

$$\mathcal{W}^1(0,T;\alpha,1)=\{u;\ u\in H^1(0,T;L^2(\Omega)),\ t^\alpha u\in L^2(0,T;\mathring{H}^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega))\},$$

ノルムは

$$\|u\|_{\mathcal{W}^1(0,T;\alpha,1)}=\{\|u\|^2_{H^1(0,T;X)}+\|t^\alpha u\|^2_{L^2(0,T;\mathring{H}^m(\Omega)\cap H^{2m}(\Omega))}\}^{\frac{1}{2}}.$$

$\mathcal{W}^1(-T,T;\alpha,1)$も同様に定義される。

定理4.1. $Q_+=\Omega\times]0,T[$とおく。$a_{\mu,\nu}(x,t)$は前の通りとし，$b_\gamma(x,t)$, $|\gamma|\leqq 2m-1$, はQで複素数値，有界，可測な関数と

する。$\alpha > -1/2$, $\beta_j > \max\left(\frac{j(\alpha+1)}{2m}-1, \frac{-1}{2}\right)$, $j=0,1,\ldots,2m-1$, とする。この時任意の $f \in L^2(Q_+)$, $u_0 \in D_\alpha(\Omega) \equiv [\overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap H^{2m}(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{2\alpha+1}{2(\alpha+1)}}$ に対して

(4.2)
$$Lu = u_t + (-1)^m t^\alpha \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu,\nu} D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} \sum_{|\gamma|=j} b_\gamma(x,t) D_x^\gamma u + c(x,t) u = f \quad \text{in } Q_+,$$

(4.3)
$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{on } \Omega$$

を満す一意的な解 $u \in \mathscr{S}^1(0,T;\alpha,1)$ が存在して、次の評価式が成り立つ。

(4.4)
$$\|u\|_{\mathscr{S}^1(0,T;\alpha,1)} \leqq C\{\|f\|_{L^2(Q_+)} + \|u_0\|_{D_\alpha(\Omega)}\}.$$

注意 1. [3] の結果によれば、$D_\alpha(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega) \cap H^{\frac{m}{\alpha+1}}(\Omega)$ if $-\frac{1}{2} < \alpha < 0$, $D_\alpha(\Omega) = \overset{\circ}{H}{}^{\frac{m}{\alpha+1}}(\Omega)$ if $0 \leqq \alpha < 2m-1$, $D_{2m-1}(\Omega) \subset H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, $D_\alpha(\Omega) = H^{\frac{1}{\alpha+1}}(\Omega)$ if $2m-1 < \alpha$ である。従って充分大なる α ($\alpha > 2m-1$) に対しては初期関数に対する Compatibility 条件はなくなる。

定理 4.2. $a_{\mu,\nu}(x,t)$, $b_\gamma(x,t)$, α, β_j は前の通りとする。この時任意の $f \in L^2(Q)$ と $u_0 \in \overset{\circ}{H}{}^m(\Omega)$ に対して

(4.5)
$$Lu = u_t + (-1)^m |t|^\alpha \sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu (a_{\mu,\nu} D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} |t|^{\beta_j} \sum_{|\gamma|=j} b_\gamma D_x^\gamma u + c(x,t) u = f \quad \text{in } Q,$$

1:1

(4.6) $\quad u(x,-T)=u_0 \quad \text{on } \Omega$

を満す一意的な解 $u\in\mathcal{H}^1(-T,T;\alpha,1)$ が存在して次の評価式が成り立つ。

(4.7) $\quad \|u\|_{\mathcal{H}^1(-T,T;\alpha,1)} \leqq C\{\|f\|_{L^2(Q)}+\|u_0\|_{H^m(\Omega)}\}.$

(定理4.1, 4.2の証明には前節の結果を用いるが、まず初期条件が0の場合に帰着でき、更にRiesz-Schauderの理論を適用して解の一意性の証明に帰結される。)

§5. 方程式 $u_t-t^\alpha u_{xx}+it^\beta u_x=0$ に対する初期値問題.

$-1<\beta<\frac{\alpha-1}{2}$ として次のような方程式を考える。

(5.1) $\quad u_t-t^\alpha u_{xx}+it^\beta u_x=0 \quad \text{in } R^2_+=\{(x,t);(x,t)\in R^2, t>0\}.$

整数 $k\geqq 0$ に対して次の各関数

(5.2) $\quad u_n(x,t)=\frac{e^{inx}}{n^{k+1}}\cdot\exp\left(\frac{-n^2t^{1+\alpha}}{1+\alpha}+\frac{nt^{1+\beta}}{1+\beta}\right),\quad n=1,2,\dots$

は $(-\infty<x<\infty)\times[0,T]$ $(T>0)$ で (5.1) を満し有界である。

一方

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial x^j}u_n(x,0)\right|=\left|\frac{i^je^{inx}}{n^{k+1-j}}\right|=\frac{1}{n^{k+1-j}}\to 0,\quad n\to\infty;\ 0\leqq j\leqq k,$$

$$\left|u_n(0,n^{-\frac{2}{1+\alpha}})\right|=\frac{1}{n^{k+1}}\exp\left(\frac{-1}{1+\alpha}+n^{1-\frac{2(1+\beta)}{1+\alpha}}\right)\to\infty,\quad n\to\infty$$

であるから、方程式 (5.1) に対するCauchy問題は、α,β が上の条件を満す時にはHadamardの意味でwell posedではない。

§6. Hypoellipticity に関する注意.

関数 $a_{\mu,\nu}(x,t)$, $|\mu|=|\nu|=m$, は §4で与えられたものとし, $b_\gamma(x,t)\in C^\infty(Q)$, $|\gamma|\leqq 2m-1$, $c(x,t)\in C^\infty(Q)$ とする。定理4.2 に於ける評価式の応用として次のような形の方程式の Hypoellipticity が従う。

(6.1) $$Lu = u_t + (-1)^m t^{2k}\sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu(a_{\mu,\nu}(x,t)D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} b_\gamma D_x^\gamma u + cu = f \text{ in } Q,$$

ここで β_j は $\beta_j > \max\left(\frac{j(2k+1)}{2m}-1, \frac{1}{2}\right)$ なる整数.

(6.2) $$Lu = u_t + (-1)^{m+1} t^{2k+1}\sum_{|\mu|=|\nu|=m} D_x^\nu(a_{\mu,\nu}D_x^\mu u) + \sum_{j=0}^{2m-1} t^{\beta_j} b_\gamma D_x^\gamma u + cu = f \text{ in } Q,$$

ここで β_j は $\beta_j > \max\left(\frac{j(2k+2)}{2m}-1, \frac{1}{2}\right)$ なる整数。(cf.[5]).

更にこれ等の方程式の解の Gevrey class preperty も証明される。その場合も係数が縮退しない時と全く同じ結論が従う。(cf. [7]).

一方, 補題2.2, 2.3 を一般化することにより Fourier 変換の範囲での方がより一般な方程式に対する Hypoellipticity 等の証明が得られる。例えば, 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} - t^{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f$$

などに対しては前節までの結果は用いることができないが, 補題2.2, 2.3 に於て $\lambda|t|^\alpha$ の代りに $|t|^\alpha\xi_1^2+\xi_2^2$ ($(\xi_1,\xi_2)\in R^2$ をパラメータとする) としたものを導びきこれを用いれば上記と同様の結論を得る。

更に一般な方程式に対してパラメトリクスを構成する Y. Kato [10] の結果がある。

BIBLIOGRAPHY

[1] Baouendi M. S., Bull. Soc. Math. France, 95, 1967, 45–87.

[2] Dixmier J., Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1957.

[3] Grisvard P., Archive Rat. Mech. Analysis, 25, 1967, 40–63.

[4] Hörmander L., Linear partial differential operators, Springer-Verlag, 1963.

[5] Kannai Y., An unsolvable hypoelliptic differential operator, to appear.

[6] Lions J.L. & Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, I, Paris, Dunod, 1968.

[7] Matsuzawa T., Sur les équations $u_{tt} + t^{\alpha} u_{xx} = f$, to appear in Nagoya Math. J.

[8] Matsuzawa T., Sur une classe d'équations paraboliques dégénérées, to appear.

[9] Vishik M. Y. & Grushin V.V., Mat. Sbornik 79, (121), No.1, 1969.

[10] Kato Y., To appear in J. Funct. Analysis, 1970.