数理解析研究所講究録
第125巻 1971年 31-43

KdV ソリトンの衝突と多重発生

早大 理工 井上英俊
並木美喜雄

§1、 序

周知のごとく、KdV 方程式はソリトン解を有し、それは、あたかも古典的な粒子のようなふる舞をする。 ここでは、KdV ソリトンを自由粒子に準えて、散乱および多重発生の問題を考えてみる。 §2でまずソリトンの安定性を議論する。§3では、特に2個のソリトンの散乱の場合について、相互作用の結果生ずる位相のずれを詳しく論ずる。 §4で、ソリトンの多重発生の簡単なモデルを紹介する。

§2、 KdV ソリトンの安定性

以下の議論のために、KdV 方程式とその解を記しておこう。KdV 方程式は、

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0 \qquad (1)$$

で表わされるものである。 そのソリトン解は、

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= u_\infty + A\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{A}{12\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(x - Ct - \theta), \\
C &= u_\infty + \frac{A}{3}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

で与えられ，ここに $A\cdot\beta>0$ ，$u_\infty=\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)$ である。KdV方程式(1)は，ソリトン解以外の解も有する。よく知られているように，それはクノイダル波とよばれ，次式で与えられるようなものである。

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \gamma + \frac{A}{S^2}\,\mathrm{dn}^2\left(\frac{A}{12\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{S}(x - Vt - \theta), \\
V &= \gamma + \frac{A(2S^2-1)}{S^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

ここで重要なことは，解(3)が $S\to1$ の極限で，ソリトン解(2)に収斂することである。従って，以下の議論では，ソリトン解を，クノイダル波の特別な場合と見なすことにする。

さて，ソリトンの安定性の問題は，2点から論ずる必要がある。ソリトンが一個存在する場合の安定性であり，いわば，ソリトンの自由な伝播に関する安定性とも言えよう。この点は，簡単に示すことができる。まず，$u(x,t)=u_0(x,t)+\varepsilon\,w(x,t)$ なるKdV方程式(1)の解 u を考えよう。ここに，$u_0(x,t)$ は，クノイダル波(もしくはソリトン)解を，又 ε は無限小パラメータを表わすものとする。このとき，$w(x,t)$ あるいは，$\bar{w}(\xi,t)=w(x,t)$ （ただし $\xi=x-Vt$）

は、次の線型方程式を満足する。

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \mathcal{L}\bar{w}, \quad \mathcal{L} = DH,$$
$$D = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad H = -\beta D^2 + \varphi(\xi), \qquad (4)$$
$$\varphi(\xi) = V - \frac{A}{s^2} dn^2 \left(\frac{A}{12\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi}{s}$$

$w(x,t)$ に対する形式解を求めてみると、それは、

$$w(x,t) = \exp(t\mathcal{L})\bar{w}(\xi,0)$$
$$= \exp(t\mathcal{L}) \cdot \exp\left(-Vt\frac{\partial}{\partial x}\right) w(x,0)$$

で与えられることがわかる。

従って、オペレーター $\mathcal{L}$ の固有値が、もし0又は純虚数ならば、一般的に言って $w(x,t)$ は時間がたっても増加しない。実さい、オペレータ $\mathcal{L}$ の定義から、$\mathcal{L}D + D\mathcal{L}^{+} = 0$, $\mathcal{L}^{+}H + H\mathcal{L} = 0$ が成立するので、$\mathcal{L}$ の固有値は0又は純虚数となる。この事実は、$\mathcal{L}$ に対する固有値方程式 $\mathcal{L}y = \lambda y$ が、$(\sqrt{H}D\sqrt{H})(\sqrt{H}y) = \lambda(\sqrt{H}y)$ の形に変換されることからも結論される。以上でKdVソリトンは、自由伝播に関し安定であることが分った。なお、この種の議論は、"modified" KdV 方程式 $u_t + u^{\frac{2}{p}} u_x + \beta u_{xxx} = 0$ のソリトン解に対しても、まったく同様に成立する。

次に、散乱もしくは相互作用に関するソリトンの安定性（個数安定性）を考えてみよう。2個のソリトンの相互作用

の様子は、Zabusky と Kruskal の数値実験および Lax の解析的議論によって明らかにされているとおりである。[1,2] すなわち、はじめ互いに充分離れていた2個のソリトンを衝突させると、接近して相互作用した後、再びはじめとまったく同じ2個のソリトンが再生して離れてゆく。ただし、衝突のさいの相互作用の効果（非線型効果）が、位相のずれとなって現われる。（この点は、§3で詳しく議論する。）したがって、ソリトンの2体衝突が、ちょうど2個の粒子の弾性衝突のように、まったく同じ2個のソリトンを再生するわけである。[3]

こういったソリトン個数の保存は、次の理由により、一般に n 個のソリトンの衝突の場合にも成立するものと考えられる。Gardner, Green らは、$u(x,t)$ が KdV 方程式 (1) に従う場合、シュレーディンガー・オペレーター $L=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{1}{6\beta}u(x,t)$ の離散固有値が t-independent であることを示した。[4] 特に、$u(x,t)$ が振幅 A, $u_0=0$ のソリトン解であれば、オペレータ L は、ただ一個の離散固有値を有する。そこで今 $u(x,t)$ が KdV 方程式 (1) の解であり、初期値が n 個のソリトンを含むものとし、$\overbrace{u}^{t=t_0\text{で}}=\sum_{j=1}^{n}A_j\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{A_j}{12\beta}\right)^{\frac{1}{2}}(x-C_jt_0-\delta_j)$，ただし，$A_1>A_2>\cdots>A_n$, $\delta_1\ll\delta_2\ll\cdots\ll\delta_n$，とすれば，オペレーター L は n 個の離散固有値 $\lambda_j=\frac{A_j}{12\beta}$ $(j=1,2,\cdots,n)$ を有することになり，n 体ソリトンの衝突の結果同じ振幅

$A_j=12k_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ をもったn個のソリトンが再成するものと考えられる。事実、Ino と Ishi は、数値実験を行ない $n=3,4,5,6$ の場合について、初期値として与えたものとまったく同じ振幅をもったソリトンが再生されることを確認した。[5)]

以上のように、KdV方程式は、ソリトンの自由伝播とある種の弾性散乱を可能にしていると言える。

§3、　ソリトンの弾性散乱と位相のずれ

はじめに、ソリトンの2体衝突について詳しく考えてみよう。Lax が解析的に示したように、KdV 方程式の解は、もし初期値として互いに充分離れた2個のソリトンを与えるならば、充分時間がたった後に再び同じ2個のソリトンを再生する。こういった解は、次の漸近形で特徴づけられる。

$$
\begin{aligned}
&u(x,t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} v^{(\pm)}(x,t),\\
&v^{(\pm)}(x,t)=\sum_{j=1}^{2} s(x-c_j t-\theta_j^{(\pm)};\,c_j)
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

ここに、sは(2)で与えられるソリトン解であり、$\theta_j^{(\pm)}$ $(j=1,2)$ は、$t\to\pm\infty$ におけるj番目のソリトンの位相定数である。ソリトンの衝突の効果を記述するため、各ソリトンの位相のずれを次式で定義しよう。

$$\delta\theta_j = \theta_j^{(+)} - \theta_j^{(-)} \quad (j=1,2) \qquad (6)$$

明らかに，$\delta\theta_j$ は2個のソリトンの振幅 A_j $(j=1,2)$ および KdV方程式 (1) に現われる定数 β の関数である。すなわち，

$$\delta\theta_j = f_j(A_1, A_2; \beta) \quad (j=1,2) \qquad (7)$$

我々が知りたいのは、関数 f_j の形である。そのために KdV方程式の変換性を利用しよう。[6] KdV方程式 (1) は，次の変換性を有する。(i) 変換 $x \to \lambda x$, $t \to \lambda^3 t$, $u \to \lambda^{-2} u$ に対しKdV方程式は不変である。(ii) 変換 $x \to \mu x$, $t \to \mu t$, $u \to u$ によって，KdV方程式に含まれる定数 β は $\mu^2\beta$ で置き変えられる。これによって，関数 f_j は関係式

$$f_j(A_1, A_2; \beta) = (\lambda\mu)^{-1} \cdot f_j(\lambda^{-2}A_1, \lambda^{-2}A_2; \mu^2\beta) \qquad (8)$$

を満足することがわかる。上式で，$\mu^{-1} = \sqrt{\beta}$ ($\beta > 0$ の場合), $\lambda = \sqrt{A_1}$ あるいは $\sqrt{A_2}$ とすれば，ただちに位相のずれに対する表式

$$\delta\theta_j = \left(\frac{\beta}{A_j}\right)^{1/2} \Theta_j(\eta) \quad (j=1,2) \qquad (9)$$

を得る。ただし，ここで $\eta = \frac{A_1}{A_2}$, $\Theta_1(\eta) = f_1(1, \eta^{-1}; 1)$, $\Theta_2(\eta) = f_2(\eta, 1; 1)$ とした。$\beta < 0$ の場合にも同じ式が成立する。ところで，上式に現われる未知関数 $\Theta_j(\eta)$ $(j=1,2)$ については，簡単な関係式

$$\Theta_1(\eta) + \Theta_2(\eta) = 0 \qquad (10)$$

が成立する。すなわち，KdV方程式の保存則[6)]

$$I(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [(x - u_\infty t)(u - u_\infty) - \frac{1}{2}(u - u_\infty)^2] dx$$
$$= \text{constant} \qquad (11)$$

に、解 $u(x,t)$ の漸近形 $7^{\#)}$ を代入すれば，$\delta\theta_j$ に対する関係式

$$(48\beta A_1)^{\frac{1}{2}} \delta\theta_1 + (48\beta A_2)^{\frac{1}{2}} \delta\theta_2 = 0 \qquad (12)$$

が導びかれるが，これと (9) 式とからただちに (10)式が得られる。 よって位相のずれ $\delta\theta_j$ に対する一般的な関係式は、

$$\delta\theta_1 = \left(\frac{\beta}{A_1}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta(\eta), \quad \delta\theta_2 = -\left(\frac{\beta}{A_2}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta(\eta) \qquad (13)$$

となる。 ここで，$\Theta(\eta) = \Theta_1(\eta)$ と置いた。 なお，上式からただちに，

$$\delta\theta_1 / \delta\theta_2 = -\sqrt{\eta}, \quad \eta = A_1 / A_2 \qquad (14)$$

であることがわかるが，このことから，２つのソリトンの位相のずれの比は定数 β に無関係であることがわかる。 この種の関係式は，一般的なKdV方程式 $u_t + u^p u_x + \beta u_{xxx} = 0$ のうち，$p=2$ のものについても成立するということをここで注意しておこう。

ところで、(13)式に含まれる未知関数$\Theta(\eta)$は、漸近条件(5)だけからは知ることができない。これを求めるには、解uそのものが必要である。漸近条件(5)を満足する解は、求めることができて、次式で与えられる形をしている。

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= 24\beta\,|\kappa_1^2-\kappa_2^2|\cdot\frac{N(x,t)}{D(x,t)},\\
N(x,t) &= |\kappa_1^2-\kappa_2^2| + \kappa_1^2\cosh 2\kappa_2(x-C_2t-\delta_2)\\
&\quad + \kappa_2^2\cosh 2\kappa_1(x-C_1t-\delta_1), \qquad (15)\\
D(x,t) &= \big[\,|\kappa_1-\kappa_2|\cosh\{(\kappa_1+\kappa_2)x-(\kappa_1C_1+\kappa_2C_2)t\\
&\quad -(\kappa_1\delta_1+\kappa_2\delta_2)\} + (\kappa_1+\kappa_2)\cosh\{(\kappa_1-\kappa_2)x-\\
&\quad -(\kappa_1C_1-\kappa_2C_2)t-(\kappa_1\delta_1-\kappa_2\delta_2)\}\big]^2
\end{aligned}
$$

ここに、$\kappa_j=(A_j/12\beta)^{\frac{1}{2}}$, $C_j=A_j/3$ であり、δ_jは任意定数、又 $u_\infty=0$ とした。(15)式を利用して$\Theta(\eta)$を求めた結果は、次式のとおり。

$$
\Theta(\eta) = \pm\sqrt{12}\cdot\log\frac{\sqrt{\eta}+1}{\sqrt{\eta}-1} \qquad (16)
$$

ただし、+符号は$\beta>0$のとき、又−符号は$\beta<0$のとき。

なお、(13)式および(16)式から、2個のソリトンの間には、引力が働いていることが結論される。

多数個のソリトンの衝突の場合にも、上記の議論は一般に可能である。もし漸近条件

$$
u(x,t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} \sum_{j=1}^{n} S(x-C_jt-\theta_j^{(\pm)};C_j) \qquad (17)
$$

を仮定するならば，各ソリトンの位相のずれ $\delta\theta_j = \theta_j^{(+)} - \theta_j^{(-)}$ は，

$$\delta\theta_j = \left(\frac{\beta}{A_j}\right)^{\frac{1}{2}} \Theta_j(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}) \quad (j=1,2,\cdots,n)$$
$$\eta_j = \eta_j / \eta_n \qquad (j=1,2,\cdots,n-1) \qquad (18)$$

で与えられ，保存則(11)により，関係式

$$\sum_{j=1}^{n} \Theta_j(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_{n-1}) = 0 \qquad (19)$$

が成立することがわかる。

§4、 ソリトンの発生

この節では，ソリトンの個数を変えるような、KdV方程式に対する摂動モデルを簡単に紹介する。 KdV方程式に，附加項を加えた，次のような方程式を考える。

$$u_t + u u_x + \beta_0 u_{xxx} + \varepsilon F = 0 \qquad (20)$$

ここに，εは微小パラメータで，Fは一般的にはx, t, u, u_x等に依存しても良い。 Fをどのように選べば，ソリトンの個数に変化が起るかということが問題となるが，最も簡単な例としては，次のものが考えられる。

$$F = \rho(x) u_{xxx} \ , \quad \rho(x) u u_x \qquad (21)$$

この場合，(20)式はおのおの

$$u_t + uu_x + \beta(x)\cdot u_{xxx} = 0, \qquad (22)$$
$$\beta(x) = \beta_0 + \varepsilon\, \rho(x).$$

$$u_t + \alpha(x) uu_x + \beta_0 u_{xxx} = 0, \qquad (23)$$
$$\alpha(x) = 1 + \varepsilon\, \rho(x).$$

となり，KdV方程式に於いて，uu_x，あるいはu_{xxx}の係数をxの関数で置き換えた形になっている。ここでもし，$\rho(x)$が，xの或る領域Rで1，またRの外で0となるようなStep Functionであるとすれば，領域Rの外に於いてソリトン解であったものも，Rの中ではソリトン解でなくなる。従って，BerezinとKarpmanの数値実験の結果を考慮するならば[7]，Rの外に置かれたソリトンが，方程式(22)あるいは(23)に従い進行して行ったとすると，しだいにその形をくずし，領域Rで数個のソリトンを生成するであろうと期待される。このことを確しかめる為に，我々は数値実験を行なってみたが，パラメーターεを適当に選べば，期待どうり，1個のソリトンから，複数個のソリトンが生成されるということが分った。数値実験の例を，図に示しておく。

Fig. 1 ソリトンの発生

$$u_t + u u_x + \beta(x) u_{xxx} = 0$$

$$\beta_0 = 1.0 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon = -0.8 \times 10^{-4}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0.4,\ x > 0.6) \\ 1 & (0.4 \leq x \leq 0.6) \end{cases}$$

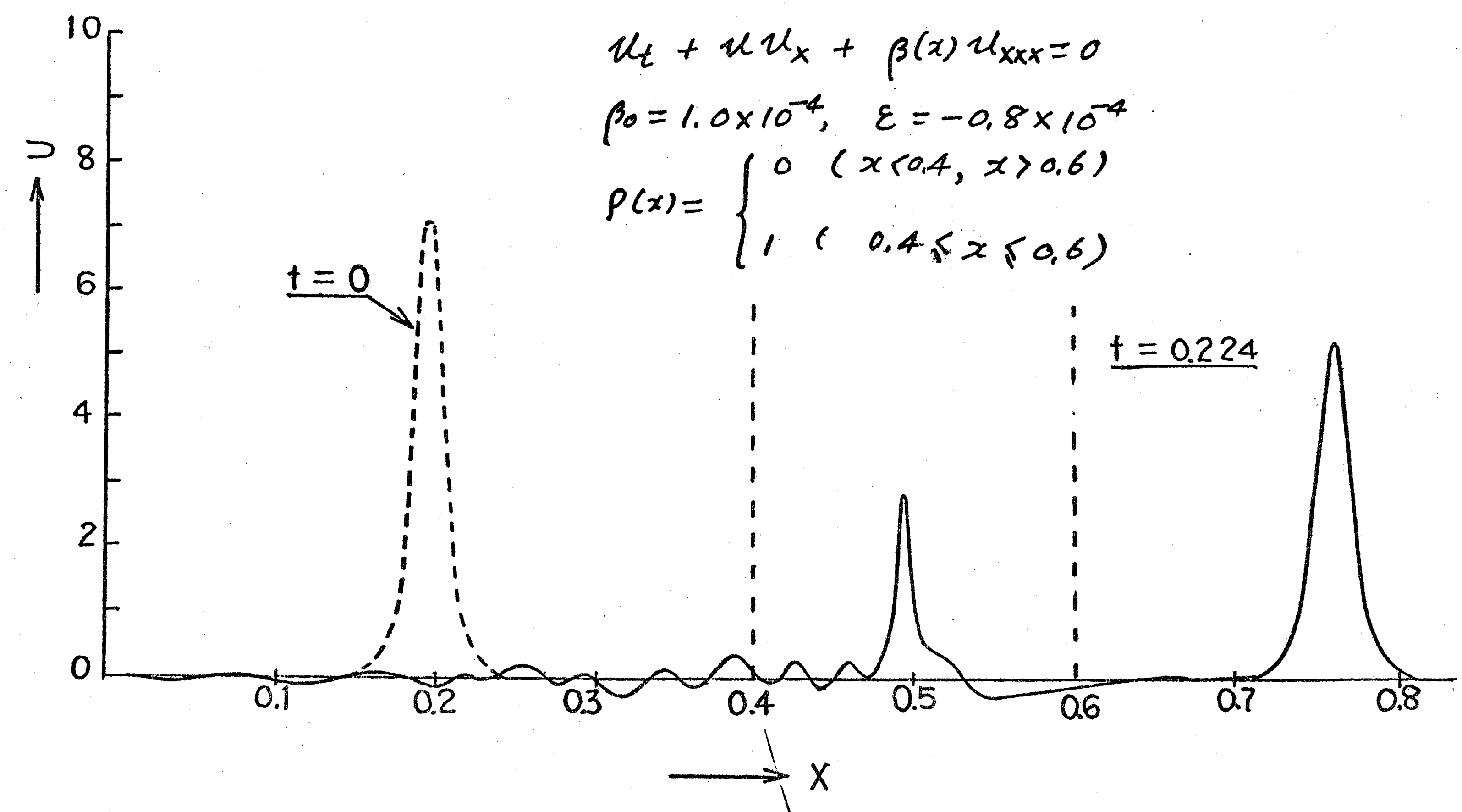
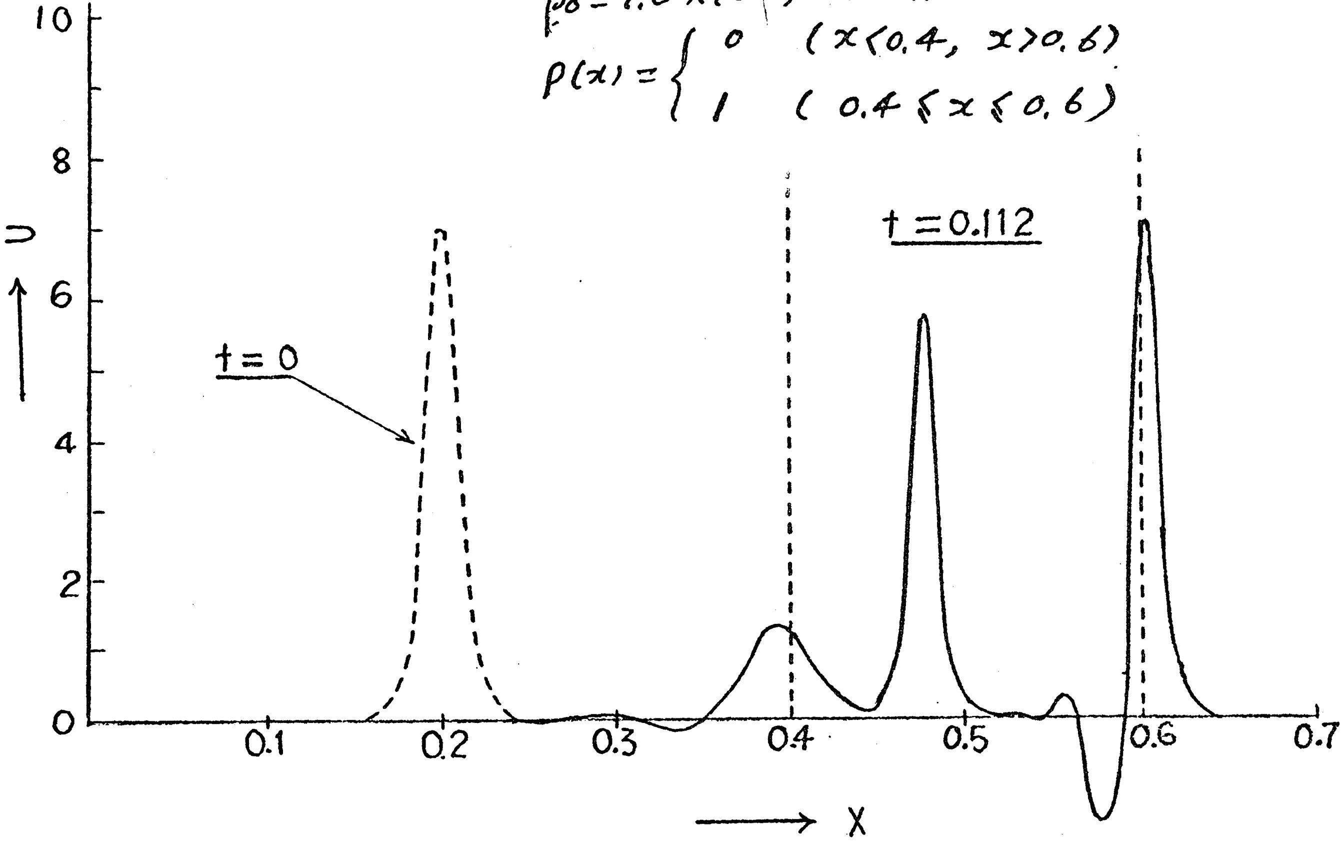


Fig. 2 ソリトンの発生

$$u_t + \alpha(x)\, u u_x + \beta_0 u_{xxx} = 0$$

$$\beta_0 = 1.0 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon = 1.0$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0.4,\ x > 0.6) \\ 1 & (0.4 \leqq x \leqq 0.6) \end{cases}$$



REFERENCES

1) N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Letters 15, 240 (1965); N. J. Zabusky, "A Synergetic Approach to Problems of Nonlinear Dispersive Wave Propagation and Interaction", Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1967.

2) P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).

3) H. Inoue, M. Namiki and I. Ohba, KAGAKU 40, 394 (1970).

4) C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Phys. Rev. Letters 19, 1095 (1967).

5) R. Iino and H. Ishii, private communication.

6) R. M. Miura, C. S. Gardner and M. D. Kruskal, J. Math. Phys. 9, 1204 (1968).

7) Yu. A. Berezin and V. I. Karpman, Zh. Eksp. i Theor. Fiz. 51, 1557 (1966), Soviet Phys. JETP 24, 1049 (1967).