

## オートマトンの代数的理論

東北大学 電気通信研究所  
増永良文, 野口正一.

### §-1. 序論.

従来数多くの著者によりオートマトンの代数的理論が議論されてきたが、とりわけオートマトンの直積分解性が、完全オートマトン [1] (Perfect Automaton) に対しては、オートマトンの自己同型群の群への直積分解性に等価である事を明らかにした Fleck [7] の結果は新しいオートマトンの代数的理論の発芽の様に思われた。その後この Fleck の議論は彼自身 [2], 主として Trauth [3], Bayer [4] 等により拡張一般化され、関連した議論は Weeg [5, 6, 7, 8], Dehube [9], Barnes [10], Pickett [11], Artib [12], Jump [13] 等により積極的に展開されてきた。

これらの議論では、オートマトンの自己同型群, 自己準同型半群, あるいはオートマトンに付随する入カ半群等の代数

的概念がオートマトンの構造を代数的に表現するものとして定義導入されている(オートマトンの自己同型群は Fleck [1], オートマトンに付随する入出力半群は Weeg [5] により初めて定義導入された)が, しかしながら従来の議論ではこれらオートマトンの代数的特徴の表現法, オートマトンの構造の表現法が統一的に記述されてなく, 今後の理論の発展の為に必ずそれらを統一的に記述し見直しを良くすることが重要であると思われた。本論文ではそれら全てをオートマトンの状態集合上の全変換半群を使って表現することにより従来の議論を統一し, 更に発展させ, 一般に群のみならず半群の構造とオートマトンの構造とが対応しているオートマトンの族を明らかにし, それらの構造を議論して, Fleck に始まったオートマトンの代数的理論を現在の方法論で取り扱える限界内で完結したと考えられる。

以下本稿ではその内容について要約を説明する。なお本稿では一般にオートマトンの状態数は一般に可付番無限と仮定して議論する。又半群に関する記号法は主として Clifford & Preston [22, 23] によっている。

2-1. オートマトンの構造の半群論的表現.

最初ムーア型オートマトンの定義を与える。

### 定義 2.1 (ムーア型オートマトンの定義)

オートマトン  $A$  は 3 項系列,  $A = (Q, M, I)$  である。ここに  $Q$  は状態のなる空でない一般には可付番無限集合,  $I$  は入力半群,  $M$  は  $M: Q \times I \rightarrow Q$  なる写像で状態遷移関数と呼ばれる。

なお本論文では入力半群  $I$  に単位元が含まれていることを常に仮定しない。ここでムーア型オートマトンの定義から半群論的オートマトンの定義を導こう。入力  $x \in I$  に対して集合  $Q$  上の全変換半群  $\mathcal{T}_Q$  の元  $\tau_x$  を次の様に対応させた写像  $\varphi: I \rightarrow \mathcal{T}_Q$  を考えてみる。  $\forall x \in I, x\varphi = \tau_x =$

$$\left( \begin{array}{cccc} q_1 & q_2 & \dots & q_i & \dots \\ M(q_1, x) & M(q_2, x) & \dots & M(q_i, x) & \dots \end{array} \right), Q = \{q_i \mid i \in \Delta\}$$

ここに  $\Delta$  は一般に可付番無限添数集合, とすると次の補助定理が成立する。

補助定理 2.1  $\varphi$  は  $I$  から  $\mathcal{T}_Q$  への準同型写像である。

以後集合  $\{x\varphi \mid \forall x \in I\}$  を  $U$  と表わすと,  $I$  が半群,  $\varphi$  が準同型写像だから  $U$  は明らかに  $\mathcal{T}_Q$  の部分半群である。ここで半群論的オートマトンの定義を述べよう。

### 定義 2.2 (半群論的オートマトンの定義)

オートマトン  $\mathcal{A}$  は 4 項系列,  $\mathcal{A} = (Q, U, \varphi, I)$  である。ここに  $Q$  は状態のなる空でない一般には可付番無限集

合,  $I$  は入力半群,  $\mathcal{U}$  は集合  $Q$  上の余変換半群  $\mathcal{A}_Q$  の部分半群,  $\varphi$  は  $I$  から  $\mathcal{U}$  の上への準同型写像である。

なおこの定義に際し, Sunaga [14], および Beatty [15] を参照した。

$\mu$ - $\pi$ 型オートマトンの定義法と本稿で述べた半群論的定義法は明らかに等価である。

以下本論文では定義 2.2 に述べた半群論的オートマトンの定義を構造の表現法として用いる。そして  $\mathcal{A} = (Q, \mathcal{U}, \varphi, I)$  に於いては, オートマトンの構造を規定している  $\mathcal{A}_Q$  の部分半群  $\mathcal{U}$  を オートマトン  $\mathcal{A}$  の構造半群 と呼ぶことにする。

ここで Weeg [5] により導入されたオートマトンに付随する入力半群の定義を予える (なお等価な定義は Krohn - Rhodes [16] により独立に予えられマシンの半群と呼ばれている)。オートマトン  $\mathcal{A} = (Q, \mathcal{U}, \varphi, I)$  とする。入力半群  $I$  上の 2 項関係  $\rho$  を次の様に定義する。  $x, y \in I$  とし、  

$$x \rho y \iff \forall g \in Q, g x \varphi = g y \varphi .$$

容易に  $\rho$  は  $I$  上の合同関係と存することが示され, 従って  $I$  の  $\rho$  を法とする商半群  $I/\rho$  が自然に定義される。  $I/\rho$  をオートマトン  $\mathcal{A}$  に付随する入力半群と呼び以後  $\bar{I}$  と書く。  $\rho$  の定義から明らかに  $\rho = \varphi \circ \varphi^{-1}$  であるから, 次の結果が得られる。

命題 2.1 オートマトン $\Sigma_1$ の構造半群と $\Sigma_1$ に付随する入力半群は同型である。

### 2-3 オートマトンの準同型写像

本節では最初オートマトンの準同型写像, 同型写像および像, 着オートマトンの定義を予え, それらに関する基礎的命題 2.1 の結果によって述べ, 本節後半ではオートマトンの自己準同型半群, 自己同型群としてオートマトンの構造半群の間の相互関係を状態集合上の全変換半群の上で明確にする。まずオートマトンの準同型写像から定義しよう。

定義 2.1 オートマトン $\Sigma_1 = (Q_1, U_1, \varphi_1, I)$  から $\Sigma_2 = (Q_2, U_2, \varphi_2, I)$  への準同型写像 $\eta$ は次の様に定義される。  
 $\eta: Q_1 \rightarrow Q_2, \forall q \in Q_1, \forall u \in U_1, q u \eta = q \eta u'$ , 二二に  $u = x \varphi$  なる  $x \in I$  に対して  $u' = x \varphi_2$  とする。

特に $\eta$ が全単射の時, 同型写像と云う。またオートマトン $\Sigma_1$ から同じく $\Sigma_1$ への準同型写像, 同型写像を各々 $\Sigma_1$ の自己準同型写像, 自己同型写像と云う。オートマトン $\Sigma = (Q, U, \varphi, I)$ の自己準同型写像 $\eta$ は状態集合 $Q$ 上の全変換半群 $\mathcal{A}_Q$ の元 $\eta$ として,  $\eta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & \cdots & \delta_n & \cdots \\ \delta_1 \eta & \delta_2 \eta & \cdots & \delta_n \eta & \cdots \end{pmatrix}$ と表現出来, 又自己同型写像は $Q$ 上の対称群の元として表現される。

$E(\mathcal{A})$  で  $\mathcal{A}$  の全ての自己準同型写像からなる集合,  $G(\mathcal{A})$  で  $\mathcal{A}$  の全ての自己同型写像からなる集合を表わすと,  
 $\forall \eta_1, \eta_2 \in E(\mathcal{A}), \forall g \in \mathcal{Q}, g(\eta_1 \circ \eta_2) = (g\eta_1) \eta_2$  で  
 $\eta_1$  と  $\eta_2$  の積  $\eta_1 \circ \eta_2$  を定義すれば, この演算のもとで  $E(\mathcal{A})$  は恒等写像を単位元とするモノイドを, 同様  $G(\mathcal{A})$  は群となることは良く知られた結果である ( $G(\mathcal{A})$  が群となることは Fleck [1] により初めて示された)。  $E(\mathcal{A}), G(\mathcal{A})$  をそれぞれ オートマトン  $\mathcal{A}$  の自己準同型半群, 自己同型群 と云う。

次の結果が得られる。

命題 3.1 オートマトン  $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, \mathcal{U}, \varphi, I)$  の自己準同型半群  $E(\mathcal{A})$  はオートマトン  $\mathcal{A}$  の構造半群  $\mathcal{U}$  の全ての元と可換なる  $\mathcal{Q}$  の元全体のなる  $\mathcal{A}$  の部分モノイドであり,  $\mathcal{A}$  の自己同型群  $G(\mathcal{A})$  は  $E(\mathcal{A})$  のユニットのなる群である。

また以下オートマトン  $\mathcal{A}$  の準同型写像  $\eta$  による像オートマトン  $\mathcal{A}/\eta = (\mathcal{Q}_\eta, \mathcal{U}_\eta, \varphi_\eta, I)$  と書き,  $\mathcal{A}$  の状態集合  $\mathcal{Q}$  上の右合同関係  $\alpha$  による商オートマトン  $\mathcal{A}/\alpha = (\mathcal{Q}_\alpha, \mathcal{U}_\alpha, \varphi_\alpha, I)$  と書くことにする (商オートマトンの定義等詳細は例として Harrison [17] を参照)。

又主として Weeg 等によりオートマトンに付随する入力半群  $\mathcal{I}$  と  $\mathcal{A}$  の自己同型群  $G(\mathcal{A})$  の間の関係が従来幾つか議論されているがここではこれ以上議論しない。

#### §4. オートマトンの特性化理論.

本節では次節でオートマトンの準同型写像による構造の保存性や, 次々節でオートマトンの直積分解性をそのオートマトンの自己同型群, 自己準同型半群, あるいはオートマトンに付随する入カ半群の直積分解性の上で議論する為に, 最初従来定義された幾つかのオートマトンのクラス及びその拡張について議論し, 次いで半群から生成されたオートマトンと云う新たな概念を定義導入することによって, それらオートマトンのクラスを半群論的に正確に規定する。

定義 4.1 オートマトン  $\mathcal{A}$  が完全 (Perfect) であるとは, 強連結でかつ次の条件を満足すること。(Flecker [1])。

$$\forall q \in Q, \forall x, y \in I, \quad qxyq = qyxq.$$

特にオートマトン  $\mathcal{A}$  が定義 4.1 の後半の条件を満足するとき可換であると云ふ。

§2 で入カ半群  $I$  上の合同関係  $\rho$  を定義したが, 次に  $I$  上の 2 項関係  $\rho_q$  ( $q \in Q$ ) を次の様に定義する。

$$x \rho_q y \Leftrightarrow qxyq = qyxq \quad (x, y \in I).$$

容易に  $\rho_q$  は  $I$  上の右合同関係に成ることが示される。

定義 4.2 オートマトン  $\mathcal{A}$  が状態独立 (State-independent) とは,  $\forall q, q' \in Q, \rho_q = \rho_{q'}$  の成立する時を云ふ。(Trauth [3])。

明らかにオートマトンが状態独立オートマトンでは、

$P = P_q$  が任意の  $q \in Q$  に対して成立する。

オートマトンが強巡回であるとはある状態  $q_0$  が存在して、  
 $\forall q \in Q, \exists x \in I, q = q_0 x \varphi$  の成立する時を云う。  
 この時  $q_0$  をオートマトン  $\Sigma$  の強生成元と云う。次の定義は  
 定義 4.2 の一般化である。

定義 4.3. 強巡回なオートマトン  $\Sigma$  が準状態独立 (quasi-state-independent) とは、 $\forall q \in Q,$

$P_q \supseteq P_{q_0}$  が成立する時を云う。

即ち  $\Sigma$  が強巡回準状態独立ならば、 $q_0 x \varphi = q_0 y \varphi \Rightarrow$   
 $\forall q \in Q, q x \varphi = q y \varphi$  ( $x, y \in I$ ) である。

定義 4.4 オートマトン  $\Sigma$  が群型 (group-type) とは、 $\Sigma$  に付随する入力半群が群をなすと云う。

定義 4.5  $\Sigma$  がリセットオートマトンと呼ばれるのは次の条件を満たす時。 $\forall q \in Q, \forall x, y \in I, q x y \varphi = q y \varphi$ 。

定義 4.6 オートマトン  $\Sigma$  が単位型 (monoid-type) とは次の条件を満たす時を云う。 $\exists e \in I, \forall q \in Q, q e \varphi = q$ 。

単位型の定義は一見不自然であるが、入力半群に例えれば単位元 (従来良く使われる空語  $\epsilon$  で良し) を付加すれば常に上の条件を満たすことになる。

また従来オートマトンの構造を議論する際に Trauth [3]



や Fleck [1] によりオートマトンの状態集合上に次の様な演算が定義されてきた。

定義 4.7  $\Sigma = (Q, \cup, \varphi, I)$  の適当な状態  $q_0$  とする。  $q, q'$  と  $q = q_0 \cdot x\varphi$ ,  $q' = q_0 \cdot y\varphi$  ( $x, y \in I$ ) なり状態とし状態集合  $Q$  上に演算  $*$  を次の様に定義する。

$$q * q' = q'', \quad \text{すなわち} \quad q'' = q_0 \cdot xy\varphi.$$

一般に演算  $*$  の定義が確定しているとは限りない。

定義 4.8 オートマトン  $\Sigma$  が擬完全 (quasi-perfect) と云われるのは  $\Sigma$  が強連結で状態独立かつ群型の群という。(Trauth [3])。

しかしながら Trauth [3] によりオートマトンが擬完全の時には演算  $*$  は状態集合  $Q$  全ての上で任意の状態  $q_0$  として固定しても確定していることが示されている。特に本論文で導入した強巡回なオートマトンに対する準状態独立の定義は上述の様な状態集合上の演算が全状態集合上で確定する為の必要かつ十分条件であることを示せることに注意したい。即ち次の結果を行う。

定理 4.1 強巡回なオートマトン  $\Sigma$  に対して定義 4.7 の演算が全状態集合上で確定する為の必要かつ十分条件はオートマトン  $\Sigma$  が準状態独立なること。但し  $q_0$  は  $\Sigma$  の強生成元とする。

なお強巡回オートマトンにオートマトンを限定したことは、状態集合全ての元のうえで演算を定義したためである。

さてここで半群から生成されたオートマトンと云う定義を新たに導入する。

$V = \{v_i \mid i \in \Delta\}$ ,  $\Delta$  は一般に可付番無限の添数集合,  $\Sigma$  を任意の半群とする。  $V$  の各元  $v_i$  に対して, 集合  $V$  上の全変換半群  $\Sigma^V$  の元  $\sigma = (\begin{smallmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_i & \dots \\ v_{1\sigma} & v_{2\sigma} & \dots & v_{i\sigma} & \dots \end{smallmatrix})$  を対応させた写像  $\sigma$  とすると, 明らかに  $\sigma$  は準同型写像であって,  $\sigma$  を 半群  $V$  の正則表現 (regular representation) と云う。

更に  $\sigma$  が単射の時, 正則表現  $\sigma$  は忠実であると云う。半群  $V$  は  $(\forall v \in V, v v_i = v v_j) \Rightarrow v_i = v_j$  の成立する時, 左可約 (left reductive) と云う。半群  $V$  の正則表現が忠実である為の必要かつ十分条件は  $V$  が左可約なることである。特に  $V$  がモノイドの場合, ある  $1$  は  $V$  が左消去律の成立する半群である場合には  $V$  の正則表現は忠実である。半群  $V$  の正則表現  $\sigma$  による像半群を  $\bar{V} = \{v_i \sigma \mid v_i \in V\}$  で表わす。今入カ半群  $I$  から半群  $V$  への全準同型写像が存在する場合には  $V$  の正則表現  $\sigma$  を使ってオートマトンを定義することが出来る。

定義 4.9  $I$  を入カ半群,  $V$  を半群とし写像  $\sigma$  を  $I$  から  $V$  への全準同型写像とする。  $V$  の正則表現  $\sigma$  による像半群

$\bar{V}$  とし,  $\varphi = \times$  とおく。この時オートマトン  $\mathcal{A}_V = (V, \bar{V}, \varphi, I)$  が定義できて,  $\mathcal{A}_V$  を半群  $V$  から生成されたオートマトン と云う。

結論から述べる。オートマトンの特性化定理の大略は次の様になる。

#### 定理 4.2 (特性化定理)

(i) オートマトン  $\mathcal{A}$  が完全である為の必要かつ十分条件はあるアーベル群が存在して,  $\mathcal{A}$  はこのアーベル群から生成されたオートマトンに同型なること。

(ii) オートマトン  $\mathcal{A}$  が擬完全である為の必要かつ十分条件はある群が存在して,  $\mathcal{A}$  はこの群から生成されたオートマトンに同型なること。

(iii)  $\mathcal{A}$  が強連結な状態独立オートマトンである為の必要かつ十分条件はある右群が存在して,  $\mathcal{A}$  はこの右群から生成されたオートマトンに同型なること。

(iv)  $\mathcal{A}$  が強巡回な準状態独立オートマトンである為の必要かつ十分条件はある左単位元を有する半群が存在して,  $\mathcal{A}$  はこの半群から生成されたオートマトンに同型なること。

(v)  $\mathcal{A}$  が強巡回な単位型, 準状態独立オートマトンである為の必要かつ十分条件はある単位半群が存在して,  $\mathcal{A}$  はこの半群から生成されたオートマトンに同型なること。

(vi)  $\mathcal{A}$  が強連結なリセットオートマトンである為の必要かつ十分条件はある右零半群が存在して,  $\mathcal{A}$  がこの右零半群から生成されたオートマトンに同型になること。

(vii)  $\mathcal{A}$  が強巡回可換オートマトンである為の必要かつ十分条件はある単位可換半群が存在して,  $\mathcal{A}$  がこの単位可換半群から生成されたオートマトンに同型なること。

更にオートマトンの準同型写像を媒介として次の様な特性化定理を得ることも出来る。

定義 4.10  $\mathcal{A}$  が置換オートマトンであるとは各入力が状態集合の置換を行なう時。

定理 4.3  $\mathcal{A}$  が強連結な置換オートマトンである為の必要かつ十分条件はある群が存在して,  $\mathcal{A}$  がこの群から生成されたオートマトン (定理 4.2, (ii) より擬完全オートマトン) のある準同型像であること。

### §-5. オートマトンの準同型写像による構造の保存性.

簡単に要約を述べる。オートマトン  $\mathcal{A}_1$  から  $\mathcal{A}_2$  への全準同型写像  $\eta$  が存在したとする。この時  $\eta$  は  $\mathcal{A}_1$  の構造半群  $\Pi_1$  から  $\mathcal{A}_2$  の構造半群  $\Pi_2$  への全準同型写像を誘引する。従って命題 2.1 から  $\eta$  は  $\mathcal{A}_1$  に付随する入力半群から  $\mathcal{A}_2$  に付随する入力半群への全準同型写像を誘引する。  $\eta$  が一般に  $\mathcal{A}_1$  から  $\mathcal{A}_2$  への準同

型写像の場合には  $\mathcal{U}_1$  (又は  $\mathcal{U}_1$  に付随する入力半群) から  $\mathcal{U}_2$  (又は  $\mathcal{U}_2$  に付随する入力半群) の因子商半群への全準同型写像を誘引する。自己準同型半群, 自己同型群の保存性に関して,  $\eta$  の一般に  $E(\mathcal{U}_1)$  の中から  $E(\mathcal{U}_2)$  への準同型写像を誘引する。  $G(\mathcal{U}_1)$  に関して同様の結果が成立する。また自己同型群の保存性に関しては Fleck [2], Bayer [4], Paul [18] 等の積極的議論があるが, ここではこれ以上議論しない。

前節でオートマトンが状態独立, 準状態独立であるという概念が定義導入されたが, 次にオートマトンの準同型写像がどのような性質を如何なる条件のもとに保存するかを考察してみよう。この議論は本質的に次節のオートマトンの直積分解と深くつながりを有する。結果を示す。

定理 5.1  $\mathcal{U}$  を有限な強巡回準状態独立オートマトンとし  $\eta$  を  $\mathcal{U}$  の準同型写像とする。  $\mathcal{U}/\eta$  が準状態独立オートマトンとなるための必要かつ十分条件は  $\eta \circ \eta^{-1}$  が半群  $(Q, *_{q_0})$  の合同関係に属すること。但し  $q_0$  は  $\mathcal{U}$  の強生成元とする。

$(Q, *_{q_0})$  は定義 4.7 で定義した演算のもとに状態集合  $Q$  が右可左単位元を有する半群である。なおオートマトンが強連結な状態独立オートマトン (従って擬完全, 完全オートマトン) の場合には,  $q_0$  を任意の状態に固定して上の結果は。

無限オートマトンに対して状態独立性（従って擬完全，完全性）を保持する為の必要かつ十分条件として述べる事が出来ることを証明出来る。

### §-6 オートマトンの直積分解

本節では特に §-4 で導入された種類のオートマトンの直積分解について議論する。これらの議論は定理 4.2, 4.3 の特性化定理を使ってオートマトンの自己同型群，自己準同型半群，あるいはオートマトンに付随する入カ半群の直積分解性と対比して行われ，又統一的に議論される。オートマトンの直積の定義は Rabin & Scott [19] に従う。ここで注意しなければならないのは，直積オートマトンの構造半群は各々の因子オートマトンの構造半群の直積には一般的には等ならず，部分半群となる。

定義 6.1 オートマトン  $\mathcal{Q}_1 = (Q_1, U_1, \varphi_1, I)$  と  $\mathcal{Q}_2 = (Q_2, U_2, \varphi_2, I)$  が“関連”しているとは次の条件が成立している時を云う。  $\forall u \in U_1, \forall v \in U_2, \exists x \in I$   
 $u = x\varphi_1 \wedge v = x\varphi_2$  が成立する。

命題 6.1 オートマトン  $\mathcal{Q}_1$  と  $\mathcal{Q}_2$  の直積の構造半群が， $\mathcal{Q}_1$  と  $\mathcal{Q}_2$  の構造半群の直積に等しくなる為の必要かつ十分条件は  $\mathcal{Q}_1$  と  $\mathcal{Q}_2$  が関連していること。

定義 6.2 オートマトン  $\Sigma$  がオートマトン  $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の直積に分解されるとは  $\Sigma$  が  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$  ( $\Sigma_1$  と  $\Sigma_2$  の直積) に同型なるときを言う。

また一般にオートマトンが直積に分解されるための必要かつ十分条件はオートマトンの状態集合上の右合同関係の満たすべき条件として既に Harrison [17] により示されている。また半群から生成されたオートマトンの直積分解から議論する。結果を示す。

定理 6.1 左可約な半群から生成されたオートマトン  $\Sigma$  が、2つの関連した左可約な半群から生成されたオートマトン  $\Sigma_1$  の直積に分解されるための必要かつ十分条件は  $\Sigma$  に付随する入力半群が 2つの半群の直積に分解されること。

一般に左可約な半群から生成されたオートマトンの直積分解性の定理 6.1 を証明した手法が使えば必要条件は明らかである。しかしながら十分条件は成立する。特性化定理 4.2 中に表われた群, 右群, 左単位元と有する半群, 従って単位半群, 右零半群, 単位可換半群等は全て左可約な半群であるから, 定理 4.2 中の各オートマトンが関連した 2つの同クラスのオートマトンの直積に分解されるための必要かつ十分条件はそれぞれオートマトンに付随する入力半群が 2つの半群の直積に分解されることである。ところが次の結果を示すこ

とが出来る。

定理 6.2  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  を強連結な状態独立オートマトンとし、直積オートマトン  $\alpha_1 \times \alpha_2$  が又強連結な状態独立オートマトンになったとする。すると  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  は関連してゐなければならない。

定理 6.1, 6.2 から次の結果を得る。

定理 6.3 強連結な状態独立オートマトンが 2 つの強連結な状態独立オートマトンの直積に分解される為の必要かつ十分条件はオートマトンに付随する入力半群が 2 つの半群の直積に分解されること。

そこで次にオートマトンに付随する入力半群とそのオートマトンの自己同型群, 自己準同型半群の間の関係について議論する。なおこれに関する議論は Weeg [5, 他], Tully [20] 等によりも行なわれている。

命題 6.4  $\alpha$  を強巡回な単位型準状態独立オートマトンとすると,  $\alpha$  の自己準同型半群と  $\alpha$  に付随する入力半群は逆同型である。

従って強巡回な単位型準状態独立オートマトンのクラスに属するオートマトンの直積分解に対する必要かつ十分条件は定理 6.1 の表現を使い "付随する入力半群" の代りに "自己準同型半群" を使用しても同値である。また強連結な状



状態独立オートマトンに対しては、オートマトンの自己準同型半群と自己同型群は一致することが容易に示せるが、更に右群は常に群と右零半群の直積として表現されることと、定理 4.2 (ii), (iii), (vi) と定理 6.3 から次の結果を得る。

定理 6.5 オートマトン  $\mathcal{A}$  に関する次の 2 つの命題は同値である。

- (i)  $\mathcal{A}$  は強連結な状態独立オートマトンである。
- (ii)  $\mathcal{A}$  は擬完全オートマトンと強連結なリセットオートマトンの直積に同型である。

ところで今右群を  $V$  とし、 $V$  の全ての巾等元の存在集合を  $E$ 、 $v_0$  を  $V$  のある巾等元とし、 $v_0$  から生成された  $E$   $V$  の左主イデアル  $G = V \cdot v_0$  とすると、 $G$  は群となり、 $V \cong G \times E$  であり、更に  $V$  から生成されたオートマトン (即ち強連結な状態独立オートマトン) の自己同型群は群  $G$  と是同型であることを示すことが出来る。オートマトンが擬完全から定義から強連結な状態独立オートマトンであり、定理 6.5, 6.3 から次の結果を得る。

定理 6.6 強連結な状態独立オートマトン  $\mathcal{A}$  は一般に擬完全オートマトン  $\mathcal{A}_G$  と強連結なリセットオートマトン  $\mathcal{A}_E$  との直積に同型であるが、更に  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{A}_E$  と 2 つの擬完全オートマトン  $\mathcal{A}_{G_1}$  と  $\mathcal{A}_{G_2}$  との直積に分解される為の必要かつ

分条件は  $G(2)$  が 2 つの群の直積に分解されることである。

特に強連結な状態独立オートマトン  $\Sigma$  が擬完全オートマトンである場合には上記の強連結なリセットオートマトン  $\Sigma_E$  は自明な 1 状態オートマトンにしかなりえないから、

$\text{Trauth [3]}$ ,  $\text{Fleck [1]}$  の結果を系として挙げる。

系 6.7 擬完全オートマトン  $\Sigma$  が 2 つの擬完全オートマトンの直積に分解されるための必要かつ十分条件は  $G(2)$  が 2 つの群の直積に分解されること。 ( $\text{Trauth [3]}$ )。

系 6.8 完全オートマトン  $\Sigma$  が 2 つのオートマトンの直積に分解されるための必要かつ十分条件は  $G(2)$  が 2 つの群の直積に分解されること。 ( $\text{Fleck [1]}$ )。

なお系 6.8 中 "2 つのオートマトン" と云う表現は完全オートマトン  $\Sigma$  の準同型像は完全オートマトンにしかなりえないことによる。また系 6.7, 6.8 は強連結な置換オートマトンの構造が擬完全オートマトンの構造と密接に関連していることを議論することによっても得ることが出来る。その結果の一部は定理 4.3 であつたが、次にその大略を述べる。

既に  $\text{Fleck [2]}$  によりオートマトン  $\Sigma$  の自己同型群  $G(2)$  の部分群  $H$  に対して、 $\Sigma$  の状態集合を  $H$  による可遷類で分割すれば、その分割は右合同関係となり、従つて商オートマトン  $\Sigma/H$  と記し、 $\Sigma$  の  $H$  を核とする商オ

ト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ と呼ぶ, を定義出来, この時  $\mathcal{A}/H$  は  $\mathcal{A}$  の準同型像となることが示されている。しかしながら一般にオートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$   $\mathcal{B}$  をオートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$   $\mathcal{A}$  の準同型像とした場合に  $G(\mathcal{A})$  に部分群  $H$  が存在して,  $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/H$  となり得るとは限らない。しかしながら擬完全オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ に対しては次の結果を示すことが出来る。

定理 6.9  $\mathcal{A}$  を擬完全オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ とする。オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$   $\mathcal{B}$  が  $\mathcal{A}$  の準同型像である為の必要かつ十分条件は  $G(\mathcal{A})$  に部分群  $H$  が存在して  $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/H$  となること。

なおこの結果より更に強い結果として, 強連結なオートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ に対しては, 全ての準同型写像が上述の意味のオートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ の自己同型群の部分群から誘引される為にはオートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ が擬完全でなければならぬ事も示すことが出来る。

上の結果を用いて擬完全オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ の準同型像を次の様に特性化することが出来る。

定理 6.10 (特性化定理)

$\mathcal{A}$  を擬完全オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ とする。

- (i) オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$   $\mathcal{B}$  が  $\mathcal{A}$  の準同型像である為の必要かつ十分条件は  $G(\mathcal{A})$  に部分群  $H$  が存在して,  $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}/H$  となること。この時  $\mathcal{B}$  は常に強連結な置換オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$ となる。
- (ii) 擬完全オートト $\rightarrow$ ト $\rightarrow$   $\mathcal{B}$  が  $\mathcal{A}$  の準同型像である為の必要

かつ十分条件は  $G(Q)$  に正規部分群  $H$  が存在して,  $B \cong Q/H$  となること。(Bayev [4])。

(iii) 完全オートマトン  $B$  が  $Q$  の準同型像となる為の必要かつ十分条件は  $G(Q)$  にこの交換子群を含む正規部分群  $H$  が存在して,  $B \cong Q/H$  となること。

ここで特に以下オートマトン  $Q$  を有限強連結置換オートマトンとする。  $I$  は  $Q$  に付随する入力半群とすると,  $I$  は群となることを示すことが出来る(即ち  $Q$  は群型であり, 又逆も成立する)。そこでオートマトン  $Q_I = (I, U_I, \varphi_I, I)$  を  $\forall [x] \in I, \forall y \in I, [x]y\varphi = [xy]$  と定義すると, 定理 4.2 (ii) から  $Q_I$  は擬完全オートマトンとなり,  $Q$  は  $Q_I$  の準同型像となることが証明出来る。従って  $G(Q_I)$  に部分群  $H$  が存在して,  $Q \cong Q_I/H$  となる。所で  $Q_I$  の構成の仕方から,  $Q$  に付随する入力半群と  $Q_I$  に付随する入力半群は全く同一である。そして擬完全オートマトンに付随する入力半群とそのオートマトンの自己同型群は逆同型であることを今迄の議論に関連して示すことが出来るから, 従ってオートマトン  $Q$  に付随する入力半群に  $G(Q_I)$  の部分群  $H$  に同型な部分群  $K$  が存在することに依る。  $K$  を有限強連結置換オートマトン  $Q$  に付随する入力半群  $I$  の“自然な部分群”と呼ぶことにする。系 6.7, 6.8 を同じ

く系として含む強連結な置換オートマトンに対する結果を次に示す。

定理 6.11 有限な強連結な置換オートマトン  $\Sigma$  が 2 つのオートマトンの直積に分解される為の必要かつ十分条件は  $\Sigma$  に付随する入カ“群”に 2 つの部分群  $K_1, K_2$  が存在して、次の条件を満たすこと。  $K_1 \cap K_2 = \varepsilon, K_1 K_2 = \Sigma$ 。ここで  $\Sigma$  は  $\Sigma$  に付随する入カ群  $\Sigma$  の“自然な部分群”である。

又強連結な置換オートマトン  $\Sigma$  が擬完全である時には、 $\Sigma$  に付随する入カ群の自然な部分群は自明な単位群であるから次の Fleck [2] の結果も系としてうる。

系 6.12 擬完全オートマトン  $\Sigma$  が 2 つのオートマトンの直積に分解される為の必要かつ十分条件は  $G(\Sigma)$  に 2 つの部分群  $H_1, H_2$  が存在して次の条件を満たすこと。

$$H_1 \cap H_2 = \{e\}, H_1 H_2 = G(\Sigma) \quad (\text{Fleck [2]}).$$

### 5-7 強巡回な単位型準状態独立アクセプター

本節では前節までの構造論で議論されてきた種々のオートマトンの能力について議論して、先に定義された強巡回な単位型準状態独立オートマトンの受理するテープの集合は正確に正規集合の族に一致することを示す。なおアクセプターの定義は従来の定義 (例えば Harrison [17]) に従う。結果

のみを示す。

定理 7.1  $\Sigma$  を有限アルファベットの集合とする。

$\Sigma^*$  の部分集合  $T$  に関する次の 2 つの命題は同値である。

- (i)  $T$  は正規集合である。
- (ii)  $T$  はある強巡回な単位型準状態独立有限アクセプターにより受理される。

なお置換オートマトンに対する能力に関して Thierrien [21] の結果が知られている。

§-8 おわりに。

本論文ではオートマトンの構造を半群論的に統一して議論している。その結果 Fleck [1] に始まったオートマトンの代数的理論が拡張、一般化統一され、かつオートマトンの構造と半群の構造との対比が明らかにされた。なお本稿ではオートマトンの直並列分解に関する諸結果、Kvohn & Rhodes [16] の理論との関連性を議論した諸結果については、紙面の都合上紹介しなかった。これらの結果は又別の機会に報告したい。またオートマトンの構造を埋蔵する問題を代数的に議論することは未解決の問題の一つである。

尚

本論文は東北大学, 電気通信研究所, 大泉研究室で行

行われた研究であり，増永良文（博），猪瀬武又（修），植松秀雄（修）の卒業論文の一部を主としてまとめたものである。またこの研究に関する3編の論文が現在電子通信学会論文誌に分冊に掲載され，あるものは掲載が決定しているので参照された [24], [25], [26]。

文献

- [1] A.C. Fleck : "Isomorphism Group of Automata" J. ACM 9, 4, p-469 (Oct.1962)
- [2] A.C. Fleck "On The Automorphism Group of Automata" J. ACM 12, 4, p566 (Oct 1965)
- [3] C.A. Jr. Trauth: "Group- Type Automata" J. ACM 13, 1, p-170 (Jan.1966)
- [\$] R. Bayer; "Automorphism Groups and Quotients of Strongly Connected Automata and Monadic Algebras" Rep. No.204, Dep. of Computer Science, Univ. Illinois (1966)
- [5] G.P.Weeg: "The Group and Semigroup Associated with Automata" Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata, p-257, Polytechnique Press (1962)
- [6] G.P. Weeg: "The Structure of an Automaton and Its Operation-Preserving Transformation Group" J. ACM 9,3, p-345(July 1962)
- [7] G.P.Weeg: "The Automorphism Group of the Direct Product of Strongly Related Automata" J. ACM 12, 2, p-187 (Oct. 1965)
- [8] G.P.Weeg: The Structure of the Semigroup Associated with Automata "Computer and Information Sciences", p-230, 29, Spartan Books (1964)
- [9] R.H. Oehmke: "On the Structure of an Automaton and Its Input Semigroup" J.ACM 10,4, p-521 (Oct. 1963)
- [10] B.Barnes: "Groups of Automorphisms and Sets of Equivalence Classes of Input for Automata" J. ACM 12, 4, p-561 (Oct. 1965)
- [11] H.E. Pickett: "Note Concerning The Algebraic Theory of Automata" J, ACM 14, 2, p-382 (April 1967)
- [12] M.A. Arbib: "Automaton Automorphisms" Inf. & Cont. 11, 1/2, p-147 (July -Aug. 1967)
- [13] J.Robert Jump "A Note on the Iterative Decomposition of Finite Automata" Inf.& Cont. Vol.15 (1969)
- [14] T.Sunaga: "An Algebraic Theory of The Analysis and Sythesis of Automata" Proc. Symp. on Mathematical Theory of Automata, p-358, Polytechnique Press (1962)



- [15] J.C. Beatty: "On Some Properties of the Semigroup of a Machine which are Preserved Under State Minimization" Inf. & Cont. 11, 3, p-290 (Sep.1967)
- [16] K.Krohn & J.Rhodes: "Algebraic Theory of Machines. 1" Trans. Am. Math. Soc. (1965)
- [17] M.A. Harrison: "Introduction to Switching and Automata Theory" McGraw Hill Book Co., Newyork, 1965
- [18] M. Paul: "On the Automorphism Group of a Reduced Automata " IEEE Conference Record of 1966 7th Ann. Symp. on Switching and Automata Theory, p-298 (1966)
- [19] M.O. Rabin & D. Scott: "Finite automata and their decision problems" IBM J. Rev. Feb. 3 (1959)
- [20] E.J. Tully. Jr.: "Representation of a semigroup by transformation acting on a set" Amer. J. of Mathematics Vol. 83 (1961)
- [21] G. Thierrion: "Permutation Automata" , Mathematical Systems Theory 2, p-83 (1968)
- [22] A.H. Clifford & G.B. Preston: "The Algebraic Theory of Semigroups" Vol. 1 American Mathematical Society (1961)
- [23] 全上 Vol. 11 (1967)
- [24] 増永, 野口大泉: "オートマトンの構造の半群論的考察" 電子通信学会誌 Vol. 53-C, No.3 (1970.3月)
- [25] 猪瀬, 増永, 野口大泉: "オートマトンの構造の半群論的考察 - 自己準同型半群により規定されるオートマトン -" 電子通信学会誌 論文誌 C分冊 照会后採録決定.
- [26] 増永, 野口大泉: "群によって規定されるオートマトンの構造論" 電子通信学会誌 論文誌 C分冊 掲載決定 (1971.6月号予定).