数理解析研究所講究録
第 123 巻 1971 年 179-190

非同期回路の合成定理

早大 理工　中 村 剛

Semi-modular state chart の synthesis を考える場合、similarity relation $\sim$ よりも v-similarity relation $\overset{v}{\sim}$ が本質的であることが Hattori [10] において明かにされた。ここでは [10] において得られた $\overset{v}{\sim}$ の性質と、M. Hattori、H. Noguchi [7] において重要な役割を果たした v-extension の概念を用いて、直接に digital extension を構成する手順を考える。

1. Lemma. (2 of [10]). (V, h) を finite semi-modular state chart とすると、次の (1), (2), (3) が成立する。

(1) $|V/\overset{v}{\sim}|$, v-similarity class の数, は有限である。

(2) v-similarity class T をとり、Z を Z(T) の cycle、Q をその張る nodes とすると、T|Q = {M|Q ;

$M \in T\}$ は全順序集合である。

(3). M, N を $Z(M)=Z(N)=\{Z(1), \cdots, Z(m)\}$ なる点とし、$Q(q)$, $q=1, \cdots, m$, を各 $Z(q)$ の張る nodes とする。$Q(0)=J-\bigcup_q Q(q)$ としたとき、$M \overset{v}{\sim} N$ なる必要十分条件は $M|Q(q) \equiv N|Q(q) \pmod{Z(q)|Q(q)}$ が全ての $q=1, \cdots, m$ について成立しかつ $M|Q(0)=N|Q(0)$ となることである。

2. 定義. (V, h) を finite semi-modular state chart、$\{T(\alpha)\}$, $\alpha=1, 2, \cdots, n$, を v-similarity class の族とする。二つの v-similarity class $T(\alpha)$、$T(\beta)$ をとる。もしある点 $M \in T(\alpha)$, $N \in T(\beta)$ について $M \sim N$ となるならば $T(\alpha) \sim T(\beta)$、$h(M)=h(N)$ となるならば $h(T(\alpha))=h(T(\beta))$ と書く。K を次に定義される non-ordered な couple とする。

$$K=\{(T(\alpha), T(\beta));\ h(T(\alpha))=h(T(\beta)) \text{ かつ } T(\alpha) \nsim T(\beta)\}.$$

通常 K を (V, h) の knotty set、その要素を κ で示す。

3. 定義. (V, h) を node J の finite state chart、T と S を V の disjoint subset とする。(V, h) の

extension (V^e, h^e) が次の(1)，(2)を満たすとき (T, S)-extension という。

(1). $h^e(M^e) = h^e(N^e)$ かつ $M^e|J \sim N^e|J$ なる V^e の点 M^e, N^e については、$M^e \sim N^e$ が成り立つ。

(2). $M^e|J \in T$, $N^e|J \in S$ なる V^e の点 M^e, N^e については、$h^e(M^e) \neq h^e(N^e)$ となる。

4. Lemma. (Hattori-Noguchi [11]). (V, h) を nodes J をもった state chart、K をその knolly set とする。もし各 $\kappa \in K$ について κ-extension (V^κ, h^κ) が存在するならば、それらの amalgamation $\bigotimes_\kappa (V^\kappa, h^\kappa)$, $\kappa \in K$, は (V, h) の digital extension である。

5. Lemma. (V, h) を finite state chart で少くとも 1 つの cycle をもつものとすると、ある cycle の直交系 $\{X(1), \ldots, X(m)\}$ が存在して任意の cycle はそれらの線型結合で書ける。実際、(V, h) には order $\succ$ のもとで最大の ε-class が存在するから、その cycle をとればよい。$X(q)$ の張る nodes を $Q(q)$, $q = 1, \ldots, m$, とし各 $i \in J$ について非負整数 $w(i)$ を次の様に定義し、node i の上の cyclic number と呼ぶ。

$$
W(i)\begin{cases} = 0 & \text{if} \quad i \notin \bigcup_q Q(q) \\ = X(q)_i & \text{if} \quad i \in Q(q) \end{cases} .
$$

1.1 and 2.1 of [6] により、$w(i) \neq 0$ ならば $w(i) \geq 2$ である。

6. *Lemma*. (V, h) を nodes I をもった finite state chart、$\{w(i)\}$ をそれの cyclic number とする。もし V の点 M, N で $M \sim N$ かつ $M_i \neq N_i$ となるならば、$w(i) \neq 0$ かつ $M_i \equiv N_i \pmod{w(i)}$ である。

証明．$M_i < N_i$ として一般性を失わない。$M(0)=M$、$N(0)=N$，$M(k) = M \vee N(k-1)$，$N(k) = M(k) - M + N$ と点列 $\{M(k)\}$, $\{N(k)\}$ を定義すると、ある $k' > k \geq 0$ が存在して、$M(k') \sim M(k) \sim N(k)$、$M(k') \geq M(k) \vee N(k)$ となる。

2.6 of [6] より $\{a(q)\}$, $\{b(q)\}$, なる W の点列が存在して、$Z(M(k))$ の cycle $\{Z(q)\}$ について

$$
M(k') = M(k) + \Sigma_q a(q) Z(q) = N(k) + \Sigma_q b(q) Z(q)
$$

となる。3.5 of [6] により $\{Z(q)\}$ は直交系であるから、ある q が存在して $M(k')_i = M(k)_i + a(q)Z(q)_i = N(k)_i + b(q)Z(q)_i$ かつ $a(q) > b(q)$ となる。よって

$N_i - M_i = N(k)_i - M(k)_i = (a(q) - b(q))Z(q)_i$ となる。

従がって $w(i)$ の定義より $N_i \equiv M_i \pmod{w(i)}$ をうる。

7．定義、(V,h) を nodes J をもった finite state chart で特にある node i について $V|\{i\}=\{0,1,\cdots,k\}$ とする。r, ξ をそれぞれ $0<r<k$, $\xi \notin J$ なる数とし、nodes $\{i,\xi\}$ をもった $(V,h)|\{i\}$ の extension (V',h') を次の様に定義する。

$$V'=\{(j,0)\ ;\ 0\le j\le r\}\cup\{(j,1)\ ;\ r\le j\le k\},$$

$h'(M')_\xi = M'_\xi$, $h'(M')_i = h_i(M'_i)$ ここで $M'\in V'$ で h_i については 1.1 of [6] を参照されたい。$(V,h)|\{i\} = (V',h')|\{i\}$ であるから amalgamation $(V,h)\otimes(V',h')$ をつくれる。これを "nodes $\{\xi,J\}$ をもった (i,r) に関する type-1 extension という。

8．定義、(V,h) を nodes J をもった finite state chart で特にある node i について $\omega(i)\neq 0$ とする。a、b をそれぞれ $0\le a<\omega(i)$, $b>0$ なる数とし、数列 $\{a(k)\}$ を $a(k)=a+k\cdot\omega(i)$ と定義する。ξ を $\xi\notin J$ なる指数とし、三通りの extension (V',h') を次の様に定義する。どれも $(V,h)|\{i\}$ の extension でその nodes は $\{i,\xi\}$ である。

[type-2]: $V' = V'(0)\cup V'(1)\cup\cdots\cup V'(3b+1)\cup V'(\infty)$,

$V'(0)=\{(j,0)\ ;\ 0\le j<a\}$

$V'(3k-2)=\{(a(k-1),2k-2),\ (a(k-1),2k-1)\}$

$$V'(3k-1)=\{(a(k-1)+1,\ 2k-1),\ (a(k-1)+1,\ 2k)\}$$

$$V'(3k)\ =\{(j,\ 2k)\ ;\ a(k-1)+1<j<a(k)\}$$

$$k=1,2,\cdots,b$$

$$V'(3b+1)=\{(a(b),\ 2b),\ (a(b),\ 2b+1)\}$$

$V'(\infty)=\{(j,\ 2b+1)\ ;\ \ j>a(b)\}$ とする. 但し もし $a=0$ 又は $w(i)=2$ の時はそれぞれ $V'(0)$ 又は $V'(3k)$ は空集合とする。 M' を V' の点として $h'(M')_i=h_i(M'_i)$, $h'(M')_\xi=M'_\xi$ とする。

[type-3]: $V'=V'(0)\cup V'(1)\cup\cdots\cup V'(k)\cup\cdots$

$$V'(0)=\{(j,0)\ ;\ 0<j<a\}$$

$$V'(4k-3)=\{(a(k-1),\ 2k-2),\ (a(k-1),\ 2k-1)\}$$

$$V'(4k-2)=\{(j,\ 2k-1)\ ;\ a(k-1)+1\leq j<a(k)-3\}$$

$$V'(4k-1)=\{(a(k)-2,\ 2k-1),\ (a(k)-2,\ 2k)\}$$

$$V'(4k)\ =\{(a(k)-1,\ 2k)\}$$

但し、$a=0$ 又は $w(i)=3$ の時は $V'(0)$ 又は $V'(4k-2)$ は空集合とし、$w(i)=2$ の時はこの type の extension は定義しない。 M' を V' の点として、$h'(M')_i=h_i(M'_i)$, $h'(M')_\xi=M'_\xi\ (\mathrm{mod}\ 2b)$ とする。

[type-4]: $V'=\{(0,0)\}\cup\{(j,\ j-1),\ (j,\ j)\ ;\ j\geq 1\}$ 但し $w(i)\geq 3$ の時はこの type の extension は定義しない。 M' を V' の点として、$h'(M')$ を type-3 の時と同様に

定義する。

かようにして $(V, R)|\{i\}$ の extension type-2, 3, 4 を定義したわけですが、それらと (V, R) の amalgamation $(V, R) \otimes (V', R')$ をそれぞれ type-2,3,4 extension with respect to (i, a, b), (i, a, b), (i, b) とよぶ。

9. Lemma. (V, R) を nodes J をもった finite state chart、$(V^e, R^e) = (V, R) \otimes (V', R')$ を 7, 8 で定義した 4つの type の extension のうちの任意の1つとする。M^e, N^e を $R^e(M^e) = R^e(N^e)$ かつ $M^e|J \sim N^e|J$ なる V^e の点とすると、$M^e \sim N^e$ である。

証明. 6. lemma 及び 6.6 of [6] を用いることにより証明できる。より厳格な証明を欲するならば、各 extension を change chart を用いて表現しくもできるが、ここではふれないことにする。

10. Lemma (Hattori [10]). (V, R) を finite state chart、$T(\alpha)$, $T(\beta)$ を $T(\beta) \neq T(\alpha)$ なる similarity class とすると、ある node $i \in J$ が存在して、任意の $M \in T(\alpha)$, $N \in T(\beta)$ について $N_i > M_i$ となりかつ M_i は定数である。

証明、$Q(0)$ を $Z(T(\alpha))$ の unspanned node とする。$T(\beta) \neq T(\alpha)$ で $T(\alpha)$ が v-similarity class なることより、ある node $i \in Q(0)$ が存在して、任意の $M \in T(\alpha)$, $N \in T(\beta)$ について、$M_i < N_i$ となる。一方 1 により M_i は定数である。

11. 定理、(V, R) を nodes J をもった finite state chart、$\kappa = (T(\alpha), T(\beta))$ を $T(\beta) \neq T(\alpha)$ なる knotty set K の元とすると、κ-extension で nodes $\{\xi, J\}$ をもったものが存在する。但し ξ は $\xi \notin J$ なる指数である。

証明. 10において存在を示された特別な node を i とすると、$T(\alpha)$ は node i では定数であるからそれを $(\gamma - 1)$ とする。もし $V\{i\} = \{0, 1, \cdots, k\}$ ならば (V^e, R^e) を type-1 extension with respect to (i, γ) とし、一方もし $\omega(i) \geq 2$ だったら a, b を $\gamma = b \cdot \omega(i) + a$ $0 \leq a < \omega(i)$ として、(V^e, R^e) を type-2 extension with respect to (i, a, b) とすれば、9 lemma 及び、簡単な計算により κ-extension であることがわかる。

12. Lemma (Hattori [10]). J を空でない有限個の指数の集合、$P(1), P(2), Z$ を $P(1) \not\equiv P(2) \pmod{2}$ なる

W^J の点とする。 W^Jの部分集合 $S(1), S(2)$ を

$S(1)=\{P(1)+rZ;\ r\in W\}$, $S(2)=\{P(2)+rZ;\ r\in W\}$

と定義すると、ある正整数kが存在して、$S(1), S(2)$ をそれぞれk個の disjoint union $S(1)=\bigcup_{t=0}^{k-1} S(1,t)$, $S(2)=\bigcup_{t=0}^{k-1} S(2,t)$ 但し, $S(1,t)=\{P(1)+tZ+rkZ;\ r\in W\}$

$S(2,t)=\{P(2)+tZ+rkZ;\ r\in W\}$,

で表わすと、任意の $(t,s)\in\{0,1,\dots,k-1\}\times\{0,1,\dots,k-1\}$ に対してある node $i\in J$ が存在して、$M_i\not\equiv N_i \pmod{kZ_i}$ が任意の $M\in S(1,t)$, $N\in S(2,s)$ について成り立つ。

13. 定理. (V,R) を nodes J をもった finite state chart、$\kappa=(T(\alpha),T(\beta))$ を $T(\alpha)\mathcal{E}T(\beta)$ i.e., $T(\alpha)\succsim T(\beta)$ かつ $T(\beta)\succsim T(\alpha)$, ある knotty set Kの元とすると、nodes $\{\xi, J\}$ をもった κ-extension (V^e,R^e) が存在する。但し ξ は $\xi\notin J$ なる指数である。

証明. 7.2 of [6] により $T(\alpha),T(\beta)$ は同一の cycle $\{Z(1),\dots,Z(m)\}$ をもつ。各 $Z(q)$, $q=1,\dots,m$, の張る nodes を $Q(q)$ とし $Q(0)$を $J-\bigcup_q Q(q)$ とする。$T(\alpha)$, $T(\beta)$ は nodes $Q(0)$ に関しては定ベクトルでありかつ $T(\alpha)\mathcal{E}T(\beta)$ であるから $Q(0)$では等しい。従がって (3) of 1 によりある cycle $Z\in\{Z(1),\dots,Z(m)\}$ が存在して、その張る

nodesをQとすると、$M|Q \not\equiv N|Q \pmod{Z|Q}$が全ての$M \in T(\alpha)$, $N \in T(\beta)$について成立する。1により

$T(\alpha)|Q = \{P^q(\alpha) + \gamma(Z|Q);\ \gamma \in W\}$

$T(\beta)|Q = \{P^q(\beta) + \gamma(Z|Q);\ \gamma \in W\}$ とかける、但し$P^q(\alpha)$、$P^q(\beta)$はそれぞれ$T(\alpha)|Q$, $T(\beta)|Q$の最少点である。従がって$P^q(\alpha) \not\equiv P^q(\beta) \pmod{Z|Q}$である。簡単の為に、$T(\alpha)|Q$, $T(\beta)|Q$, $Z|Q$, の代わりに$T^q(\alpha)$, $T^q(\beta)$, Z^qとかく。

12 lemmaで存在を示された特別な数をkとし、$T^q(\alpha)$, $T^q(\beta)$をそれぞれk個のdisjoint union $T^q(\alpha) = \bigcup_{t=0}^{k-1} T^q(\alpha, t)$、$T^q(\beta) = \bigcup_{t=0}^{k-1} T^q(\beta, t)$で表わす。各$(t,s) \in \{0,1,\cdots,k-1\}^2$について$K(t,s)$を$K(t,s) = \{T(\alpha,t), T(\beta,s)\}$、但し$T(\alpha,t) = \{M \in T(\alpha);\ M|Q \in T^q(\alpha,t)\}$, $T(\beta,s) = \{M \in T(\beta);\ M|Q \in T^q(\beta,s)\}$、と定義する。もし任意の$K(t,s)$に対して$K(t,s)$-extension $(V^{(t,s)}, h^{(t,s)})$が存在するならば、$\bigotimes_{(t,s)} (V^{(t,s)}, h^{(t,s)})$が$K$-extensionになることは容易にわかる。従ってこれから$K(t,s)$について考える。(t,s)を1つとり、それに対して、12で存在を示された特別なnodeをiとする。u, vをそれぞれ$T(\alpha,t)|\{i\}$, $T(\beta,s)|\{i\}$の最少数とし、$u \leq v$として一般性を失わない。一方$u \not\equiv v \pmod{kZ_i}$であるから、ある数$c$が存在して、$u + ckZ_i < v < +(c+1)kZ_i$となる。以下$W(i) = 2$と$W(i) \geq 3$の2つの場合に分ける。

[$w(i)=2$] ： b を $kz_i = b\,w(i) = 2b$ とする。$kz_i \geq 4$ であるから $b \geq 2$ である。(V^e, R^e) を type 4 extension with respect to (i, b) とする。

[$w(i) \geq 3$] ： a, b, q を $u+1 = q \cdot w(i) + a$, $0 \leq a < w(i)$, $kz_i = b \cdot w(i)$ とする。(V^e, R^e) を type-3 extension with respect to (i, a, b) とする。

すると、いずれの場合にも、9 lemma 及び少々複雑な計算により (V^e, R^e) が $K(t, s)$-extension である事が分る。

以上により K-extension を構成する手順は与えられたが、それらは一般に与えられた p に対して p 値とはならない。従がって次の定義と lemma により、今までの結果を利用して p 値 K-extension を構成するわけですが、ここではそれにはふれないことにする。

14．定義．(V, R) を nodes J をもった finite state chart、(V^e, R^e), $(\hat{V}, \hat{R})$ をそれぞれ nodes J^e, $\hat{J}$ をもった (V, R) の extension で特に、次の (1)(2)(3)(4) を満たす、V^e から $\hat{V}$ への onto mapping が存在するとする。

(1) $M^e|J = f(M^e)|J$

(2) $M^e \geq N^e \iff f(M^e) \geq f(N^e)$

(3) もし $M^e \sim N^e$ かつ $L^e \in V^e_{M^e}$ とすると、

$$f(M^e + L^e) - f(M^e) = f(N^e + L^e) - f(N^e)$$

(4) $R^e(M^e) = R^e(N^e) \Leftrightarrow \hat{R}(f(M^e)) = \hat{R}(f(N^e))$

この時 f を(V,R)上の不変写像、$(\hat{V}, \hat{R})$ を (V^e, R^e) の(V,R)上の不変像とよぶ。

15. *Lemma.* (V,R) を nodes J をもった finite state chart、T,S を V の disjoint な部分集合、(V^e, R^e) を (T,S) extension とする。(V^e, R^e) の(V,R)上の不変像を $(\hat{V}, \hat{R})$ とすると、$(\hat{V}, \hat{R})$ も又 (T,S)-extension である。

最後にここで得た結論を述べる。

16. 定理. (V,R) を finite state chart とすると、その digital extension を構成する手順がある。もし (V,R) が p-進、physical ならば、p-進、physical な digital extension を構成できる。