数理解析研究所講究録
第124巻 1971年 37-57

von Neumann代数のextension property とその応用について

山形大 理 富山 淳

§1. 序

Banach空間Eがextension property(以下簡単のためEPとかく)をもつというのは任意のBanach空間Fとその任意の部分空間Gに対して線型な連続写像 T : G ⟶ E が与えられたとき、TをノルムをあげないでFへ拡大出来ることをいう。これは又同値な定義としてEを含む任意のBanach空間Fから常にノルムが1の射影が存在することともいえる。このような空間の構造は幾人かの人達によって研究されたが最終的な結果は荷見[5]によってあたえられ、EはあるStonean空間上の連続関数環と同型になることが知られている。さて後者は作用素環的に見れば可換なAW*-代数であり、従ってその特殊なものとして可換なvon Neumann代数は上のような性質をもっているわけである。これらのことを背景にここではEとFをC*-代数でとりかえたときに何が起るかを考えてみる。

中でも興味があるのはEがvon Neumann代数の時であり、このような意味で筆者は先に羽毛田との共著[6]においてextension propertyを導入したがvon Neumann代数の標準表現についての理論の不備のためそこでの基本定理も不十分な点があった。幸い現在では最近の富田—竹崎の理論[20] [22]によりその点がおぎなわれているのでここでの議論も比較的すっきりしてきている。本稿の後半はその応用としてC*-代数の新しい類別を考える。

§2. Extension property の定義

この節と次節では考えるC*-代数はすべて単位元をもつとする。以下の議論の元になるのはノルム1の射影については線型性より次のことが出てくるということである。

定理A.（[23]） AをC*-代数, BをそのC*-部分代数としπをAよりBへのノルム1の射影とする。ここで $\pi(1_A) = 1_B$ とする。（1_A, 1_B は夫々A, Bの単位元）。この時次のことが成立する。

1) π は positive 写像である。

2) $\pi(axb) = a\pi(x)b \quad (a, b \in B)$

3) $\pi(x)^*\pi(x) \leq \pi(x^*x)$

一般にAよりBへ射影πが存在したとき

$$\pi_1(x) = \pi(1_B x 1_B)$$

とおけば π_1については $\pi_1(1_A) = 1_B$ となる。よって以下においては $1_A = 1_B$ と常に仮定しても議論の本質は失なわれない。

Proposition 2.1. C^*-代数Bについて次のことは同値である。

1) Bを含む任意のC^*-代数AよりBにノルムが1の射影が存在する

2) 任意のC^*-代数Aとその任意の自己共役部分空間S（但し $1_A \in S$）について、SよりBへのcompletely positiveな写像θで $\theta(1_A) = 1_B$ をみたすものは常にAよりBへのcompletely positive写像に拡大出来る。

理由はノルムが1の射影はcompletely positiveであること、([27]) と 2)がB = B(H)の時には成立するということ([2; 定理1.2.3]) より出てくる。

定義2.1.（単位元をもつ）C^*-代数Bが上の性質をみたす時extension propertyをもつという。

定義より次のことは容易にたしかめられる。

補題2.1. EPは*－同型について不変である.

補題2.2. EPをもつC^*－代数はmonotone closedである.

ここでC^*－代数の中の自己共役元の有界有向増大列が常に上限をもつとき、この代数をmonotone closedという(cf.[10]).

上記Arvesonの結果を再び用いれば次のようにEPの定義を弱めることが出来る.

Proposition 2.2. C^*－代数BがEPをもつことと、Bがあるヒルベルト空間H上へ表現(忠実) ρ をもち、B(H)よりρ(B)にノルムが1の射影が存在することとは同値である.

§3. von Neumann代数の場合

以下の為に次の定理を引用する.([6], [26]).

定理B. M_1, M_2 をH上, N_1, N_2 をK上のvon Neumann代数とする. 今π_1, π_2 を夫々M_1, N_1よりM_2, N_2へのノルム1の射影とすると、ノルム1の射影

$$\pi ; M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$$

が存在して $\pi(a \otimes b) = \pi_1(a) \otimes \pi_2(b)$

定理3.1. MをH上のvon Neumann代数とするとMがEPをもつこととM'がEPをもつこととは同値である.

証明. 先ずMがH上に標準表現の形で作用しているもの

とする。([21] 参照)。即ちH上に conjugate linear で且つ $J^2=1$ となるようなユニタリ作用素Jが存在して $JMJ = M'$ となっているものとする。今1)を仮定して $B(H)$ より Mへのノルム1の射影を π とすると

$$\pi_1(x) = J\pi(JxJ)J \qquad (x \in B(H))$$

は $B(H)$ より M' への射影を与える。2) $\Rightarrow$ 1) も同様に言えるからこの時には定理が成立する。任意の von Neumann 代数は標準表現をもつことが現在では知られているから([20], [21]) 定理を完結するには結局次のことを証明すればよいことになる。

補題 3.1. Mが性質2) をもつときMと*-同型な von Neumann 代数N (on K) も又性質2)をもつ。

証明) ヒルベルト空間 K_0 を適当に次元を高くとれば、$H\otimes K_0$ と $K\otimes K_0$ への ampliation $M\otimes 1$ と $N\otimes 1$ は spatially isomorphic になる。今 π を $B(H)$ より M' への射影とする。定理Bより $B(H\otimes K_0)$ より $M'\otimes B(K_0)$ への射影が存在する。よって $(N\otimes 1)'$ への射影 π_1 が存在する。φ を $B(K_0)$ の normal state とし L_φ をそれに対応した左フビニ写像([26], [28])とすると

$$\pi_2(x) = L_\varphi(\pi_1(x\otimes 1)) \qquad (x \in B(K))$$

は $B(K)$ より N' へのノルムが1の射影である。

I型の von Neumann 代数は常に、commutant が可換な忠実表現をもつからすべて EP をもつことがわかる。

次に I型以外の EP をもつ von Neumann 代数の構成については次の結果が言える。

定理 3.2. H上の von Neumann 代数 M が EP をもつ von Neumann 部分代数 M_α の有向増大列より生成されるか又は有向減少列の共通部分としてかけるならば M 自身も又 EP をもつ。

証明. 前定理から後者についてのみ証明すれば十分である。π_α を M_α への射影とする。今 $\mathcal{L}(B(H), B(H))$ を $B(H)$ 上の有界線型作用素のつくる代数とし、その中に次の位相を考える。

$$T_\alpha \longrightarrow T \rightleftarrows T_\alpha(a) \longrightarrow T(a) \quad \sigma\text{-weakly} \quad \forall a \in B(H)$$

$\mathcal{L}(B(H), B(H))$ はこの位相によってその単位球が compact になる。π を $\{\pi_\alpha\}$ の極限点の一つとする。任意の $x \in B(H)$ と index α についてもし $\beta > \alpha$ ならば $\pi_\beta(x) \in M_\alpha$ となるから $\pi(x) \in M_\alpha$. よって $\pi(x) \in M$ となり、π は M へのノルム1の射影であることがわかる。

以上から II, III型の von Neumann 代数については任意の Hyperfinite factor 及びその commutant は EP を持つことが

言えたことになる。

次にEPをもたない von Neumann 代数であるが次の様なことが言える。Gをその共役類が(単位元の時を除いて)すべて無限個になるような可算 discrete な群とする。$A(G)$ をGの左正則表現から生成される von Neumann 代数とする。$A(G)$ は II_1 型の factor であることが知られているがこれについて

定理3.3. $A(G)$ が extension property をもつこととGが amenable であることとは同値である。

証明. π を $A(G)$ への射影として τ を $A(G)$ 上の normal faithful trace とすると、${}^t\pi(\tau)$ の $l^\infty(G)$ 上への制限はGの左不変平均になる。逆は、$A(G)$ のユニタリー群は正則表現によるGを部分群として含んでいると考えると、Dayの不動点定理により

$$\overline{\mathrm{con}}\,(uxu^* \mid u \text{ は } A(G) \text{ のユニタリー}) \cap A(G)' \neq \phi$$

ということが得られ、これから[18]における議論により $A(G)'$ が EPをもつことが結論出来るのである。ここで上の記号は $\{uxu^*\}$ $(x \in B(H))$ の weakly closed な convex hull を意味する。

non-amenable な群の典型的な例は、2ケの生成元をもつ自由群であり、これは又Gにつけられた条件を明らかに満足するから、それからつくられた $A(G)$ はEPをもたない。この

A(G) はよく知られているように non-hyperfinite factor の例にもなっている。が更に今迄つくられている non-hyperfinite factor は殆ど群 G が上の non-amenable 群の典型に比較的この意では近い構造をもっているように思える。amenability は hyperfinite 性との関連ではとりあげられたことがないが Extension property と hyperfinite 性との関連と合せて興味ある問題であると思う。

EP をもたない von Neumann 代数を更に求めることについては次のテンソル積についての結果がある。証明は定理 B 及びフビニ写像を用いればよい。

定理 3.5 $M \otimes N$ が EP をもつのは、M, N 共に EP をもつときその時に限る。

§4. E 型の C^*-代数, 及び NE 型の代数

GCR, NGCR 代数というよく知られた C^*-代数の類別は表現論的には意味のあるものであったが他方構造論的には GCR 代数の inductive limit が NGCR 代数になったりして思わしくない面がある。そこでここではこの様な面をとりのぞき構造論的に自然な C^*-代数の 1 つの類別を提唱する。

C^*-代数 A の表現 ρ について、$\rho(A)$ の弱位相による閉包 $\overline{\rho(A)}$ が von Neumann 代数として EP をもつとき、ρ を extension property

をもつという. 前節の議論を使えば境[15][16]の中の議論は一般論として次の形にまとめられる.

定理 4.1. A を C^*-代数 B をその C^*-部分代数とする. ρ を B の表現で EP をもつものとすると, A の表現 $\hat{\rho}$ と von Neumann 代数 M その部分代数 N が存在して, $\widehat{\rho(A)}'$ と M', N と $\widehat{\rho(B)}$ は同型であり, M より N への normal なノルム 1 の射影が存在する. 更に ρ が factor 表現であれば $\hat{\rho}$ も factor 表現にとることが出来る.

つまり B が A に比してどのように「小さな」部分代数であっても B の EP をもつ表現は上の意味で A の表現に影響をおよぼすわけである. 一般に normal な射影が存在する時は M が N に比べてより単純な代数にはなり得ないから ([24]), 例えば ρ を III 型の表現とすると $\hat{\rho}$ も III 型の部分表現をもち, 従って A は III 型の表現をもつ. $A = B(H)$, $B =$ III 型の hyperfinite factor などが上の結果のよい例であり [15] に使われた部分である.

定理の証明. $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ を A, B の second dual とする. $\tilde{A}$ は von Neumann 代数と考えられ, $\tilde{B}$ は自然な形でその弱閉な部分代数とみなすことが出来る. 補題 2.1 より表現 ρ の形を, $\tilde{B}$ の central projection により $\rho(x) = xp$ とかけてるものと考えてもよい. $\tilde{B}p$ は EP をもつから $p\hat{A}p$ より $\tilde{B}p$ にノルム 1 の射影 π が存在する. そこで今写像 $\bar{\pi}$ (A から $\tilde{B}p$ への) を

$$\Phi(x) = \pi(pxp)$$

と定義する。$\tilde{\Phi}$ を $\hat{A}$ への σ-weakly continuous な拡大とする。

$$\Phi(axb) = ap\,\Phi(x)bp \qquad (a, b \in B,\ x \in A)$$

であるから $\tilde{\Phi}$ は任意の $a, b \in \tilde{B}p$, $x \in \hat{A}$ について

$$\tilde{\Phi}(axb) = a\,\tilde{\Phi}(x)b$$

をみたす。よって $\tilde{\Phi}$ の $p\hat{A}p$ への制限は $\tilde{B}p$ への normal な射影になる。$c(p)$ を p の $\hat{A}$ での central support として

$$\hat{\rho}(x) = xc(p), \quad M = p\hat{A}p, \quad N = \tilde{B}p$$

とおけば求めるものが得られる。

次に ρ を factor 表現とする。$\mathcal{L}(A, \tilde{B}p)$ に定理3.2での証明の位相を考えその中で

$$F = \{\Phi \mid \|\Phi\| \le 1,\ \Phi \ge 0,\ \Phi(axb) = ap\Phi(x)bp \quad a, b \in B\}$$

を考える。F は単位球の中の閉凸集合になる。$\mathcal{L}(A, \tilde{B}p)$ の単位球は compact であったから F は extreme point をもつ。そこで F の non-zero な extreme point Φ をとる。$\tilde{B}p$ は factor だから $\tilde{\Phi}(p) = \lambda p$, これより $\lambda = 1$ が言えて $\tilde{\Phi}$ は射影になることがわかる。$\{e_\alpha\}$ を $p\hat{A}p$ の直交する central projection で $\tilde{\Phi}(e_\alpha) = 0$ となるものの極大な family とする。$z = p - \sup e_\alpha$ とおくと $\tilde{\Phi}$ は $z\hat{A}z$ の中心では faithful になる。今 $z\hat{A}z$ が non-trivial な central projection z_1 をもったとする。

$$\tilde{\Phi}(z_1) = \lambda p \qquad 0 < \lambda < 1$$

そこで $x \in p\hat{A}p$ について

$$\Phi_1'(x) = \frac{1}{\lambda}\tilde{\Phi}(xz_1), \quad \Phi_2'(x) = \frac{1}{1-\lambda}\tilde{\Phi}(x(z-z_1))$$

とおくとこれらは共に $p\hat{A}p$ より $\hat{B}p$ への positive な射影になる。よって更に $x \in A$ について

$$\Phi_1(x) = \Phi_1'(pxp), \quad \Phi_2(x) = \Phi_2'(pxp)$$

とおくと $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{F}$ で且つ

$$\Phi = \lambda\Phi_1 + (1-\lambda)\Phi_2,$$

これは Φ が端点であることに反する。よって $z\hat{A}z$ は factor になる。$c(z)$ を z の central support として以下

$$\hat{\rho}(x) = xc(z), \quad M = z\hat{A}z, \quad N = \hat{B}z$$

とおけばよい。

定義 4.1. C^*-代数 A の表現がすべて EP をもつ時 A を E 型の C^*-代数と呼ぶ。

定義から GCR 代数は E 型である。更に定理 3.2 を考えれば次のことが成立する。

Proposition 4.1. E 型の C^*-代数の C^*-inductive limit は又 E 型である。

よって UHF 代数又 Matroid 代数などは E 型になる。イデアルの表現は常に表現空間と弱閉包を変えないで全体の代数の表現に拡大出来るから、E 型の代数のイデアルは又 E 型

であり、又その homomorphic image も又E型である. しかし

"E型の代数のC^*-部分代数は又E型であるか?"

ということはわかっていない。もしこれが肯定的なら興味ある応用例を考えることが出来る.

GCR, NGCR の類別の元になったのは次の Kaplansky の結果であったが E型の代数についても同様なことが成立するというのが本節の基本定理である.

定理 (Kaplansky) 任意のC^*-代数 A には常に最大の GCR イデアル K が存在して, A/K は non-zero な GCR イデアルをもたない.

定理 4.2. 任意のC^*-代数 A には常に最大のE型のイデアル K_1 が存在して、A/K_1 は non-zero なE型のイデアルをもたない.

証明には次の2つの補題を示せばよく, どちらにもイデアルの表現の拡大の特性を用いればよい.

補題 4.1. $\overbrace{\text{E型}}^{\text{2つの}}$のイデアルの和 ($C^*$-代数になる) は又E型である.

補題 4.2. C^*-代数 A とイデアル I について A/I および I が共にE型ならば A 自身がE型である.

この定理によりC^*-代数 A が non-zero なE型のイデアルをもたないとき A を NE型の代数ということにする.

最近B.E. Johnsonは[11]において strongly amenableなC*-代数というクラスを導入した。Banach代数のcohomology理論を主としてとり扱っている[11]の出発点はここでの我々の議論と大分かけ離れているが彼のクラスはその表現がすべてSchwartz [18]の意味での性質Pをもつもつ C*-代数として定義出来るので、それはE型の代数の一部分になる。[ ]においてはこれについてProposition 4.1, 定理4.2の前半後述定理4.3の前半と同じ結果が証明されている。GCRを含みC*-inductive limitで閉じているC*-代数のクラスとしては他に竹崎[19]によって定義された性質Tをもつ C*-代数のクラスがある。ここでC*-代数Aが性質Tをもつとは任意のC*-代数Bについて、その代数的テンソル積A⊙Bの中にcompatible C*-ノルムが一通りしかないことをいう。これについては

"E型のC*-代数と、性質TをもつC*代数のクラスは同じではないか"

ということが予想されている。一般のC*-テンソル積の構造というのは例えばMをII, III型のfactorとした時の既約C*-代数$C^*(M, M')$の構造なども含んでいるのでその解明は非常に興味がある。しかしその一つの鍵になる、性質TをみたさないC*代数というのは現在では[19]に示された例(2ケの生成元をもつ自由群の正則表現からつくられたC*-環)のみしかわかっ

ている。上の予想が肯定的であればこの方面での大きな「理論的前進」を与えることになる。

補題4.3 von Neumann 代数Mが互いに可換な2つの部分代数N_1, N_2より生成されているものとする。もしN_1及びN_2がEPをもてばMもEPをもつ。

証明 $M' = N_1' \cap N_2'$ がEPをもつことを示せばよい。今π_1, π_2をN_1', N_2'へのノルムが1の射影とすると、$\pi = \pi_1 \pi_2$は定理Aと与えられた条件より、M'への射影になる。

定理4.3 A, BをC^*-代数、$A \otimes_\beta B$をクロスノルムβによるC^*テンソル積とする。Iを$A \otimes_\beta B$でのE型イデアルとすると、任意のAのpure state φ (Bのpure state ψ)について$\overline{R_\varphi(I)}$ ($\overline{L_\psi(I)}$) は又B(resp. A)のE型イデアルになる。

証明 $J = \overline{R_\varphi(I)}$ (ノルム閉包)とおく。$J \neq \{0\}$とする。Jは[; 補題1]よりBのイデアルになる。ρをJのH上へのnon-degenerateな表現としρのBへのcanonicalな拡大を又ρでかく。ρ_φをφによるAの既約表現 (on H_φ)、又 $\varphi = {}^t\rho_\varphi(\omega)$ とおく。このとき任意の$x \in I$について(又任意の$B(H)$上のσ-weak位相で連続な汎関数ψについて)フビニ写像の性質から

$$\langle \rho(R_\varphi(x)), \psi \rangle = \langle R_\varphi(x), {}^t\rho(\psi) \rangle = \langle x, \varphi \otimes {}^t\rho(\psi) \rangle$$

$$= \langle x, {}^t\rho_\varphi \otimes {}^t\rho(\psi) \rangle = \langle \rho_\varphi \otimes \rho(x), \omega \otimes \psi \rangle$$

$= \langle R_\omega(\rho_\varphi \otimes \rho(x)),\ \psi \rangle$

よって　$\rho(R_\varphi(x)) = R_\omega(\rho_\varphi \otimes \rho(x))$.

$M = \widetilde{\rho_\varphi(A)} \otimes \widetilde{\rho(B)}$ とおくと, central projection z が存在して $\widetilde{\rho_\varphi \otimes \rho(I)} = M_z$. ここで $z = 1 \otimes z_1$ とかける. 一方

$$R_\omega(M_z) = R_\omega(\widetilde{\rho_\varphi(A)} \otimes \widetilde{\rho(B)} z_1) = \widetilde{\rho(B)} z_1$$
$$= \widetilde{R_\omega(\rho_\varphi \otimes \rho(I))} = \widetilde{\rho(J)} = \widetilde{\rho(B)}$$

従って $z_1 = 1$ i.e. $\widetilde{\rho_\varphi \otimes \rho(I)} = M$. よってMはEPをもつ.
定理3.4より $\widetilde{\rho(B)} = \widetilde{\rho(J)}$ はEPをもつことが言える

注意. 証明から φ の仮定はただ factor 表現ということだけ使われたがMがEPをもてば当然 $\widetilde{\rho_\varphi(A)}$ もEPをもたねばならない. このことはもし φ を ρ_φ がEPをもたないような factor state とすると $R_\varphi(I) = \{0\}$ となってしまうことを示す.

上記定理と補題4.3を用いれば次の結果を得る.

定理4.4　C^*-代数A, Bについて

(1) 任意の C^*-クロスノルム β について, $A \underset{\beta}{\otimes} B$ はA, B共にE型, その時に限ってE型になる.

(2) 最小の C^*-クロス・ノルム α について, $A \underset{\alpha}{\otimes} B$ はA又はBがNE型の時その時に限ってNE型の C^*-代数となる.

任意の β について(2)が成立するかどうかはNGCR代数の

時と同じような困難にあって([23]参照)現在の所わかっていない。

§5. E型の代数と Stone-Weierstrass の定理.

本質的ではないが議論を簡単にするために考えるC*-代数はすべて単位元をもつものとする。ここで Stone-Weierstrass の定理というのは次の古典的(?)な問題である。

AをC*-代数Bをその部分代数としたとき、もしBがAの pure state の集合を区別すれば B=A となるか?

この問題についての現状はまだ完全解決にほど遠いが、ここでの議論はこの問題とも以下のような関係をもっている。先ずEPをもつC*-代数については Akemann [1] でも指摘されているように

定理 5.1. C*-代数 A, B が SW-定理の状態にあるものとする。もしBがEPをもてば A=B である。

証明は上の様な状況においては、Bの pure state のAへの state extension は一意であること、従ってπを射影 φ を A の pure state とすると $\varphi = {}^{+}\pi(\varphi|B)$ となることから容易に残りが導びかれる。$\varphi|B$ が又Bの pure state になるのはこの状態について知られている結果の一つである。

最近境[17]はSW-定理の知られている一番広い形を示したが[17]での鍵となっている次の補題を仮定すれば残りの議論は個々の場合にわける必要なく次の形に統一出来る.

補題5.1 (境[17]) AをH上のseparableなC^*-代数 Bをその部分代数とする. CをA'のmaximal abelianなvon Neumann部分代数とし, von Neumann代数$R(A, C)$を考える. 今Aより$R(A, C)$の中へ$\|\pi\| \leq 1$, $\pi(b) = b$ $(b \in B)$となる~~■~~線型写像πがあるものとする. このときもしBがSW-定理の状態にあれば$\pi(a) = a$, $a \in A$となる.

定理5.2. Separable C^*-代数$A \supset B$がSW-定理の状態にあるものとする。ρをAのseparableな表現で$\rho|B$がEPをもつものとすると

$$\widetilde{\rho(A)} = \widetilde{\rho(B)} \quad (\text{弱閉包})$$

証明. πを$\widetilde{\rho(B)}$への射影とすると上の定理よりπは$\rho(A)$の元を動かさない. よって$\rho(A) \subset \widetilde{\rho(B)}$. 故に$\widetilde{\rho(A)} = \widetilde{\rho(B)}$

系. ~~■~~上の状態でBがE型の代数とすると$A = B$である.

証明. $B \subsetneqq A$とするとB上で0となるAの(0でない)自己共役汎関数~~■~~φが存在する. $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$を$\varphi$の正及び負

の部分への分解とし $[\varphi]=\varphi^{+}+\varphi^{-}$ とおく。$[\varphi]$ による表現 $\rho_{[\varphi]}$ は上記定理の条件をみたすがつくりうから

$$\widetilde{\rho_{[\varphi]}(B)} \subsetneqq \widetilde{\rho_{[\varphi]}(A)}$$

であり矛盾を起す.

文献

1. C. A. Akemann, The Stone-Weierstrass problem, J. Functional Analysis 4 (1969), 277-294
2. W. Arveson, Subalgebras of C^*-algebras, Acta Math. 123 (1969), 141～224
3. J. Dixmier; Les C^*-algèbres et leurs représentations, Paris 1964.
4. D. B. Goodner, Projections in normed linear spaces, Trans. A. M. S., 69 (1950), 84-108
5. M. Hasumi, The extension property of complex Banach spaces, Tôhoku Math. J., 10 (1958), 135-142
6. J. Hakeda - J. Tomiyama, On some extension property of von Neumann algebras, ibid, 19 (1967), 315-323
7. J. Hakeda, On property P of von Neumann algebras, ibid. 19 (1967), 238-242
8. H. Choda and M. Echigo, A new algebraic property

of certain von Neumann algebras, Proc. Japan Acad. 39 (1963), 651–655

9. R. V. Kadison, Operator algebras with a faithful weakly closed representation, Ann. Math., 64 (1956) 175–181

10. R. V. Kadison & G. K. Pedersen, Equivalence in operator algebras, to appear in Math. Scand.

11. B. E. Johnson, Cohomology theory in Banach algebras, (preprint)

12. F. J. Murray and J. von Neumann, On rings of operators ~~algebras~~ IV, Ann. Math., 44 (1943), 716–808

13. L. Nachbin, A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. A. M. S., 68 (1950), 28–46.

14. S. Sakai, On topological properties of W*-algebras, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 434–439

15. S. Sakai, On a problem of Calkin, Amer. J. Math., 88 (1966), 935–941

16. S. Sakai, On a characterization of type I C*-algebras, Bull. A. M. S., 72 (1966), 508–512

17. S. Sakai, On the Stone-Weierstrass theorem of

C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 22 (1970) 191–199

18. J. Schwartz, Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors, Comm. Pure Appl. Math., 16 (1963), 19–26

19. M. Takesaki; On the cross-norm of the direct product of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 16 (1964), 111–119.

20. M. Takesaki, Tomita's theory of modular Hilbert algebra and its application, Springer lecture note 128 (1970)

21. M. Takesaki, The theory of operator algebras, Univ. of California at Los Angeles, 1969/70

22. M. Tomita, Standard forms of von Neumann algebras, Mimeographed note 1967.

23. J. Tomiyama, On the projection of norm one in W^*-algebras, Proc. Japan Acad., 33 (1957), 608–612

24. J. Tomiyama, 同上 II, Tôhoku Math. J., 10 (1958) 37–41. 同上 III, ibid. 11 (1959), 125–129

25. J. Tomiyama, Applications of Fubini type theorem to the tensor products of C^*-algebras, Tôhoku Math. J., 19 (1967), 213–226.

26. J. Tomiyama, On the tensor product of von Neumann algebras, Pacific J. Math., 30 (1969), 125-

27. J. Tomiyama, Tensor products and projections of

norm one in von Neumann algebras, Seminar Univ. of Copenhagen, Fall 1970.

28. J. Tomiyama, Applications of Fubini mappings to tensor products of Banach algebras, Seminar Univ. of Copenhagen, 1971.