数理解析研究所講究録
第124巻 1971年 84-99

On the imbedding as a double commutator in a type I AW^*-algebra

東北大 理　斎藤知之

今Bを中心がZである I 型 AW^*-代数とし，Mを中心がZなるAW^*-部分代数（Mの任意の元xの右射影元$RP(x)$がMで計算しても，Bで計算しても同じ）とする。我々が考える問題は，『M''をMのBに於ける2重交換子代数とするとき，$M=M''$が成立するか？』である。

H. Widom [12] は，AW^*-代数が中心を同じくする I 型のAW^*-代数の中に少くともAW^*-埋蔵（埋蔵像がその中で，AW^*-部分代数となる事）できる必要充分条件は，それが中心に値をとる，射影元上完全連続なステートを充分沢山もつことであることを示し，有限型の場合は，そのAW^*-埋蔵による像は，その I 型の代数の中で2重交換子代数になることを示した。H. Widomの方法は，中心値(c.a.)ステートに対するGelfand-Segalの構成法を使用するものであり有限型という仮定が本質的であった。本講演では，上のGelfand-Segalの構成法を透明にしようという観点から「ベクトル値測度」による非可換積

分論を展開し，それを使用して半有限型の場合にも上の結果が成立することを示し，併せて，最初の問題に対するMの半有限型の場合の肯定的解答を与えようと思う。主な定理は，

定理．Mを中心をZとする半有限型AW*-代数とし，M上には射影元上完全連続なZ-値有界非負モヂュル準同型写像が充分沢山あれば，Mは，Zを中心とするI型AW*代数の中に2重交換子代数として埋蔵できる。

AW*-代数に関するFeldmanの予想は，「W*-代数の非W*-，AW*代数は存在しないであろう」というものであったが部分的解答として，

系．Bを中心ZのI型AW*-代数とし，AをBのZを含む半有限型AW*-部分代数とすると，A＝A″（AのBに於ける2重交換子）が成立する。（Z＝$\mathbb{C}\cdot 1$ がFeldmanの問題。）

§1. 準備．AW*-代数MはそれがC^*-代数で，しかもBaer*-環であるものである。AW*-代数に関する情報は，[1]，[5]，[6]，[7] [12] を参照していただきたい。

1．1．順序極限と中心値c.a.ステート。

今Zを可換AW*-代数とするとGelfand-Naimarkの定理によりZ（$Z_{s.a.}$：Zの自己共役部）は，ストーン空間Ω上の複素数（実数）-値連続函数全体のつくる代数と同一視できる。$[-\infty,\infty]$

に区間位相を入れ今 $C_r^*(\Omega)$ を Ω 上の $[-\infty,\infty]$-値連続函数全体とするとこれは，自然な順序に関して，$C_r(\Omega)$ 及び $\mathbb{Z}$（Ω 上の $[0,+\infty]$-値連続函数全体）を部分束として含む完備束になる。今 $\{a_\lambda\}$ を $C_r^*(\Omega)$ のネットとしこれが $a\in C_r^*(\Omega)$ に順序収束する（$a_\lambda \to a\ (O)$）というのは，$a=\limsup a_\lambda = \liminf a_\lambda$ の時である。又 $C_r^*(\Omega)$ の元によるデカルト分解によって $C(\Omega)$ の中に自然に順序収束の概念を導入できる。

次に M を AW^*-代数とし，Z をその中心とする。M 上の Z-値ステート ϕ というのは，M から Z への非負，有界，モジュル準同型 ϕ の事であり，ϕ が c.a. であるというのは，M の射影元のかってな直交族 $\{e_\alpha\}$ に対して，$\phi(\sum_\alpha e_\alpha)=\sum_\alpha \phi(e_\alpha)$（$Z$ の順序収束に関する $\phi(e_\alpha)$ の非条件和）が成立することである。

補題．中心値 c.a. ステート ϕ は，Widom の意味で連続である，すなわち M の射影元のかってな直交族 $\{e_\alpha\}$ に対して，

$$\phi(a^*(\sum_\alpha e_\alpha)a)=\sum_\alpha \phi(a^* e_\alpha a)$$

$(\forall a\in M)$ が成立する。

以下 M を半有限型 AW^*-代数とし，Z をその中心とする。そして c.a. ステートの分離集合 $\mathfrak{S}$ をもつものとする。

今 $\mathcal{L}(\mathfrak{S})$ を $\{a^*\phi a \mid \phi\in\mathfrak{S},\ a\in M\}$ の元の有限一次結合全体とする。von Neumann 代数における σ-弱位相の代りに我々は，M に次の様な収束の概念を入れることにする。

定義1.1. Mに於けるネット$\{a_\alpha\}$がMの元aに$\mathfrak{S}$-O-収束する($a_\alpha \to a(\mathfrak{S}\text{-O})$)というのは,$\phi(a_\alpha - a) \to 0(O)$($\mathbb{Z}$で) $\forall \phi \in \mathcal{L}(\mathfrak{S})$の時である。

注意. 実際に必要なのは,次の場合である。

(1) $\{a_\alpha\}$をMの射影元の直交族とすると,$\sum_{\alpha \in J} e_\alpha \to e(\mathfrak{S}\text{-O})$ (J: $\{\alpha\}$の有限部分集合) 但し$e = \sum_\alpha e_\alpha$とする。又$\forall a \in M$に対して,$a^*(\sum_{\alpha \in J} e_\alpha) a = \sum_{\alpha \in J} a^* e_\alpha a \to a^* e a$ ($\mathfrak{S}$-O)が成立する。

(2) $\mathfrak{S}$-O-収束の極限は一意,($\mathfrak{S}$が分離集合)である。

§2 $\mathfrak{S}$-O-連続非可換ベクトル値測度Φの存在。[10]に於ける「$\sigma(\mathfrak{S})$-位相」の代りに「$\mathfrak{S}$-O-収束」の概念を使用して[10]と同様の方法によって

補題2.1. M^+(Mの非負部)から$\mathbb{Z}$への次の性質をもつ作用素Φ(非可換ベクトル値測度)が存在する。

(1) $s, t \in M^+$, $\lambda \geq 0$(実数)に対して,$\Phi(\lambda s + t) = \lambda\Phi(s) + \Phi(t)$;

(2) $s \in M^+$, $t \in \mathbb{Z}^+$ならば,$\Phi(ts) = t\Phi(s)$ (モヂュル);

(3) $s \in M^+$, $u \in M$(ユニタリ)ならば,$\Phi(usu^*) = \Phi(s)$(ユニタリ不変);

(4) $\Phi(s) = 0$ ($s \in M^+$) なら $s = 0$ (忠実)

(5) M^+のかってな単調増加ネット$\{a_\mu\}$で,$a_\mu \uparrow a$ ($\mathfrak{S}$-O) ($a \in M^+$)なるものに対して$\Phi(a_\mu) \uparrow \Phi(a)$ (O) ($\mathbb{Z}$で) (連続性);

(6) Mのかってな射影元eに対して$\exists f (\neq 0)$, $f \leq e$, f: Mの

射影元且つ $\Phi(f)\in Z$ である(半有限)。

次に $\mathfrak{D}=\{s\in M^+;\ \Phi(s)\in Z^+\}$ とするとよく知られているように $\mathfrak{D}$ が両側イデアル $\mathfrak{M}$ の非負部になる事及び、$\mathfrak{M}$ から Z への、$\mathfrak{D}$ 上 Φ と一致し、$\dot{\Phi}(st)=\dot{\Phi}(ts)$ $(s\in M,\ t\in\mathfrak{M})$、を満す一意に決まる Z-モヂュル線型作用素 $\dot{\Phi}$ が存在する事がわかる。

今 $Rank(x)=\Phi(LP(x))$ ($\forall x\in M$、但し $LP(x)$ は x の左射影元) と置けば、

(1) $Rank(x)\geq 0 \qquad =0 \rightleftarrows x=0$;

(2) $Rank(x)=Rank(x^*)$;

(3) $Rank(x+y)\leqq Rank(x)+Rank(y)$;

(4) $Rank(xy)\leqq Rank(x),\ Rank(y)$

が成立するから $\mathfrak{F}=\{a\mid a\in M,\ Rank(a)\in Z^+\}$ は $\mathfrak{M}$ に含まれる両側イデアルでその射影元の部分は、$\mathfrak{M}$ のそれと一致する。さらに上の補題2.1.(6)によれば、$\mathfrak{F}$ の射影元は充分沢山ある事がわかる。

§3. Mに属する局所可測作用素のつくる*-代数について。

「測度」の存在の次に非有界可測函数に対応する「局所可測作用素」の構成について論ずる。この節の話は別にMが分離集合をもつ必要はないが話を簡単にするため一応仮定しておく。我々は以前[9]で、Mに属する「可測作用素」(MO)を構成し、それら

のつくる*-代数 Cについて考察した。主な性質は(1) CはBaer*-環である,(2) Cayley 変換によるCの元のスペクトル分解 (3) Cの元の極分解等であった。 次に問題となるのは,$\{x_\alpha\}$をCの元の族とし,$\{e_\alpha\}$をZの射影元の直交族とし$\sum e_\alpha=1$とする。その時,$xe_\alpha = x_\alpha e_\alpha\ (\forall\alpha)$を満す$x$が$C$に一意に存在するか?である。一意性は性質(1)によってわかるから問題は存在性である。S. K. Berberian は,Mが有限型の場合に肯定的解答を与えた。しかし一般(半有限型)の場合はかならずしも成立しない([11])。そこでこの性質によるCの完備化を考えよう。今$\{x_\alpha, e_\alpha\}$をCの元x_αとZの射影元e_α ($e_\alpha e_\beta=0$ $(\alpha\neq\beta)$ 且つ $\sum e_\alpha = 1$)との順序対の族とする($\{x_\alpha, e_\alpha\}$を ELMO と呼ぶ)。2つの ELMO $\{x_\alpha, e_\alpha\}$, $\{y_\beta, f_\beta\}$が同値であるというのは,$e_\alpha f_\beta x_\alpha = e_\alpha f_\beta y_\beta\ (\forall\alpha,\beta)$の時である。実際この関係は,同値関係を満す。今$(x_\alpha, e_\alpha)$を$\{x_\alpha, e_\alpha\}$の同値類とし,これをMに属する「局所可測作用素」(LMO)と呼び,それら全体を$\mathcal{M}$とする[11]。$\mathcal{M}$に於ける代数演算は(x_α, e_α), $(y_\beta, f_\beta)\in\mathcal{M}$ λ(スカラー)として,$\lambda(x_\alpha, e_\alpha)=(\lambda x_\alpha, e_\alpha)$,$(x_\alpha, e_\alpha)+(y_\beta, f_\beta)=(x_\alpha+y_\beta, e_\alpha f_\beta)$,$(x_\alpha, e_\alpha)^*=(x_\alpha^*, e_\alpha)$,且つ,$(x_\alpha, e_\alpha)(y_\beta, f_\beta)=(x_\alpha y_\beta, e_\alpha f_\beta)$とする($C$がBaer*-環であることから上の定義は,意味をもつ i.e. 同値類の代表元のとり方によってこわれない)。上の定義により$\mathcal{M}$は複素数体上の*-代数になる。 さらに

C の Baer*-環の性質により $x(\in C)\to(x,1)$ は, C から $\mathcal{M}$ の中への *-同型写像であり $(1,1)$ が $\mathcal{M}$ の単位元になっている。今後 C (従って M) を $\mathcal{M}$ の *-部分代数と考えることにする。又記号を簡単にするため $\mathcal{M}$ の元も $x, y, z, \cdots$ で表わすことにする。主な結果は, 次のとおりである。

(1) $\mathcal{M}$ は Baer*-環である;

(2) $x\in\mathcal{M}$ は, $x=w|x|$ $(|x|=(x^*x)^{1/2})$ $w^*w=RP(x)$, $ww^*=LP(x)$ なるように一意に極分解ができる。

(3) M の中心 Z の射影元の直交族 $\{e_\alpha\}$ $(\sum_\alpha e_\alpha=1)$ 及び $\mathcal{M}$ の元の族 $\{x_\alpha\}$ に対して $xe_\alpha=x_\alpha e_\alpha$ なる x が $\mathcal{M}$ の中にただ一つ存在する。

さらに $\mathcal{M}_{sa}$ ($\mathcal{M}$ の自己共役部) は, $x\geqq y \rightleftarrows x-y=z^*z$ $(z\in\mathcal{M})$ により実数体上の線型順序空間になる。

又部分代数 M は, $\{x \mid x\in\mathcal{M},\ x^*x\leqq\alpha 1 \quad \alpha\geqq 0\ (\text{スカラー})\}$ なる有界部分として特徴づけられる。

§4. $(\mathcal{M}, \Phi)$ に関する積分論. 以上 §2, §3 の準備のもとに $(\mathcal{M}, \Phi)$ なる測度空間に於ける積分論を展開する。ここでは, $L^2(\Phi)$ をつくるのが目的である。まずベクトル値測度の場合と同様に Φ を $\mathcal{M}^+$ ($\mathcal{M}$ の非負部) まで拡張する。

定義 4.1 ([8]). $\mathcal{M}^+$ の元 x に対して,

$\Phi(x) = \sup\{\Phi(a) \mid a \in M^+,\ a \leqq x\}$ （$\mathcal{Z}$に於いて）
（$x \in M$に対しては，新しいΦと古いΦとは一致することは明らか）。$\mathcal{M}^+$に於ける代数演算と拡張されたΦとの関係は，次のようである。

補題4.1. $s, t \in \mathcal{M}^+$, $\lambda \geqq 0$（実数）に対して，

(1) $\Phi(\lambda s + t) = \lambda\Phi(s) + \Phi(t)$;

(2) $\Phi(usu^*) = \Phi(s)$　$u \in M_u$;

(3) $\Phi(as) = a\Phi(s)$ $(\forall a \in \mathcal{Z}^+)$;

(4) M^+の単調増加ネット$\{a_\alpha\}$で$a_\alpha \uparrow e$ ($\mathfrak{S}$-0) ($e \in M$: 射影元)なら $\Phi(s^*a_\alpha s) \uparrow \Phi(s^*es)$ $(\forall s \in \mathcal{M})$（$\mathcal{Z}$に於いて）。

略証） まず $\Phi(x) = \sup\{\Phi(a) \mid a \in \mathcal{F}^+,\ a \leqq x\}$ となる事を示そう。≧は明らか。右辺$= b$とする。補題2.1.(6)により$\mathcal{F}$の射影元の直交族$\{e_\alpha\}$で$\sum_\alpha e_\alpha = 1$なるものが存在する。$a \in M^+$に対して，$a^{1/2}(\sum_{\alpha \in J \subset\subset \{\alpha\}} e_\alpha)a^{1/2} \uparrow a$ ($\mathfrak{S}$-0) （$J \subset\subset \{\alpha\}$: Jは$\{\alpha\}$の有限集合）に注意して，再び補題2.1(5)により $\Phi(a) = \sup_J\{\Phi(a^{1/2}(\sum_{\alpha \in J} e_\alpha)a^{1/2})\}$ となり $a^{1/2}(\sum_{\alpha \in J} e_\alpha)a^{1/2} \in \mathcal{F}^+$ に注意して $\Phi(a) \leqq b$ が成立するからである。 (2)は定義から明らかである。(1)を示そう。$\lambda = 1$としてよい。 $a \in \mathcal{F}^+$: $a \leqq s + t$ とする。
$s + t \geqq 0$ から $s + t + (1/n)1$ は $\mathcal{M}$で可逆であり，$(s + t + (1/n)1)^{-1} \in \{s + t\}'' \cap M$ になることから，$c_n = a^{1/2}((1/n)1 + s + t)^{-1}(s + t)^{1/2}$ とすると，c_n, $a^{1/2} - c_n(s + t)^{1/2}$ はともに有界元で，

$$\|a^{1/2} - c_n(s+t)^{1/2}\| \leqq 1/n \quad \text{且つ} \quad \|c_n\| \leqq 1 \quad (\forall n)$$

が成立する。今 $x = c_n s^{1/2}$, $y = c_n t^{1/2}$ とすると、$xx^* = c_n s c_n^* \leqq c_n(s+t)c_n^* = a^{1/2}((1/n)1 + s + t)^{-2}(s+t)^2 a^{1/2} \leqq a$, 同様に、$yy^* \leqq a$ から、$a \in \mathfrak{F}$ に注意して、$x, y \in \mathfrak{F}$ である。今 $a_1 = x^*x$, $a_2 = y^*y$ とすると $a_1, a_2 \in \mathfrak{F}^+$ で、$a_1 \leqq s$, $a_2 \leqq t$ から、

$$\begin{aligned}\Phi(s) + \Phi(t) &\geqq \Phi(a_1) + \Phi(a_2)\\ &= \Phi(x^*x) + \Phi(y^*y) \ (= \Phi(xx^*) + \Phi(yy^*))\\ &= \Phi(c_n(s+t)c_n^*)\end{aligned}$$

となる。次に $\Phi(a)$ と $\Phi(c_n(s+t)c_n^*)$ との差が非常に小さいことを示そう。$a^{1/2}$, $c_n(s+t)^{1/2} \in \mathfrak{F}$ に注意して、

$$\Phi(a) - \Phi(c_n(s+t)c_n^*) = \Phi(\{a^{1/2} + c_n(s+t)^{1/2}\}\{a^{1/2} - c_n(s+t)^{1/2}\}^*)$$

が成立するから

$$\begin{aligned}\|\Phi(a) - \Phi(c_n(s+t)c_n^*)\| &\leqq \|a^{1/2} + c_n(s+t)^{1/2}\| \|\Phi(|a^{1/2} - (s+t)^{1/2}c_n^*|)\|\\ &\leqq 2\sqrt{n} \cdot \|a\|^{1/2} \|\Phi(Lp(a))\| \quad (\forall n),\end{aligned}$$

従って $a \geqq c_n(s+t)c_n^*$ により

$$\begin{aligned}\Phi(s) + \Phi(t) &\geqq \Phi(c_n(s+t)c_n^*)\\ &\geqq \Phi(a) - 2\sqrt{n\|a\|} \cdot \|\Phi(Lp(a))\| \cdot 1 \quad (\forall n)\end{aligned}$$

が成立する。故に $\Phi(s) + \Phi(t) \geqq \Phi(a)$ $(\forall a \in \mathfrak{F}^+ : a \leqq s + t)$ となり $\Phi(s) + \Phi(t) \geqq \Phi(s+t)$ である。逆向きは明らかであるから (1) が示された。(3) を示そう。$a \in \mathfrak{Z}^+$, $t \in \mathcal{M}^+$ に対して、$a\Phi(t) \leqq \Phi(at)$ は明らか。逆をいう。今 $c \in \mathfrak{F}^+$ で、$c \leqq at$ なら、

任意の自然数 n に対して $c \leqq (a+\frac{1}{n}1)t$ より, $(a+\frac{1}{n}1)^{-1}a\Phi(c) \leqq a\Phi(t)$ となる。$Lp(a)c=c$ 且つ $(a+\frac{1}{n}1)^{-1}a \uparrow Lp(a)$ に注意して, $\Phi(c) \leqq a\Phi(t)$ が成立するから $\Phi(at) \leqq a\Phi(t)$ が成立する。よって (3) が成立。

(4) を示そう。記号を簡単にするために $\sigma_s(x)=\Phi(s^*xs)$ $\forall x \in M^+$ とする。$\sigma_s(e) \geqq \sup_\alpha \sigma_s(a_\alpha)$ は明らかである。$b \in \mathcal{F}^+ : b \leqq ess^*e$ なら $eb=be=b$ で, $b^{1/2}a_\alpha b^{1/2} \uparrow b^{1/2}eb^{1/2}=b$ $(\mathfrak{S}-0)$ である。従って, 補題2.1により $\Phi(b^{1/2}a_\alpha b^{1/2}) \uparrow \Phi(b)$ ($\mathcal{Z}$ で)。一方 $\Phi(b^{1/2}a_\alpha b^{1/2}) = \Phi(a_\alpha^{1/2}ba_\alpha^{1/2}) \leqq \Phi(a_\alpha^{1/2}ss^*a_\alpha^{1/2}) = \Phi(s^*a_\alpha s)$ より $\sigma_s(e) \leqq \sup_\alpha \sigma_s(a_\alpha)$ が成立する。　　以上。

今 $\mathcal{L}^+ = \{s \mid s \in \mathcal{M}^+, \Phi(s) \in \mathcal{Z}^+\}$, $L^1(\Phi) = \{\sum_{i=1}^n t_i s_i^*, s_i, t_i \in \mathcal{M}$ 且つ $\Phi(t_i^*t_i), \Phi(s_i^*s_i) \in \mathcal{Z}^+ (i=1,2,\cdots n)\}$ とすると, $L^1(\Phi)$ は $\mathcal{L}^+$ を非負部にもつ, 不変 $(M\cdot L^1(\Phi)\cdot M \subset L^1(\Phi))$ $\mathcal{Z}$-モヅルである。前の§2の場合と同様にして, $L^1(\Phi)^+ = \mathcal{L}^+$ 上 Φ と一致する $L^1(\Phi)$ から $\mathcal{Z}$ への忠実, 非負 $\mathcal{Z}$-モヅル線型写像 $\bar{\Phi}$ が一意に存在し, $s, t \in L^1(\Phi)$ に対して, $\Phi(|s+t|) \leqq \Phi(|s|) + \Phi(|t|)$ が成立。

今 $\|s\|_1 = \|\Phi(|s|)\|$ $(\forall s \in L^1(\Phi))$ とすると $L^1(\Phi)$ は $\|\ \|_1$ に関して $\mathcal{Z}$ 上の Banach-モヅルとなる。

略証) 最初に与えられた Cauchy 列 $\{t_n\}$ $(\|t_n - t_m\|_1 \to 0\ (n,m\to\infty))$ が $L^1(\Phi)^+$ の単調増加列の場合を考察する。適当に部分列をとることにより $\|t_n - t_{n+1}\|_1 < 1/4^n$ $(\forall n)$ と仮定してよい。スペクトル分解により $\{t_{n+1}-t_n\}''$ の射影元 e_n, 及び $\{t_n\}''$ の射影元

f_nが $0\le(t_{n+1}-t_n)e_n\le 2^{-n}\cdot 1$, $(t_{n+1}-t_n)\ge 2^{-n}(1-e_n)$, $0\le t_nf_n\le 2^n 1$ 且つ $t_n\ge 2^n(1-f_n)$ $(\forall n)$ となる如く存在する。今 $p_n=\bigwedge_{k\ge n} e_k\wedge f_k$ と置けば、$\Phi(1-p_n)\le(1+\sup_k\|t_k\|_1)2^{-n}\cdot 1$ $(\forall n)$が成立するから、$\{p_n\}$はSDDとなる。今 $p_n\le e_n\wedge f_n$に注意して $k\le n\le m$ ならば、$(t_m-t_n)p_k\in M$ 且つ $\|(t_m-t_n)p_k\|<1/2^{n-1}$ となる。さらに $t_kp_k\le 2^kf_k$に注意して数学的帰納法から $t_mp_k\in M$ $(\forall m\ge k)$ である。
今 $a(n,k)=p_kt_np_k+p_kt_n(1-p_k)+(1-p_k)t_np_k$ $(n\ge k)$ と置けば、$\{a(n,k)\}$は、Mの自己共役元の一様Cauchy列であるから、$a(n,k)\to s(k)$ $(n\to\infty)$ なる$M_{s.a.}$の元$s(k)$が存在する。簡単な計算から$\{s(k),p_k\}$はEMOとなり $t=[s(k),p_k]$ $(\in \mathcal{C})$は、$t\ge t_n$ 且つ $\Phi(t)=\sup_n\Phi(t_n)$ ($\mathcal{Z}$で)を満す。仮定から$\sup_n\|t_n\|_1<\infty$ ($\|t_n\|_1=\|\Phi(t_n)\|$)より、$\Phi(t)\in\mathcal{Z}^+$ ($t\in\mathcal{L}^+=L^1(\Phi)^+$)。

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\|t_n-t_{n-1}\|<\sum_{n=1}^{\infty}1/4^n<\infty$ $(t_0=0)$から$\forall\varepsilon>0$(実数)に対して $\sum_{n=k+1}^{\infty}\|t_n-t_{n-1}\|<\varepsilon$ $\forall k\ge k(\varepsilon)$ なる($\Rightarrow \sum_{n=k+1}^{m}\Phi(t_n-t_{n-1})=\Phi(t_m)-\Phi(t_k)\le\varepsilon\cdot 1$ $\forall k\ge k(\varepsilon)$) 自然数$k(\varepsilon)$が存在する。

従って $\Phi(t)-\Phi(t_k)\le\varepsilon 1$ $\forall k\ge k(\varepsilon)$ から $\|t-t_k\|_1\to 0$ $(k\to\infty)$が成立する。以上は[8]のAW*-analogueである。そして一般の場合は[8]と同様なので省略する。以上。

次に$L^2(\Phi)=\{s\mid s\in\mathcal{M},\ \Phi(s^*s)\in\mathcal{Z}^+\}$とすると簡単な計算から$L^2(\Phi)$は$\mathcal{Z}$-モヂュールで$L^2(\Phi)\cdot L^2(\Phi)\subset L^1(\Phi)$を満す。$a,b\in L^2(\Phi)$に対して、$(a,b)=\Phi(b^*a)$とすると$(\ ,\ )$は、

(1) $(a, b) = (b, a)^*$, $(a, a) \geq 0$, $(a, a) = 0 \leftrightarrow a = 0$;

(2) $(sa+b, c) = s(a, c) + (b, c)$, $a, b, c \in L^2(\Phi)$, $s \in Z$

を満す。さらに $\|a\|_2 = \|(a, a)\|^{1/2}$ ($a \in L^2(\Phi)$) とすると, $L^2(\Phi)$は, $\|\ \|_2$-に関して Z上のノルムモヂュルになり, さらに $\mathcal{M}$の Baer*-環である事及び性質(3)により

(3) $\{e_i\}$を Zの射影元の直交族で $\sum e_i = e$ (Zの射影元)ならば $a \in L^2(\Phi)$ が $e_i a = 0$ ($\forall i$) を満せば, $ea = 0$;

(4) $\{e_i\}$を Zの射影元の直交族で $\sum e_i = 1$ とし, $\{a_i\}$ を $L^2(\Phi)$ の$\|\ \|_2$-有界な族とすると, $L^2(\Phi)$の中に $e_i a = e_i a_i$ ($\forall i$)を満す aがたゞ一つ存在する ($a = \sum e_i a_i$)。

補題4.2. $L^2(\Phi)$は, 忠実な Z-AW*-モヂュルである。

問題は$\|\ \|_2$-ノルムによる $L^2(\Phi)$の完備性であるが, $L^1(\Phi)$の場合とほとんど同じなので証明は省略する。

§5 Mの2重交換子代数としての埋蔵定理。 今後簡単にするため $L^2(\Phi)$を $\mathfrak{M}$と書くことにする。$\mathfrak{M}$の有界モヂュル自己準同型写像全体 $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$は, 中心を Zとする I 型の AW*-代数である([7])。今Mの $\mathfrak{M}$上の正則表現を問題にしよう。 Mの左(右)-正則表現 π_1 (π_2) は, $\pi_1(x)t = xt$ ($\pi_2(x)t = tx$) $\forall x \in M$, $t \in \mathfrak{M}$ により定義されたMから $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$の中への *-準同型 (*-反準同型)写像である。補題1 (6) 及び (5) から $\pi_1(x) = 0$ ($\pi_2(x) = 0$)

から $x=0$ がでるから π_1 (π_2) は *-同型 (*-反同型) 写像である。
又補題4.1(4)及び[12, 補題1.4]から

補題5.1. $\pi_1(M)$, $\pi_2(M)$ は, $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ の AW*-部分代数である。

$\mathfrak{M}$ のかってな元 a に対して $V\{\pi_1(M)'a\}$ を $\pi_1(M)'a$ ($\pi_1(M)'$ は $\pi_1(M)$ の $\mathcal{B}$ に於ける交換子) によって生成された $\mathfrak{M}$ の AW*-部分モヅルとし, $E(a)$ をその上の射影作用素 (a に対する巡回射影作用素) とすると $E(a) \in \pi_1(M)''$ が成立する。実際 $A \in \pi_1(M)'$ に対して $A(\pi_1(M)'a) \subset V\{\pi_1(M)'a\}$。今 $\{e_\alpha\}$ を Z の射影元の直交族で $\sum_\alpha e_\alpha = 1$ とし, $\{y_\alpha\}$ を $\pi_1(M)'a$ の $\|\ \|_2$-有界な族とすると, $A(\sum_\alpha e_\alpha y_\alpha) = \sum_\alpha e_\alpha A y_\alpha$ ($\mathfrak{M}$ で) となるから $A(\sum_\alpha e_\alpha y_\alpha) \in V\{\pi_1(M)'a\}$ となり A の連続性により $A\{V\{\pi_1(M)'a\}\} \subset V\{\pi_1(M)'a\}$, i.e. $AE(a) = E(a)AE(a)$ ($\forall A \in \pi_1(M)'$) から $E(a) \in \pi_1(M)''$ となる。

定理. $\pi_1(M) = \pi_1(M)''$ ($\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ で), すなわちMは中心を Z とするI型AW*-代数の中に2重交換子代数として埋蔵できる。

略証) スペクトル定理から $\pi_1(M)''$ の射影元が $\pi_1(M)$ に入ることを示せば充分。$P \in \pi_1(M)''$ の射影元とすると, $\pi_1(M)''$ の巡回射影元の族 $\{E(x)\}$ があって, $P = \sum_x E(x)$ ($\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ で) と書けるから[12, 補題4.5]及び補題5.1から $E(x) \in \pi_1(M)$ $\forall x \in \mathfrak{M}$ を示せば充分である。$x \in \mathfrak{M}$ を $x = u|x|$ と極分解すると, $E(x) = \pi_1(u)E(|x|)\pi_1(u)^*$ が成立するから $x \geq 0$ として充分であ

る。スペクトル分解及びΦの性質から$\{x\}''$の中に射影元の列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$があって、$\Phi(LP(e_n x)) \in \mathcal{Z}^+$ 且つ $e_n x \in M^+ (\forall n)$, 且つ, $(e_n x - x, e_n x - x) \to 0\,(O)$ とできる。従って, $E(e_n x) \uparrow E(x)$ ($B(\mathfrak{M})$で) となるから上と同じ理由から $E(e_n x) \in \pi_1(M)$ を示せば充分。

ところが補題2.1(6)及び[12, 補題 4.2] から $E(x e_n) = LP_{B(\mathfrak{M})}(\pi_1(e_n x))$ ($LP_{B(\mathfrak{M})}(\cdot)$ は $B(\mathfrak{M})$ に於ける左射影元) が成立する。故に補題5.1.及び[6] により $E(e_n x) \in \pi_1(M)$ となり証明が終る。

以上。

系. B を $\mathcal{Z}$ を中心とする1型のAW^*-代数とし, $\mathcal{A}$ を $\mathcal{Z}$ を含む B の半有限型 AW^* 部分代数とすると B で $\mathcal{A} = \mathcal{A}''$ が成立する。

証明は上の定理を使えば[12, 定理 4.4] と同じなので省略する。

以上。

References

[1] J. Dixmier: Sur certains espaces considerès par M.H. Stone, Summa Brasil. Math., 2(1951), 151-182.

[2] J. Feldman: Embedding of AW*-algebras, Duke Math. J., 23(1956), 303-307.

[3] M. Goldman: Structure of AW*-algebras I., Duke Math. J., 23(1956), 23-34.

[4] H. Halpern: Embedding as a double commutator in a type 1 AW*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 148(1970), 85-98.

[5] I. Kaplansky: Projections in Banach algebras, Ann. of Math., 53(1951), 235-249.

[6] ___________: Algebras of type 1, Ann. of Math., 56 (1952), 460-472.

[7] ___________: Modules over operator algebras, Amer. J. Math., 45(1953), 839-858.

[8] T. Ogasawara and K. Yoshinaga: Extension of $\natural$-application to unbounded operators, J. Sci. Hiroshima, 19(1955), 273-299.

[9] K. Saitô: On the algebra of measurable oparators for a general AW*-algebra, Tôhoku Math. J., 21(1969), 249-270.

[10] ________: A non-commutative theory of integration for a semi-finite AW*-algebra and a problem of Feldman,

Tôhoku Math. J., 22(1970), 420-461.

[11] ________: On the algebra of measurable operators for a general AW^*-algebra II, to appear.

[12] H. Widom: Embedding in Algebras of type 1, Duke Math. J., 23(1956), 309-324.

[13] Ti Yen: Trace on finite AW^*-algebras, Duke Math. J., 22(1955), 207-222.