数理解析研究所講究録
第123巻 1971年 32-42

Finite Automaton による自己写像の最大不変集合について

京大 理 高橋英之

§1. 序

今 c.f.a. (complete finite automaton) ないし g.s.m. (generalized sequential machine) があるとし、それに対して一つの条件 "input と output の alphabet が相等しい" 即ち $\Sigma_{in} = \Sigma_{out} = \Sigma$ であることを要請する。この automaton を transducer と考えたとき、Σ^* から Σ^* の中への写像 F_A が定義される。

$$F_A : \Sigma^* \longrightarrow \Sigma^*$$

今、Σ^* の subset S_1 をとったとき、$F_A(S_1) = S_1$ となるなら、S_1 を、写像 F_A による不変集合と呼ぶことにしよう。容易に分るように、不変集合の class は、(無限個の) union のもとで閉じている。従って不変集合のうち最大なものが存在する。これを最大不変集合と呼び、以後 S_{max} と記すことにしよう。一つの automaton の S_{max} は、Σ^* の一つの subset (langage) を定義し、従ってあらゆる automaton

を考えたとき、一つの langage class が規定される。この class を決定するのが我々の問題であり、端的には次の形に表現される。

問題：最大不変集合は regular set か？

この問題の由来についてふれよう。

右図のような一次元の cell automaton を考える。長さ n は任意であるとする。

$$b_\ell \to \boxed{\alpha_{i_1}} \rightleftarrows \boxed{\alpha_{i_2}} \rightleftarrows \cdots \rightleftarrows \boxed{\alpha_{i_n}} \leftarrow b_r$$

時間 t の configuration $\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_n}$ を $\alpha(t)$ と書く。今、cell が時間と共に、orthonomous な遷移

$$\alpha_n(0)\to\alpha_n(1)\to\cdots\to\alpha_n(t)\to\cdots\to\alpha_n(t+T)$$

をしていったとき、$\alpha_n(t)=\alpha_n(t+T)$ となるなら、$\alpha_n(t)$ $\alpha_n(t+1),\cdots,\alpha_n(t+T-1)$ を周期的な configuration と呼び、周期は T であると言う。ここで我々は、大雑把に言って、任意の n について $\alpha_n(t)$ を input されて、$\alpha_n(t+1)$ を output するような simulator g.s.m. を構成できる。

$$\alpha_n(t)\to\boxed{g.s.m.}\to\alpha_n(t+1)$$

（この g.s.m. の一つの特徴は、$\Sigma_{in}=\Sigma_{out}$ なことである）

これを用いると、一次元 cell について「周期が1である configuration の全体は regular である。」或はより一般的に「周期が n 以下の configuration の全体は regular である」ことが証明される。次の問題として ごく自然に、「周期的

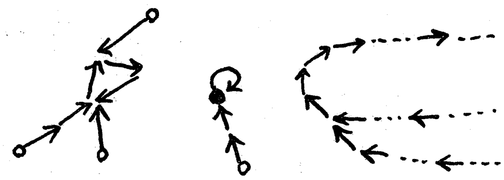
なconfigurationの全体Cはregular setか？」が問われるであろう。このCと、前述のg.s.m.によるS_{max}とは、密接な関係がある。この問いを一般化したのが我々の問題である。

§2. transition graph.

写像F_Aはregular setを保つ。そこで、

$$\Sigma^* = R_0, \quad F_A(R_i) = R_{i+1}$$

とするとき、$R_i \supseteq R_{i+1}$であり、且つすべてのR_iはregular setである。$S_{max} \subset \bigcap_i R_i$であるが、一般には等号は成り立たない。但、c.f.a.については等号が成り立つ。今$\forall x \in \Sigma^*$を点とし、$F_A(x) = y$のとき$x \to y$という定向線をassignしたものを、Σ^*の空間におけるtransition graphと呼ぶ。



例えば右図のようになり、これはmachineのorthonomousな遷移の一般化と見做すことも出来る。このgraphの枝における端(はし)の点(○印)つまり、$F_A(y) = x$となるyが存在しないような点xのことをgarden of Edenと名付ける。garden of Edenの全体Eは、$E = \Sigma^* - F_A(\Sigma^*)$だから、regular setである。また、このgraphで、矢印が自分自身に戻っている点(●印)つまり$F_A(x) = x$である点のこと

を、passiveな点と呼ぶ。

§3. c.f.a. による S_{max}.

以後我々は transducer を c.f.a.に限定する。

i) 写像 F_A は sequence の長さを保つ。 $|F_A(x)| = |x|$.
長さを保つ mapping の場合、transition graph において周期的部分と枝の部分とが明確に区別できる。loop の全体を C とするとき、明らかに $S_{max} = C$ である。

ii) c.f.a. の場合、次の事実が基本的である.

lemma 1. $\forall x \in S_{max}$ について. $x = x_p \cdot \alpha$ $(\alpha \in \Sigma)$ としたとき、$x_p \in S_{max}$ である。つまり S_{max} に含まれる sequence の任意の prefix subword は、また S_{max} に含まれる。(この性質を prefix containing と呼ぶ).

これによって、S_{max} の全体は "tree" を形成する。つまり、$\forall x \in S_{max}$ に対して、$x = x_p \cdot \alpha$ のとき、$x_p \xrightarrow{\alpha} x$ という symbolized 定向線を assign する。また、長さ0の sequence Λ を導入して、$F_A(\Lambda) = \Lambda$ とし、S_{max} の、長さ1の元 β については $\beta = \Lambda \cdot \beta$ とする。こうすると、$\forall x \in S_{max}$ に対して、$x = \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_n}$ であるとき、

$$\Lambda \xrightarrow{\alpha_{i_1}} \alpha_{i_1} \xrightarrow{\alpha_{i_2}} \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \xrightarrow{\alpha_{i_3}} \cdots \xrightarrow{\alpha_{i_{n-1}}} x_p \xrightarrow{\alpha_{i_n}} x$$

という subtree が unique に定義され、S_{max} の全体は

へを root に持つ tree となる。 $\forall x \in S_{max}$ は、この tree の node に対応するとも考えられるし、また、root からその node に到る subtree に対応するとも考えられる。長さ n の sequence で、同じ周期状態に含まれる点

$C_n^{(1)} = \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_m}\}$ 但 $F_A(x_{i_k}) = x_{i_{k+1}}$, $F_A(x_{i_m}) = x_{i_1}$

をひとまとめに考えて、これを tree における "trunk" と呼ぶ。$C_n^{(1)}$ の点と、長さ n+1 の trunk $C_{n+1}^{(1)} = \{y_{i_1}, \cdots, y_{i_l}\}$ とが矢印で結ばれているとき、後者は前者の "daughter" であると言おう。

lemma 2. $\forall x \in S_{max}$ に対して、少くとも一つの $\alpha \in \Sigma$ が存在して、$x \cdot \alpha \in S_{max}$ である。(この性質を以後 non-terminating と呼ぶ)

これはまた、「任意の trunk は少くとも一つの daughter を持つ」という形にも表現できる。

§3. 枝の長さ

次のような命題を考えよう。

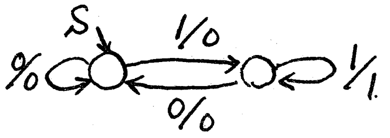
Prop 1. $\Sigma^* = R_0$, $F_A(R_i) = R_{i+1}$ とするとき、もし $\exists N$. $R_{N+1} = R_N$ となるならば、$S_{max} = R_N$ となるから、S_{max} は regular set である。

この条件は、transition graph における枝の長さに、upper limit N が存在することと同値である。しかしな

から次のことが成り立つ.

Prop 2. $R_{N+1} = R_N$ となる N が存在せず、しかも S_{max} が regular set になるような c.f.a. が存在する.

証. c.f.a.



$$1^n \to 0\cdot 1^{n-1} \to \cdots \to 0^{n-1}\cdot 1 \to 0^n$$

$$S_{max} = 0*.$$

ここでごく自然に次の問題が提起される。

[問1] c.f.a. による自己写像 F_A において、$R_{N+1} = R_N$ となる N が存在するか否かを判定せよ.

§4. $S_{max} = C$ という見方からの approach.

lemma 3. 任意の c.f.a. による自己写像において、passive な sequence の全体 $S_1 = \{x \mid x \in \Sigma^*,\ F_A(x) = x\}$ は regular set である.

lemma 4. c.f.a. の出力函数 g について、各 state における $g/g_i : \Sigma \to \Sigma$ が、置換 type のものを一つも含まなければ $S_{max} = S_1$ である。

さて、Regular set で、prefix containing 及び、non-terminating という二つの条件をみたす subclass を R_S とする。次のことが言える.

Theorem 1. c.f.a. による最大不変集合という langage

classは、Regular setと重なる部分に関しては、subclass R_Sと完全に一致する。

次に、周期が一般にnである場合を考察する。c.f.a.による mappingの全体は、compositionのもとで閉じている。従って、任意のc.f.a. Aと任意の正整数nに対して、$(F_A)^n = F_{A_n}$となるc.f.a. A_nが存在する。これより、

Theorem 2. c.f.a.による自己写像において、周期がn以下であるようなsequenceの全体S_nはregular setである。

ここで次のような命題を考えよう。

Prop. 3. あるc.f.a.による自己写像で、もし周期がupper limit Pを持つなら、$S_{max} = S_P$となり、従ってregularである。

しかしながら、次のことが成り立つ。

Prop. 4. 周期がupper limitを持たず、しかもS_{max}がregularになるようなc.f.a.が存在する。

これの証明には、次のlemmaが役立つ。

lemma 5. c.f.a.の出力函数gについて、すべてのstate q_iで、$g/q_i : \Sigma \to \Sigma$がone-to-oneであるなら、写像$F_A : \Sigma^* \to \Sigma^*$もone-to-oneとなり、従って、

$$S_{max} = \Sigma^*$$ である。

ここでごく自然に、次のことが問題となるであろう。

[問2] 任意のc.f.a.について、周期がupper limitを持つかどうかを判定せよ.

§5. 決定不能問題.

自己写像に関してはいくつかの決定不能問題があり、これが問題を難しくしている一因である。これに少しふれる.

Prop. 5. $\Sigma_{in} = \Sigma_{out}$である任意のg.s.m.と任意のinitial sequenceについて、それが、

i) passiveな点に陥いるかどうか. ii) 有限周期の周期状態に陥るかどうか. 或はそのmemberであるかどうか.

は決定不能である。

Prop. 6. 任意のc.f.a. A. 任意のregular set R_0について.

$R_{i+1} = F_A(R_i)$とするとき、$\exists N.\ R_{N+1} = R_N$となるかどうかは決定不能である.

§6. S_{max}のtreeを構成するscheme.

このsectionでは、S_{max}の元は、treeにおいて、rootからあるnodeに到るsubtreeに対応すると考える。各nodeには、元xをc.f.a.にinputしたときのfinal state q_xをassignする。これによってtrunkは、状態の縦の列、$(q_{i_1}, \cdots, q_{i_n})^t$に等しくなる。以下$\Sigma = \{0, 1\}$というtwo symbolの場合について、treeを構成する具体的なschemeを作るこ

とにしよう。さて lemma 4.5. は g/g_i が置換 type か縮退 type かなどによって状態を分類することの有効性を suggest している。従って我々は、c.f.a. の各 state を次の3つの type に類別しよう.

a) p-type (projection type)

i) p_0-type $\quad g/g_i(1)=0,\ g/g_i(0)=0.$

ii) p_1-type $\quad g/g_i(1)=1,\ g/g_i(0)=1.$

b) σ-type $\quad g/g_i(1)=0,\ g/g_i(0)=1.$

c) I-type $\quad g/g_i(1)=1,\ g/g_i(0)=0.$

これによって我々にとって基本的な次の lemma が用意できる.

lemma 6. a) trunk がもし一つでも p-type の state を含めば、その daughter は一つで周期はもとのものに等しい。

b) trunk が σ-type と I-type のみからなっていて、σ-type の state が奇数個なら、その daughter はただ一つで、周期はもとの二倍になる.

c) (b) で σ-type の個数が偶数なら、daughter は二つ出来、周期はもとのものに等しい。

これから導かれる一つの結論は、

lemma 7. two symbol の c.f.a. が p, σ, I-type のうち、二つの type のみで出来ているなら、その Smax は regular である。特に two symbol, two state の c.f.a. による Smax

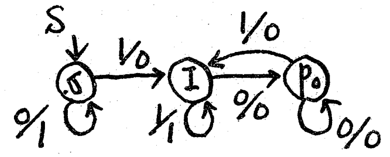
は regular set である.

§7. 反例の構成

以上の準備のもとに、我々は反例を構成することによって次の定理を証明しよう.

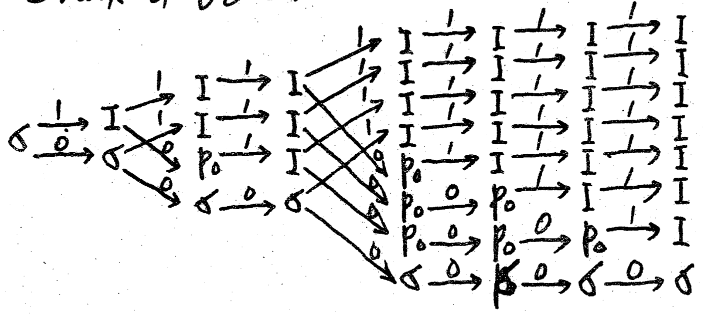
Theorem 3. c.f.a. による自己写像の S_{max} は、一般には regular set でない。

証. c.f.a.



$$\begin{cases} S \to \sigma \\ \sigma \xrightarrow{1} I, \quad \sigma \xrightarrow{0} \sigma \\ I \xrightarrow{1} I, \quad I \xrightarrow{0} p_0 \\ p_0 \xrightarrow{1} I, \quad p_0 \xrightarrow{0} p_0 . \end{cases}$$

S_{max} の tree.



⇒ 周期16へ.

〔問3〕任意の c.f.a. についてその S_{max} が regular であるか否かを判定せよ.

Prop. 7. prefix-containing 及び non-terminating という二つの条件を満す langage で、それを S_{max} にもつ c.f.a. が存在しないような例がある. (Theorem 1 と比較されたい)

〔問4〕任意の langage について、それを S_{max} に持つような c.f.a. が存在するための必要十分条件を求めよ.

§8. 一次元 cell automaton.

最後に、そもそもの問題の由来でもあった一次元cellに戻る。unilateralなcellの範囲内で、反例を構成することにより、次の定理が証明できる.

Theorem 4. 一次元cell automatonの周期的なconfigurationの全体Cは、一般にregular setではない。

Theorem 5. 一次元cellにおいて、branching pointの全体B(これはregular setである)とするとき、

BnC は一般にregular setではない.

謝辞.

研究室の滝本君、佐藤氏・小関氏・西尾助教授に、有益な討論とencouragementを下さったことに感謝します。数研の西沢氏にはessentialなcommentと、討論に感謝します.