数理解析研究所講究録
第 124 巻 1971 年 58-72

Planchérel measure is the Haar measure on dual object.

京大 理 辰馬伸彦

§1. Introduction

可換局所コンパクト群 A において，Planchérel の公式は，任意の $L^1(A)\cap L^2(A)$ の元 f に対して，

$$(1)\qquad \int_A |f(a)|^2\,da = \int_{\hat{A}} |\hat{f}(\hat{a})|^2\,d\mu_A(\hat{a}),$$

で与えられる。こゝで $\hat{f}$ は f の Fourier 変換で，

$$(2)\qquad \hat{f}(\hat{a}) \equiv \int_A f(a)\overline{\langle a,\hat{a}\rangle}\,da$$

である。

μ_A は Planchérel 測度とよばれるが，A の dual である所の，可換局所コンパクト群 $\hat{A}$ 上の Haar 測度と一致する。すなわち μ_A は次式をみたす。

$$(3)\qquad d\mu_A(\hat{a}_1\hat{a}) = d\mu_A(\hat{a}),\quad \text{for } \forall\,\hat{a}_1\in\hat{A}.$$

(3) は又，任意の $L^1(A)\cap L^2(A)$ の元 f に対して，

$$(3') \qquad \int_{\hat{A}} |\hat{f}(\hat{a}, \hat{a})|^2 d\mu_A(\hat{a}) = \int_{\hat{A}} |\hat{f}(\hat{a})|^2 d\mu_A(\hat{a}),$$

が成立することと同値である.

Haar 測度の一意性から, μ_A は又常数係数を除いて, (3′) 式により定められる.

一方ユニモジュラー可分局所コンパクト群 G の Plancherel の公式は, F. I. Mautner [1], I. E. Segal [2] により次のように拡張した形で得られている.

この場合, G の reduced quasi-dual Ω の元 $\omega = \{\mathfrak{H}(\omega), \mathbb{W}_g(\omega)\}$ に対して, 任意の $L^1(G) \cap L^2(G)$ の元 f について計算した $\mathfrak{H}(\omega)$ の上の作用素

$$(4) \qquad \mathbb{W}_f(\omega) \equiv \int_G f(g) \mathbb{W}_g(\omega)\, dg$$

が, f の Fourier 変換に対応するもので, $\{\mathbb{W}_g(\omega)\}$ ではられる von Neumann 環の正部分の上の適当な normal trace τ_ω によって,

$$(5) \qquad \int_G |f(g)|^2 dg = \int_\Omega \tau_\omega((\mathbb{W}_f(\omega))^* \mathbb{W}_f(\omega))\, d\mu(\omega)$$

と Plancherel 測度 μ を用いて書ける. 特に G が type I である場合, G の reduced dual $\hat{G}$ と, 作用素の跡 Tr

，従って Hilbert-Schmidt ノルムを用いて，

$$(5')\quad \int_G |f(g)|^2\, dg = \int_{\hat{G}} \mathrm{Tr}\left((\pi_f(\omega))^* \pi_f(\omega)\right) d\mu(\omega)$$

$$= \int_{\hat{G}} |||\pi_f(\omega)|||^2\, d\mu(\omega),$$

とあらわされる。

小文では，この一般の Plancherel 測度 μ について，(3')に対応する不変性の公式を導き，逆に μ が常数係数を除き，この不変性によって定められることを示す。

G がユニモジュラーでないときでも，適当な条件のもとに，τ_ω の意味を拡大し，補正の正値自己共軛作用素 $T(\omega)$ を各 $\pi_f(\omega)$ にかけることにより，(5)(5') と同じ式が成立する。そして以下の話はこの場合も同様に進められることを注意しておく。しかし以下では簡単のため，G がユニモジュラーのときに限る。（cf. [4]）.

§2. μ の不変性.

μ_A の不変性は $\hat{A}$ 上の積に対するものであったから，Ω 又は $\hat{G}$ の上に，$\hat{A}$ 上の積に対応する演算を考える必要がある。A の dual $\hat{A}$ は，A の既約（一次元）ユニタリ表現の全体であり，その積は表現のテンソル積として与えられ

る。従って μ_A の不変性を与える(3)式は次のようにかける。

$$(3'') \quad \int_{\hat{A}} |\hat{f}(\hat{a}_1 \otimes \hat{a})|^2 d\mu_A(\hat{a}) = \int_{\hat{A}} |\hat{f}(\hat{a})|^2 d\mu_A(\hat{a}),$$

$$\text{for } \forall \hat{a}_1 \in \hat{A}.$$

この類推から、非可換の場合も表現のテンソル積を Ω や $\hat{G}$ の上の演算と考えて、(3'')に対応する式を示せばよいであろう。

さらに一方よく知られている如く、G の正則表現 $\mathcal{R}$ と任意のユニタリ表現 $\mathcal{D}$ のテンソル積は canonical に、

$$(6) \qquad \mathcal{D} \otimes \mathcal{R} \sim \Sigma \oplus \mathcal{R} \quad (\text{重複度 } \dim \mathcal{D} \text{ の直和}),$$

となる。このことは適当な型式化のもとに Plancherel 測度がテンソル積の演算で不変であることを示唆すると共に、(3'')に対応する式は、たとえば、type I の G と有限次元の $\mathcal{D}$ で、

$$(7) \quad \int_{\hat{G}} ||| W_f(\mathcal{D} \otimes \omega) |||^2 d\mu(\omega) = (\dim \mathcal{D}) \int_{\hat{G}} ||| W_f(\omega) |||^2 d\mu(\omega),$$

となるだろうことを予想せしめる。実際後の議論より、$\mathcal{D}$ が有限次元のときは(7)が成立することがわかるが、一般にはユニタリ表現は無限次元であることが多く、(7)式はそのまゝでは無意味であって、さらに何等かの型式化を必要とする。

まず $\mathcal{D}$ の表現空間 $\mathfrak{H}(\mathcal{D})$ と各 ω の表現空間 $\mathfrak{H}(\omega)$ に、それぞれ完全正規直交系 $\{v_j\}_j$, $\{u_\ell(\omega)\}_\ell$ を固定して考え

る．$\{v_j \otimes u_\ell(\omega)\}_{j,\ell}$ は $\mathfrak{H}(\vartheta\otimes\omega)$ の完全正規直交系で，

(8) $$\|W_f(\vartheta\otimes\omega)\|^2 = \sum_j \sum_\ell \|W_f(\vartheta\otimes\omega)(v_j\otimes u_\ell(\omega))\|^2,$$

となるから，(7) 式を考える替りに，

(9) $$I \equiv \lim_{N\to\infty} N^{-1} \sum_j^N \int_{\hat{G}} \sum_\ell \|W_f(\vartheta\otimes\omega)(v_j\otimes u_\ell(\omega))\|^2 d\mu(\omega),$$

を考えて

(10) $$I = \int_{\hat{G}} \|W_f(\omega)\|^2 \, d\mu(\omega),$$

を示せばよいであろう。所で実際には以下に示すように，もっと強く，任意の $\mathfrak{H}(\vartheta)$ の元 v について，

(11) $$\int_{\hat{G}} \sum_\ell \|W_f(\vartheta\otimes\omega)(v\otimes u_\ell(\omega))\|^2 d\mu(\omega) = \|v\|^2 \int_{\hat{G}} \|W_f(\omega)\|^2 d\mu(\omega),$$

が成立することがわかる。*)

G が type I でないとき，(11) の左辺は τ_ω で示さねばならず，その序の変更を考える。そこで $\mathfrak{H}(\omega)$ から $\mathfrak{H}(\vartheta\otimes\omega)$ の中への線型写像を

(12) $$W_f(\vartheta,\omega,v)\, u \equiv W_f(\vartheta\otimes\omega)(v\otimes u),$$

により定義すると，

(13) $$\sum_\ell \|W_f(\vartheta\otimes\omega)(v\otimes u_\ell(\omega))\|^2 = \mathrm{Tr}((W_f(\vartheta,\omega,v))^* W_f(\vartheta,\omega,v)),$$

(11) より (10) は容易に出るが，(9) の I の定義で $\lim_{N\to\infty}$ と積分を交換すると，(10) の成立しない例がある。(cf. [3])

となるから，右辺の作用素の跡 Tr を τ_ω におきかえると，μ の不変性を示す式として，(11) に習って，次の Prop. 1 を採用してよいであろう。

<u>Prop. 1</u>. 任意の $\mathcal{H}(\theta)$ の元 v と，$L^1(G)\cap L^2(G)$ の元 f で，

$$(14)\quad \int_{\hat{\Omega}} \tau_\omega\big((\mathbb{W}_f(\theta,\omega,v))^* \mathbb{W}_f(\theta,\omega,v)\big)\,d\mu(\omega)$$

$$= \|v\|^2 \int_{\hat{\Omega}} \tau_\omega\big((\mathbb{W}_f(\omega))^* \mathbb{W}_f(\omega)\big)\,d\mu(\omega),$$

が成立つ。

(14) が G が type I のときは，(11) 式を与えること，従ってこれより (10) が成立し，さらに $\dim\theta<+\infty$ なら (7) が導かれることは容易である。

又 τ_ω 等の linearity から，(14) 式は，

"任意の $\mathcal{H}(\theta)$ の元 v, w と，$L^1(G)\cap L^2(G)$ の元 f, k について，

$$(15)\quad \int_{\hat{\Omega}} \tau_\omega\big((\mathbb{W}_k(\theta,\omega,w))^* \mathbb{W}_f(\theta,\omega,v)\big)\,d\mu(\omega)$$

$$= \langle v, w\rangle \int_{\hat{\Omega}} \tau_\omega\big((\mathbb{W}_k(\omega))^* \mathbb{W}_f(\omega)\big)\,d\mu(\omega) \text{"}$$

と同値であることに注意しておく。

§3. Prop. 1 の証明

証明は次の Lemma 1 より容易に出る。ここで、ω, $\mathcal{D}$ は任意に与えられたユニタリ表現とする。

<u>Lemma 1</u>. 任意の $\mathfrak{H}(\mathcal{D})$ の元 v, w と任意の $L^1(G)$ の元 f, k について、

(16) $$(W_k(\mathcal{D},\omega,w))^* W_f(\mathcal{D},\omega,v) = \sum_j (W_{k\psi(j,w)}(\omega))^* W_{f\psi(j,v)}(\omega).$$

ここで $f\psi(j,v)$, $k\psi(j,w)$ はそれぞれ $f(g)$, $k(g)$ と関数 $\psi(j,v)(g) \equiv \langle W_g(\mathcal{D})v, v_j\rangle$, $\psi(j,w)(g) \equiv \langle W_g(\mathcal{D})w, v_j\rangle$ との積で、右辺の和は作用素のノルムの意味で収束する。

<u>Proof</u>. 収束性の証明はここでは省略する。(cf. [4])

等式(16) の成立は次の計算で示される。

$$\langle (W_k(\mathcal{D},\omega,w))^* W_f(\mathcal{D},\omega,v)\, u_1, u_2\rangle = \langle W_f(\mathcal{D}\otimes\omega)(v\otimes u_1), W_k(\mathcal{D}\otimes\omega)(w\otimes u_2)\rangle$$

$$= \iint_{G\times G} f(g_1)\overline{k(g_2)} \langle W_{g_1}(\mathcal{D})v, W_{g_2}(\mathcal{D})w\rangle \langle W_{g_1}(\omega)u_1, W_{g_2}(\omega)u_2\rangle\, dg_1 dg_2$$

$$= \iint_{G\times G} f(g_1)\overline{k(g_2)} \sum_j \langle W_{g_1}(\mathcal{D})v, v_j\rangle \overline{\langle W_{g_2}(\mathcal{D})w, v_j\rangle} \langle W_{g_1}(\omega)u_1, W_{g_2}(\omega)u_2\rangle\, dg_1 dg_2$$

$$= \sum_j \iint_{G\times G} f(g_1)\psi(j,v)(g_1) \overline{k(g_2)\psi(j,w)(g_2)} \langle W_{g_1}(\omega)u_1, W_{g_2}(\omega)u_2\rangle\, dg_1 dg_2$$

$$= \sum_j \langle W_{f\psi(j,v)}(\omega)u_1, W_{k\psi(j,w)}(\omega)u_2\rangle$$

$$= \left\langle \sum_j (W_k \psi(j,w)(\omega))^* W_f \psi(j,v)(\omega)\, u_1,\ u_2 \right\rangle.$$

証了.

<u>Prop 1. の Proof.</u>　　Lemma 1 より，

$$(15)\text{式の左辺} = \int_\Omega \sum_j \tau_\omega\big((W_k\psi(j,w)(\omega))^* W_f\psi(j,v)(\omega)\big)\, d\mu(\omega)$$

$$= \sum_j \int_G f(g)\,\psi(j,v)(g)\,\overline{k(g)\,\psi(j,w)(g)}\, dg$$

$$= \int_G f(g)\,\overline{k(g)}\Big(\sum_j \langle W_g(\vartheta)v, v_j\rangle \langle v_j, W_g(\vartheta)w\rangle\Big)\, dg$$

$$= \langle v, w\rangle \langle f, k\rangle_{L^2(G)} = \langle w, v\rangle \int_\Omega \tau_\omega\big((W_k(\omega))^* W_f(\omega)\big)\, d\mu(\omega).$$

証了.

§4.　不変測度の一意性

§2で与えた不変性をみたす測度が，Plancherel 測度μの常数倍に限ることを示したい。ところで一般には，reduced quasi-dual ΩはPlancherel 測度0を除いてしか定めることが出来ないから，求める測度の範囲としては，ある種のregularity の条件をみたすものに限る必要がある。そのために次の定義をおく。

<u>Def. 1.</u> Ω上の正の standard 測度 μ_1 が <u>admissible</u> であるとは，次の1）2）の条件をみたすことをいう。

1）直積分

$$(17)\qquad \mathcal{D}_1 \equiv \int_{\Omega} \omega \, d\mu_1(\omega),$$

が $\mathcal{D}_1$ の中心分解を与える。

2）$\mathcal{H}(\omega) \equiv \{ \mathbb{W}_f(\omega) ; \ f \in C_0(G) \}$ の空間に，

$$(18)\qquad \langle \mathbb{W}_f(\omega), \mathbb{W}_h(\omega) \rangle \equiv \tau_\omega((\mathbb{W}_h(\omega))^* \mathbb{W}_f(\omega)),$$

によりスカラー積を入れる。一方 G の元 g に対して，

$$(19)\qquad T_g(\mathbb{W}_f(\omega)) \equiv \mathbb{W}_f(\omega) \mathbb{W}_{g^{-1}}(\omega) = \mathbb{W}_{f * \delta_{g^{-1}}}(\omega),$$

で定義される作用素を対応させると，$\mathcal{H}(\omega)$ を完備化した空間 $\mathfrak{H}'(\omega)$ の上に G のユニタリ表現が出来るが，その表現が μ_1 で殆ど到る所 ω と同値である。

<u>Def. 2.</u> admissible な測度 μ_1 が不変性をもつとは，任意のユニタリ表現 $\mathcal{D}$ と，$\mathfrak{H}(\mathcal{D})$ の元 v，任意の $L^1(G) \cap L^2(G)$ の元 f について，次式の成立つ事をいう。

$$(20)\qquad \int_{\Omega} \tau_\omega((\mathbb{W}_f(\mathcal{D}, \omega, v))^* \mathbb{W}_f(\mathcal{D}, \omega, v)) \, d\mu_1(\omega)$$

$$= \|v\|^2 \int_{\Omega} \tau_\omega((\mathbb{W}_f(\omega))^* \mathbb{W}_f(\omega)) \, d\mu_1(\omega)$$

これらの定義のもとで次の Prop. 2 が成立する。

<u>Prop 2.</u> admissible な不変測度 μ_1 は Plancherel 測度 μ の常数倍に限る。

§5. Prop 2 の証明

先ず準備として高々可算次元のユニタリ表現の同値類全体の集合 Ω_0 について ideal の概念を定義する。(以下簡単の為一々"同値類"とことわることは省略する。)

<u>Def. 3.</u> Ω_0 の部分集合 $\mathfrak{I}$ が ideal であるとは、

1) $\mathfrak{I}$ の元の可算集合 $\{\mathfrak{D}_j\}_j$ に対して、その直和 $\sum_j \oplus \mathfrak{D}_j$ が又 $\mathfrak{I}$ に入る。

2) $\mathfrak{I}$ の任意の元 $\mathfrak{D}$ の任意の部分表現 $\mathfrak{D}_1$ (以下 $\mathfrak{D}_1 < \mathfrak{D}$ と記す) が又 $\mathfrak{I}$ に入る。

3) $\mathfrak{I}$ の任意の元 $\mathfrak{D}$ と、Ω_0 の任意の元 $\mathfrak{D}_0$ について そのテンソル積 $\mathfrak{D} \otimes \mathfrak{D}_0$ も又 $\mathfrak{I}$ に入る。

の3条件をみたすことをいう。

<u>Lemma 2.</u> 正則表現 $\mathfrak{R}$ の可算無限直和 $\sum \oplus \mathfrak{R}$ の部分表現の全体 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}}$ は最小の ideal である。

<u>Proof.</u> $\mathfrak{I}_{\mathfrak{R}}$ の定義より ideal の条件 1) 2) は明らか。

又よく知られているように，任意の Ω_0 の元 $\mathcal{D}_0$ に対して，$\mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{R} \sim \mathcal{R} \otimes \mathcal{D}_0 \sim \sum \oplus \mathcal{R}$（重複度 $\dim \mathcal{D}_0$ の直和）だから条件 3）と，最小の ideal であることはすぐ出る． 証了．

<u>Lemma 3.</u> admissible な不変測度 μ_1 について，(17) 式で与えた $\mathcal{D}_1$ は，任意の Ω_0 の元 $\mathcal{D}_0$ で，

(21) $$\mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{D}_1 < \sum \oplus \mathcal{D}_1 \quad (\text{重複度 } \dim \mathcal{D}_0 \text{ の直和})。$$

をみたす。

<u>Proof.</u> 先ず Lemma 1 と，Prop 1 のあとの注意と同様の議論から，不変性を与える式(20)が，

(22) $$\langle v, w\rangle \int_{\Omega} \tau_\omega\left((W_k(\omega))^* W_f(\omega)\right) d\mu_1(\omega)$$
$$= \sum_j \int_{\Omega} \tau_\omega\left((W_k \psi(j;w)(\omega))^* W_f \psi(j;v)(\omega)\right) d\mu_1(\omega),$$

と同値であることは容易にわかる。(22) 式の両辺の積分が夫々 Def. 1. の条件 2) で定義したユニタリ表現の μ_1 についての直積分，従って 2) の仮定により (17) 式の $\mathcal{D}_1$ の表現空間の内積を与えることに注意すれば，$\mathfrak{H}(\mathcal{D}_0)$ の元 v と，$\mathfrak{H}(\mathcal{D}_1)$ の元 $\{W_f(\omega)\}_\omega$ に対して定義された写像，

(23) $$\Pi\ ;\quad v \otimes \{W_f(\omega)\}_\omega \longrightarrow \{W_f \cdot \psi(j;v)(\omega)\}_{j,\omega}.$$

は $\mathfrak{H}(\mathcal{D}_0) \otimes \mathfrak{H}(\mathcal{D}_1)$ から $\sum_j \oplus \mathfrak{H}(\mathcal{D}_1)$ の中への等長線型写像に一意的に拡張されることは容易である．一方この写像で，

$T_g(\mathfrak{D}_0)v \otimes \{T_{f*\delta_{g^{-1}}}(\omega)\}_\omega$ は $\{T_{(f*\delta_{g^{-1}})\cdot\psi(j,\,T_g(\mathfrak{D}_0)v)}(\omega)\}_{j,\omega} =$
$= \{T_{(f*\delta_{g^{-1}})\cdot(\psi(j,v)*\delta_{g^{-1}})}(\omega)\}_{j,\omega} = \{T_{(f\cdot\psi(j,v))*\delta_{g^{-1}}}(\omega)\}_{j,\omega}$ に写されるから，U が $\mathfrak{D}_0 \otimes \mathfrak{D}_1$ から $\sum_j \oplus \mathfrak{D}_1$ の中への同値対応を与えることが出る。　　　　証　了。

<u>Cor 1.</u>　$\mathfrak{D}_1$ の可算無限直和 $\sum^{\infty} \oplus \mathfrak{D}_1$ の部分表現の全体は ideal を作る。

<u>Proof.</u>　Lemma 3 より明らか。

<u>Cor 2.</u>　　　$\mathfrak{R} < \sum^{\infty} \oplus \mathfrak{D}_1$ 。

<u>Proof.</u>　$\mathfrak{R}$ が最小の ideal であることより明らか。

<u>Cor 3.</u>

(24)　　　　$$\mu_1 < \mu .$$

<u>Proof.</u>　Cor. 2 より $\mathfrak{R}$ は $\sum^{\infty} \oplus \mathfrak{D}_1$ の部分表現と同値であるからその中心分解は Ω 上の，射影作用素値の関数 $P(\omega)$ により $\int_\Omega P(\omega) \sum \oplus \omega \, d\mu_1(\omega)$ で与えられ，一方 $\int_\Omega \omega \, d\mu(\omega)$ とも与えられる。中心分解の一意性によってこの二つの分解は同じ分解を与えなくてはならぬから，(24) が成立つ。証了

Lemma 4.

(25)　　　　$$\mu < \mu_1 .$$

<u>Proof.</u>　(25) が成立しないとすれば，μ と同値な μ' と

μ と直交する 0 でない測度 ν とによって，

(26) $$\mu_1 = \nu + \mu',$$

とかける。一方 Lemma 3. Cor. 3 と同様の議論によって，

$\mathcal{R} \otimes \mathcal{D}_1$ は，$\int_{\Omega} P_1(\omega) \sum \oplus \omega \, d\mu_1(\omega)$ と $\int_{\Omega} \sum \oplus \omega \, d\mu(\omega)$ の

二つの中心分解をもち，(26) より

(27) $$P_1(\omega) = 0, \qquad a.e.\ \nu,$$

でなくてはならない。所で，$\mathcal{R} \otimes \mathcal{D}_1$ から $\sum \oplus \mathcal{D}_1$ の中への同値対応は，Lemma 3 で，$\mathcal{D}_0 = \mathcal{R}$ とおいたときの，(23) 式の $\mathcal{U}$ で与えられる。従って，(27) は，任意の v, f, j で，

(28) $$\mathcal{W}_{f \cdot \psi(j,v)}(\omega) = 0, \quad a.e.\ \nu,$$

と同値である。こゝで $\mathcal{G}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{G}(\mathcal{R}) = L^2(G)$ の完全正規直交系 $\{v_j\}_j$ を適当にとれば，任意の $C_0(G)$ の元 k に対して，うまく j, v, f をえらぶことによって，

(29) $$k(g) = f(g)\,\psi(j,v)(g),$$

と出来るから，(28) 式は，任意の $C_0(G)$ の元 k について，

(30) $$\mathcal{W}_k(\omega) = 0, \qquad a.e.\ \nu,$$

となり，Def. 1, 2) と ν のとり方に反する。　証了

<u>Prop. 2. の Proof.</u> (24), (25) から，Ω 上の正値可測関数 w があって，

(31) $$d\mu_1(\omega) = w(\omega)\, d\mu(\omega),$$

とかける。そこで $L^2(G)$ 上の正値自己共役作用素 A を，

(32) $$A = \int_{\Omega} w(\omega)\, I_\omega \, d\mu(\omega),$$

で定義する（I_ω は $\mathfrak{H}(\omega)$ 上の恒等作用素）と容易に，

(33) $$A R_g = R_g A.$$

一方 μ の不変性の公式 (14) から，Lemma 3 での議論と同様にして，$\mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{R}$ と $\sum \oplus \mathcal{R}$ の同値対応における内積間の式，

(34) $$\langle v, w \rangle \langle f, k \rangle_{L^2(G)} = \sum_j \langle f\psi(j, v), k\psi(j, w) \rangle_{L^2(G)},$$

が出る。又 μ_1 の不変性 (20) は，同様にして，

(35) $$\langle v, w \rangle \langle Af, k \rangle_{L^2(G)} = \sum_j \langle A(f\psi(j, v)), k\psi(j, w) \rangle_{L^2(G)}$$

を導く。(34) 式の f に Af を代入して，(35) と等しいとし，

(36) $$\sum_j \langle (Af)\psi(j, v), k\psi(j, w) \rangle_{L^2(G)} = \sum_j \langle A(f\psi(j, v)), k\psi(j, w) \rangle_{L^2(G)}$$

を得る。$\{\{k\psi(j, w)\}_j \,;\, k \in C_0(G),\ w \in \mathfrak{H}(\mathcal{D}_0)\}$ が $\sum \oplus L^2(G)$ をはることに注意すると，(36) は $\sum \oplus L^2(G)$ の内積と見て，

(37) $$(Af)\psi(j, v) = A(f\psi(j, v)) \qquad (\forall j)$$

を示す。このことは A が，G の函数 $\psi(j, v)$ をかける作用素と可換であり，従って A 自身が，G 上のある函数 $a(g)$ をかける作用素であることを導く。さらに (33) より，

(38) $$a(g) = \text{const} \qquad \text{a.a. } g,$$

であり，A がスカラー作用素であること，すなわち $w(\omega)$

72

が常数であることが結論された。 証 3.

文 献

[1] F.I. Mautner, Unitary representations of locally compact groups, I, II, Ann. of Math., 51 (1950), 1-25 ; 52 (1950), 528-556.

[2] I.E. Segal, An extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups. Ann. of Math., 52 (1950), 272-292.

[3] N. Tatsuuma, Invariancy of Plancherel measure under the operation of Kronecker product, Proc. of Japan Acad. 47 (1971), 252-256.

[4] N. Tatsuuma, Plancherel formula for non-unimodular locally compact groups, to appear.