

locally C^* -algebra について

大 理 井 上 淳

§0 序

R. Arens と E. Michael は topological algebra の 1 種である locally m -convex algebra を紹介し研究した。ここで、これをもとにして、 C^* -condition をもった complete locally m -convex $*$ -algebra (我々は locally C^* -algebra とよぶ) を紹介し、研究することにしよう。locally C^* -algebra を一般化する。

§1 において準備をし、§2 において commutative locally C^* -algebra の functional representation をし、§3 において、 C^* -algebra が Hilbert space 上の operator algebra の uniformly closed $*$ -subalgebra と isomorphic であるという事実の拡張を考える。即ち locally

!

C^* -algebra はある operator algebra の closed $*$ -subalgebra と isomorphic であることを示す。

§1. 準備

定義 1.1. 次の条件をみたす seminorms の族 $\{P_j\}_{j \in J}$ が存在するとき、 $*$ -algebra A は (complete) locally m -convex $*$ -algebra ($\angle MC *$ -alg.) とよばれる。

(1) $\{P_j\}_{j \in J}$ が A 上の Hausdorff (complete)

locally convex topology を定義する。

(2) $P_j(xy) \leq P_j(x)P_j(y)$ for $\forall x, y \in A, \forall j \in J$

(3) $P_j(x^*) = P_j(x)$ for $\forall x \in A, \forall j \in J$

定義 1.2. 特に上の seminorms の族 $\{P_j\}$ が

(4) $P_j(x^*x) = P_j(x)^2$ for $\forall x \in A, \forall j \in J$

をみたすようにとれるとき complete $\angle MC *$ -alg.

A を locally C^* -algebra とよぶことにする。

そして $\{P_j\}_{j \in J}$ を C^* -seminorms の族とよぶ。

次に locally C^* -algebra の例をあげよう。

(1) C^* -algebra は locally C^* -algebra.

(2) C^* -algebras の cartesian product は locally C^* -algebra である。

(3) T を *completely regular topological space* とする. として $\{D_i\}$ を 「 $\bigcup_i D_i = T$, D_i のあらゆる有限個の和はある D_j に含まれる」 をみたす T の *compact subsets* の族とする. ここで $A = C(T)$ (T 上の連続関数の全体) に D_i 上での *uniform convergence* の *topology* を入れると $C(T)$ は *locally C^* -algebra* になる.

我々は今, あらゆる *locally C^* -algebra* がある意味で C^* -algebras によって生成されることを示す. この系では A を C^* -seminorms の族 $\{p_j\}_{j \in J}$ をもつ *locally C^* -alg.* とする.

任意の $j \in J$ に対して,

$$U_j = \{x \in A \mid p_j(x) \leq 1\}$$

$$N_j = \{x \in A \mid p_j(x) = 0\}$$

$$A_j = A/N_j$$

π_j : A から A_j への *natural homomorphism*

$$x_j = \pi_j(x)$$

とおくと, A_j は *norm* $\|x_j\| = p_j(x)$ をもつ *normed $*$ -algebra* になり $\|x_j^* x_j\| = \|x_j\|^2$ をみたすことは明らかである. よって A_j のこの *norm* による完備化 $\overline{A_j}$ は C^* -algebra になる. 次に *index set* J は次のように順序づけられる.

$$i < j \Leftrightarrow U_j \subset U_i \\ \Leftrightarrow P_i(x) \leq P_j(x) \text{ for } \forall x \in A$$

$i < j$ のとき

$$\pi_{ij} : x_j \in A_j \longrightarrow x_i \in A_i$$

は A_j から A_i 上への norm-decreasing homomorphism
 によって π_{ij} は \bar{A}_j から \bar{A}_i の dense $*$ -subalgebra 上への
 norm-decreasing homomorphism π_{ij} へ拡張でき
 る。いま π_{ij} に関する \bar{A}_j の projective limit を $\mathcal{L}P(A)$
 とする。すなわち

$$\mathcal{L}P(A) = \left\{ x \in \prod_j \bar{A}_j ; \pi_{ij}(\pi_j(x)) = \pi_i(x) \right. \\ \left. \text{whenever } j > i \right\}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } \prod_j \bar{A}_j : \{ \bar{A}_j \} \text{ の cartesian product} \\ \pi_j : \prod_j \bar{A}_j \text{ から } \bar{A}_j \text{ への projection} \end{array} \right)$$

を考えよう。

定理 1.1.

- (1) A は $\mathcal{L}P(A)$ と isomorphic である
- (2) 任意の j に対して $x(j) \in \bar{A}_j$. かつ $j > i$ のときいつでも $\pi_{ij}(x(j)) = x(i)$ ならば, すべての j に対して $x_j = x(j)$ をみたす $x \in A$ が存在する。

(証明) $\mathcal{L}P(A)$ が $\prod_j \bar{A}_j$ の $*$ -subalgebra であり,

$\{ \mathcal{L}P(A) \cap \pi_j^{-1}(U_j) \}$ は $\mathcal{L}P(A)$ に対する base である

4.

ことは明らか。いま canonical map.

$$\phi: A \longrightarrow \prod_j \bar{A}_j \quad (\phi(x) = \{x_j\})$$

を考えると ϕ は into isomorphism で $\phi(A) \subset \mathcal{L}\mathcal{P}(A)$ をみたす。よして

$$\bar{\pi}_j(\phi(A)) = \pi_j(A) = A_j \subset \bar{\pi}_j(\mathcal{L}\mathcal{P}(A)) \subset \bar{A}_j$$

従って、すべての j に対して $\bar{\pi}_j(\phi(A))$ は $\bar{\pi}_j(\mathcal{L}\mathcal{P}(A))$ で

dense. よって $\phi(A)$ は $\mathcal{L}\mathcal{P}(A)$ で dense である。

一方 A は complete. よって $\phi(A)$ も complete.

ゆえに $\phi(A) = \mathcal{L}\mathcal{P}(A)$.

定理 1.2.

(1) x ; quasi-regular in A

$$\Leftrightarrow x_j \text{ ; g. r. in } \bar{A}_j \text{ for } \forall j \in J.$$

(2) A が単位元をもつ \Leftrightarrow あらゆる \bar{A}_j が単位元をもつ

(3) x ; invertible in A

$$\Leftrightarrow x_j \text{ ; invertible in } \bar{A}_j \text{ for } \forall j \in J.$$

系 1.1.

$$(1) \Sigma_A(x) = \bigcup_j \Sigma_{\bar{A}_j}(x_j)$$

$$(2) \delta_A(x) = \sup_j \delta_{\bar{A}_j}(x_j) = \sup_j \sqrt[n]{\rho_j(x^n)}$$

(但し $\Sigma_A(x)$ は A での x の spectrum ためし x が A での invertible でないなら $\{0\}$ を加えたもの
 $\delta_A(x)$ は x の spectral 半径

§2. 可換な locally C^* -algebra.

この § をとおして A を C^* -seminorms の族 $\{p_j\}_{j \in J}$ をもつ可換な locally C^* -algebra, $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$, $U_j = \{x \in A; p_j(x) \leq 1\}$ とする.

記号 A^* : A の conjugate space

U_j° : U_j の polar

$$S(A) = \{f \in A^*; f(xy) = f(x)f(y) \text{ for } \forall x, y \in A\}$$

$$S(A, j) = S(A) \cap U_j^\circ$$

$$S(\bar{A}_j) = \{f_j \in \bar{A}_j^*; f_j(xy) = f_j(x)f_j(y) \text{ for } \forall x, y \in \bar{A}_j\}$$

これらに weak topology $\sigma(A^*, A)$ による relative topology を導入する.

補題

$$(1) S(A) = \bigcup_j S(A, j)$$

(2) すべての $j \in J$ に対して $S(A, j)$ は $S(\bar{A}_j)$ と homeomorphic

(3) すべての $j \in J$ に対して $S(A, j)$ は compact.

(証明) (1): $\bigcup_j S(A, j) \subset S(A)$ は明らか. 逆に $f \in S(A)$ とする. f は連続であるからある $j \in J$ と constant γ が存在して $|f(x)| \leq \gamma p_j(x)$ をみたす. ここで $f_j(x_j) = f(x)$ とおくと f_j は $f_j(x_j y_j) = f_j(x_j) f_j(y_j)$, $|f_j(x_j)| = |f(x)| \leq \gamma p_j(x) = \gamma \|x_j\|$. 従って f_j は \bar{A}_j 上の連続関数である. それゆえ, f_j は \bar{A}_j 上の連続 ~~関数~~ 関数 \rightarrow 連続関数の拡張で

きる。それをまた f_j によってかくことにする。すると $f_j \in S(A)$ であることは明らか。従って $\|f_j\| \leq 1$ ゆえに

$$\sup_{x \in U_j} |f(x)| = \sup_{x \in U_j} |f_j(x_j)| \leq \|f_j\| \leq 1$$

よって $f \in U_j^0$ 以上から $f \in S(A, j)$

(2) mapping: $f \in S(A, j) \rightarrow f_j \in S(\bar{A}_j)$ (但し f_j は (1) でつくった函数) は $S(A, j)$ から $S(\bar{A}_j)$ 上への bijection であることは明らかにわかる。さらに map. $f \rightarrow f_j$ が open mapping であることは f_j の定義からすぐわかる。

map. $f \rightarrow f_j$ の連続性を示そう。 f_j の任意の W^* -近傍の subbase $N(f_j; \bar{x}_j; \varepsilon) = \{f \in S(\bar{A}_j); |f(\bar{x}_j) - f_j(\bar{x}_j)| < \varepsilon\}$ ($\bar{x}_j \in \bar{A}_j, 0 < \varepsilon < 1$) をとり出し固定する。 A_j は \bar{A}_j で dense であるから $\|\bar{x}_j - x_j\| < \frac{\varepsilon}{4}$ をみたす $x \in A$ が存在する。よって f の W^* -近傍 $N(f; x; \frac{\varepsilon}{2})$ をとると $f \rightarrow f_j$ によって $N(f; x; \frac{\varepsilon}{2})$ は $N(f_j; \bar{x}_j; \varepsilon)$ の中に写される。

事実 $g \in N(f; x; \frac{\varepsilon}{2})$ に対して

$$\begin{aligned} & |f_j(\bar{x}_j) - g_j(\bar{x}_j)| \\ & \leq |f(x) - g(x)| + |f_j(\bar{x}_j - x_j)| + |g_j(\bar{x}_j - x_j)| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \|f_j\| \|\bar{x}_j - x_j\| + \|g_j\| \|\bar{x}_j - x_j\| \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon \end{aligned}$$

(3) (2) によって $S(A, j)$ と $S(\bar{A}_j)$ は homeomorphic. $S(\bar{A}_j)$ は compact. ゆえに $S(A, j)$ も compact.

zero function で 0 に等る $S(A)$ 上の複素数値連続関数の全体を $C_0(S(A))$ とし, $C_0(S(A))$ に次の演算と semi-norm を導入する. $X, Y \in C_0(S(A)), f \in S(A)$ に対して

$$(X+Y)(f) = X(f) + Y(f)$$

$$(\lambda X)(f) = \lambda X(f)$$

$$(XY)(f) = X(f)Y(f)$$

$$(X^*)(f) = \overline{X(f)}$$

$$\rho_j(X) = \sup_{f \in S(A, j)} |X(f)|$$

すると $C_0(S(A))$ は locally C^* -algebra になる.

定理 可換な locally C^* -algebra A は locally C^* -algebra $C_0(S(A))$ と isomorphic である.

(証明) 任意の $j \in J$ に対して A_j は可換な C^* -algebra であるから, 任意の $x_j \in A_j$ と $f_j \in S(A_j)$ に対して

$$[\pi_j(x_j)](f_j) = f_j(x_j) \text{ なる } A_j \text{ から } C_0(S(A_j)) \text{ 上への}$$

isometric isomorphism π_j が存在する. $S = S(A)$

$$= \bigcup_j S(A, j) \text{ なるある } j \in J \text{ があって } f \in S(A, j).$$

ここで任意の $x \in A$ に対して, $S(A)$ 上の関数 $\pi(x)$ を次のように定義する

$$[\pi(x)](f) = [\pi_j(x_j)](f_j) = f_j(x_j) = f(x).$$

上の $\pi(x)$ は $S(A)$ 上の連続関数, よって $\pi(x) \in C_0(S(A))$.

また $\pi_j(x_j)$ が $*$ -homo. であるから, $\pi(x)$ も $*$ -homo.
 さらに,
$$\begin{aligned} \rho_j(\pi(x)) &= \sup_{f \in S(A, j)} |[\pi(x)](f)| \\ &= \sup_{f \in S(A, j)} |f(x)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{一方 } \rho_j(x) &= \|x_j\| = \|\pi_j(x_j)\| \\ &= \sup_{f_j \in S(\bar{A}_j)} |[\pi_j(x_j)](f_j)| \\ &= \sup_{f_j \in S(\bar{A}_j)} |f_j(x_j)| \end{aligned}$$

map. $f \in S(A, j) \longrightarrow f_j \in S(\bar{A}_j)$ は bijection であるから $\rho_j(\pi(x)) = \rho_j(x)$, よって $x \in A \rightarrow \pi(x) \in C_0(S(A))$ は 1:1 である. map. $x \rightarrow \pi(x)$ が onto であることを示せばこの定理は成り立つ. 任意の $X \in C_0(S(A))$ に対して

$$X(j)(f_j) = X(f) \text{ for } \forall f_j \in S(\bar{A}_j)$$

とおくと $S(\bar{A}_j)$ と $S(A, j)$ は homeomorphic であるから $X(j) \in C_0(S(\bar{A}_j))$. \bar{A}_j と $C_0(S(\bar{A}_j))$ は isometric isomorphism であるから $\pi_j(x(j)) = X(j)$ とする $x(j) \in \bar{A}_j$ が存在する. $i < j$ のとき $\pi_{ij}(x(j)) = x(i)$ であることは $[\pi_{ij}(x(j))](f_i) = X(f) = [X(i)](f_i)$ であることによりすぐわかる. Theorem 1.1. により, $x \in A$ が存在して, 任意の $j \in J$ に対して $x_j = x(j)$ が成り立つ. よって $\pi_j(x_j) = X(j)$. 従って, 任意の $f \in S(A)$ に対して $[\pi(x)](f) = [\pi_j(x_j)](f_j) = X(j)(f_j) = X(f)$ よって $\pi(x) = X$, 従って $x \rightarrow \pi(x)$ は onto.

系 $A = C_0(S(A))$ の位相では次の2つの位相と一致する。

- (1) $S(A)$ の *equicontinuous subsets* 上の *uniform convergence* の位相。
- (2) $S(A)$ の *compact, equicontinuous subsets* 上の *uniform convergence* の位相。

(証明) E を $S(A)$ の *equicontinuous subset* とする。そのとき、 A の 0 の近傍 U が存在して $E \subset U^\circ \cap S(A)$ とする。 U° は位相 $\sigma(A^*, A)$ をもった A^* で *compact* である。 $S(A) = \bigcap_{x, y \in A} \{f \in A^* ; f(xy) - f(x)f(y) = 0\}$ で、 $x \rightarrow f(x)$, $xy \rightarrow f(xy)$ が連続であるから、 $S(A)$ は A^* の *closed subsets* である。よって $U^\circ \cap S(A)$ は $S(A)$ の *compact subset* である。だから (1), (2) の位相は一致する。その位相を τ_0 とする。今任意の $X \in C_0(S(A))$ に対して $\rho_j(X) = \sup_{f \in S(A, j)} |X(f)|$, $S(A, j) = S(A) \cap U_j^\circ$ は $S(A)$ の *equicontinuous subset* である。よって $\tau < \tau_0$ 1 有 E が $S(A)$ の *equicontinuous subset* とすると $E \subset U^\circ$ をみたす A の 0 の近傍 U が存在する。よって $E^\circ \supset U$ によつて $\tau_0 < \tau$ 。

§ 3. locally C^* -algebra の representation theory
 この § で locally Hilbert space \mathcal{H} を定義し \mathcal{H} 上の
 ある continuous linear operators の algebra $\mathcal{A}(\mathcal{H})$
 を考える. そのとき $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ は locally C^* -algebra であり
 また任意の locally C^* -algebra は $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ の closed
 $*$ -subalgebra と isomorphic であることを示す.

$\Lambda = (\alpha)$ が directed ordered set で, 任意の $\alpha \in \Lambda$ に
 対して内積 $(\cdot, \cdot)_\alpha$ をもった Hilbert space \mathcal{H}_α が与え
 られているとする. そして Hilbert spaces の族 $\{\mathcal{H}_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$
 が $\alpha < \beta$ のときいつでも $\mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}_\beta$ かつ \mathcal{H}_α 上で $(\cdot, \cdot)_\alpha$
 $= (\cdot, \cdot)_\beta$ を満足するものとする. そのとき vector
 space $\mathcal{H} = \bigcup \mathcal{H}_\alpha$ を考え \mathcal{H} に次のような位相を導入する.

定義 3.1. X : closed subset in \mathcal{H}

$\Leftrightarrow \exists \alpha \in \Lambda$; " $X = \mathcal{H}_\alpha$ " or " X closed subset in \mathcal{H}_α "

\mathcal{K} を \mathcal{H} のすべての closed subsets の族とする.

補題 \mathcal{K} によつて \mathcal{H} は topological space で T_1 -space になる.

(証明)

(1) $\mathcal{H} \in \mathcal{K}$

(2) $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}$ のとき $\bigcup_{i=1}^n X_i \in \mathcal{K}$ を示す. $X_i = \mathcal{H}_{\alpha_i}$ なる $1 \leq i \leq n$ があるときは $\bigcup_{i=1}^n X_i = \mathcal{H}_{\alpha} \in \mathcal{K}$, すべての
 11.

$1 \leq i \leq n$ に対して $X_i \subseteq \mathcal{H}$ のとき \mathcal{H} の closed subsets の定義により任意の i に対し $\alpha_i \in \Lambda$ が存在して X_i は \mathcal{H}_{α_i} で closed である。 Λ は directed set であるから、ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{H}_{\alpha_i} \subset \mathcal{H}_\alpha$ かつ $(/)_{\alpha_i} = (/)_\alpha$ ($i=1, \dots, n$) から X_i は \mathcal{H}_α の closed subset である。 よって $\bigcup_{i=1}^n X_i$ は \mathcal{H}_α の closed subset. 従って $\bigcup_{i=1}^n X_i \in \mathcal{F}$.

(3) $(X_\lambda)_\lambda \subset \mathcal{F}$ なる $\bigcap_\lambda X_\lambda \in \mathcal{F}$ を示す。 任意の λ に対して $X_\lambda = \mathcal{H}$ のときは $\bigcap_\lambda X_\lambda = \mathcal{H} \in \mathcal{F}$. よって $X_{\lambda_0} \subseteq \mathcal{H}$ なる $\lambda_0 \in (\lambda)$ のときを考えればよい。 $X = \bigcap_\lambda X_\lambda \subset X_{\lambda_0}$ として $X_{\lambda_0} \in \mathcal{F}$ かつ $X_{\lambda_0} \neq \mathcal{H}$ だからある $\alpha_0 \in \Lambda$ が存在して X_{λ_0} は \mathcal{H}_{α_0} の closed subset である。 $X = \bigcap_\lambda X_\lambda = \bigcap_\lambda X_\lambda \cap \mathcal{H}_{\alpha_0}$, $\alpha < \beta$ なる $(/)_\alpha = (/)_\beta$ によつて $X_\lambda \cap \mathcal{H}_{\alpha_0}$ は \mathcal{H}_{α_0} の closed subset である。 よつて $X \in \mathcal{F}$. 以上によつて \mathcal{H} は topological space であり \mathcal{H} が T_1 -space であることは明らか。

定義 3.2. 上の \mathcal{H} を locally Hilbert space とよぶことにする。

T を locally Hilbert space $\mathcal{H} = \bigcup_\alpha \mathcal{H}_\alpha$ 上の linear operator とする。 として $T_\alpha = T|_{\mathcal{H}_\alpha}$ とおく。 もし $\alpha < \beta$ なる \mathcal{H}_α は \mathcal{H}_β の closed subspace であるから \mathcal{H}_β から \mathcal{H}_α 上への projection $P_{\alpha\beta}$ を定義することができる。

ここで $\alpha < \beta$ なる α についても $T_\beta P_\alpha = P_\alpha T_\beta$ を満足する \mathcal{H} 上の linear operator T を考えよう。このような T に対して次のことが成り立つ。

補題 3.2.

T : continuous linear operator on \mathcal{H}
 $\Leftrightarrow T_\alpha$: bounded linear operator on \mathcal{H}_α
 for $\forall \alpha \in \mathcal{A}$.

(証明) \Rightarrow : $0 \in U_\alpha$ を \mathcal{H}_α の open subset とおす。
 $U = U_\alpha \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha)$ は \mathcal{H} の 0 の近傍、 T が連続であるからある $\beta \in \mathcal{A}$ と \mathcal{H}_β の 0 の近傍 V_β が存在して、
 $TV \subset U$, $V = V_\beta \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\beta)$. $V_\beta = \{z \in \mathcal{H}_\beta ; (z/z)_\beta < \delta\}$ と考えてよい。 \mathcal{A} は directed であるから $\alpha, \beta < \gamma$ なる $\gamma \in \mathcal{A}$ が存在する。ここで $V_\gamma = \{z \in \mathcal{H}_\gamma ; (z/z)_\gamma < \delta\}$ とおく。 $V_\gamma \cap \mathcal{H}_\beta = V_\beta$ から $V = V_\gamma \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\beta)$ として \mathcal{H} の 0 の近傍 $V' = V_\gamma \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\gamma)$ を考えよう。明らかに $V' \subset V$ かつ $TV' \subset U$ かつ $V_\alpha = V_\gamma \cap \mathcal{H}_\alpha = \{z \in \mathcal{H}_\alpha ; (z/z)_\alpha < \delta\}$ は \mathcal{H}_α の 0 の近傍である。そして $T_\alpha V_\alpha \subset U_\alpha$ であることがわかる。

事実、 $\forall z \in V_\alpha = V_\gamma \cap \mathcal{H}_\alpha$ に対して、 $T_\alpha z = Tz \in T(V_\gamma \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\gamma)) \subset U$. 一方 $T_\alpha z \in \mathcal{H}_\alpha$. かつ $T_\alpha z \in U_\alpha$ といふゆゑ T_α は \mathcal{H}_α 上で連続。
 13.

\Leftarrow ; \bar{U} を \mathcal{H} の 0 の 開近傍 とする. そのときある $\alpha \in \Lambda$ と \mathcal{H}_α の 開近傍 U_α が存在して $\bar{U} = U_\alpha \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha)$ とかける.

T_α は \mathcal{H}_α で連続であるから $T_\alpha V_\alpha \subset U_\alpha$ なる \mathcal{H}_α の 0 の 開近傍 V_α が存在する. としてここで $V = V_\alpha \cup (\mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha)$ と

おくと V は \mathcal{H} の 0 の 近傍である. このとき $TV \subset \bar{U}$ であることを示す. 事実 $z \in V_\alpha$ なら $Tz = T_\alpha z \in U_\alpha \subset \bar{U}$

$z \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha$ なら $T_\beta P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} T_\beta$ ($\alpha < \beta$) から $Tz \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_\alpha \subset \bar{U}$.

定義 3.3. $\alpha < \beta$ ならいつでも $T_\beta P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} T_\beta$ をみたす \mathcal{H} 上の continuous linear operators の全体を $\alpha(\mathcal{H})$ とかくことにする.

定理 3.1. $\alpha(\mathcal{H})$ は locally C^* -algebra である.

(証明). $T \in \alpha(\mathcal{H})$, $\alpha \in \Lambda$ に対して seminorm.

$P_\alpha(T) = \|T_\alpha\| = \sup_{\substack{z \in \mathcal{H}_\alpha \\ \|z\| \leq 1}} \|T_\alpha z\|$ を導入する. この

semi-norms の族 $\{P_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ で $\alpha(\mathcal{H})$ の topology を定義する. いま $\alpha(\mathcal{H})$ に involution を導入しよう.

$T \in \alpha(\mathcal{H})$, そのとき任意の $\alpha \in \Lambda$ に対して $T_\alpha \in B(\mathcal{H}_\alpha)$.

よって $T_\alpha^* \in B(\mathcal{H}_\alpha)$. $\alpha < \beta$ のとき $P_{\alpha\beta} T_\beta = T_\beta P_{\alpha\beta}$

から $T_\beta^* P_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta} T_\beta^*$ は明らか. よって $T_\beta^* \mathcal{H}_\alpha \subset \mathcal{H}_\alpha$.

$z, z \in \mathcal{H}_\alpha$ に対して

$$(T_\beta^* z / z)_\beta = (T_\beta^* z / z)_\alpha$$

$$\begin{aligned} (T_\beta^* \xi / \xi)_\beta &= (\xi / T_\beta \xi)_\beta = (\xi / T_\alpha \xi)_\alpha \\ &= (T_\alpha^* \xi / \xi)_\alpha. \end{aligned}$$

従って $T_\beta^* \xi = T_\alpha^* \xi$ for $\forall \xi \in \mathcal{H}_\alpha$. 以上によつて $\xi \in \mathcal{H}$ なら ある $\alpha \in \Lambda$ が存在して $\xi \in \mathcal{H}_\alpha$. ことに $T^* \xi$ " $T^* \xi = T_\alpha^* \xi$ " と定義する. この定義は well-defined かつ $P_\alpha T_\beta^* = T_\beta^* P_\alpha$, $T_\beta^* / \mathcal{H}_\alpha = T_\alpha^*$ から $T^* \in \mathcal{A}(\mathcal{H})$.
 そして T^* は involution in $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ であることは明らか. 任意の α に対して.

$$\begin{aligned} P_\alpha (T_1 T_2) &\leq \| (T_1 T_2)_\alpha \| = \| (T_1)_\alpha (T_2)_\alpha \| \\ &\leq \| (T_1)_\alpha \| \cdot \| (T_2)_\alpha \| = P_\alpha (T_1) P_\alpha (T_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\alpha (T^*) &= \| (T^*)_\alpha \| = \| T_\alpha^* \| = \| T_\alpha \| \\ &= P_\alpha (T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_\alpha (T^* T) &= \| (T^* T)_\alpha \| = \| T_\alpha^* T_\alpha \| = \| T_\alpha \|^2 \\ &= P_\alpha (T)^2 \end{aligned}$$

$\mathcal{A}(\mathcal{H})$ の完備性は明らか. 以上から $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ は locally C^* -algebra である.

定理 3.2.

A : locally C^* -algebra
 $\Rightarrow \exists$ locally Hilbert space \mathcal{H}
) A は $\mathcal{A}(\mathcal{H})$ の closed $*$ -subalgebra と isomorphic

(証明). A を C^* -seminorm の族 $\{P_j\}_{j \in J}$ をもった. locally C^* -algebra とある. 任意の $j \in J$ に対して, \overline{A}_j は C^* -algebra であるから, ある Hilbert space H_j と \overline{A}_j から $B(H_j)$ (H_j 上の bounded linear ops の全体) の中への isometric isomorphism π_j が存在する. いま $h_j = \bigoplus_{k \leq j} H_k$, 任意の $x \in A$ に対して,

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_j(x) &= \bigoplus_{k \leq j} \pi_k(x_k) \text{ とおく. そのとき.} \\ \|\overline{\pi}_j(x)\| &= \sup_{k \leq j} \|\pi_k(x_k)\| \\ &= \sup_{k \leq j} \|x_k\| = \|x_j\| \\ &= P_j(x) \end{aligned}$$

それゆゑ $\overline{\pi}_j(x) \in B(h_j)$

$i < j$ のとき $h_i \subset h_j \oplus 0 \subset h_j$ と同一視して考えよ. h_i は h_j の closed subspace と考えよ. そのとき locally Hilbert space $h = \bigcup_j h_j$ をつくることができる. $\xi = \bigoplus_{k \leq j} \xi_k \in h_j$ のとき,

$$\begin{aligned} \overline{\pi}_j(x) P_{ij} \xi &= \overline{\pi}_j(x) \left(\left(\bigoplus_{k \leq i} \xi_k \right) \oplus 0 \right) \\ &= \left(\bigoplus_{k \leq i} \pi_k(x_k) \right) \left(\bigoplus_{k \leq i} \xi_k \right) \\ &= \bigoplus_{k \leq i} \pi_k(x_k) \xi_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{ij} \overline{\pi}_j(x) \xi &= P_{ij} \left(\bigoplus_{k \leq j} \pi_k(x_k) \xi_k \right) \\ &= \bigoplus_{k \leq i} \pi_k(x_k) \xi_k \end{aligned}$$

それゆゑ $\overline{\pi}_j(x) P_{ij} = P_{ij} \overline{\pi}_j(x)$

として $\bar{\pi}_j(x)/g_j = \bar{\pi}_i(x)$ は明らか. $\exists \in \mathcal{J}$ なる $\exists \in \mathcal{J}$ なる $j \in \mathcal{J}$ が存在するから, ここで $\pi(x)$ を " $\pi(x)\xi = \bar{\pi}_j(x)\xi$ " と定義する. そのとき $\pi(x) \in \mathcal{L}(\mathcal{J})$, 任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して $\bar{\pi}_j(x)$ は $*$ -homo. として $g_j(\pi(x)) = \|\bar{\pi}_j(x)\| = p_j(x)$ だから π は A の $\mathcal{L}(\mathcal{J})$ の中への isomorphism である.