

Wave modulation と ソリトン

京大 基研 矢嶋 信男
理 研 大内 昭司

非線型分散系の最近の研究で得られている興味深い結果の一つは、solitary wave と呼ばれる特殊な定常解が、波動の時間的发展に於て、重要な役割を演ずるということである。

これは、特に Korteweg-de Vries Equation,

$$u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0, \quad (1)$$

によって記述される系について、詳しく調べられた。¹⁾ ここで subscript は、その量^量についての偏微分を意味している。この方程式は、shallow water wave²⁾、格子波動³⁾、collisionless plasma 中でのイオン音波⁴⁾ や magneto-acoustic wave⁵⁾ など、多くの物理現象で⁶⁾ small but finite amplitude wave を長波長の場合に近似的に記述するものである。方程式(1)は、solitary wave solution

$$\left. \begin{aligned} S(x, t; c, x_0) &= u_0 + A \operatorname{sech}^2\left(\frac{x - ct - x_0}{\Delta}\right) \\ c &= u_0 + A/3 \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\Delta = (12\beta/A)^{1/2} \quad]$$

を持っている。Eq. (1)の解の時間的な振舞は、あたかも初期値の中に(2)の solitary wave が潜んでいたかの如く、時間の経過とともに、つぎつぎと solitary wave があらわれる。発生した solitary wave は、その個性を保存し、相互の衝突によってもそれを失わない。これらの性質のために、この solitary wave は "soliton" と名づけられた。

Eq. (1)以外にも、多くの class の方程式が solitary wave solution を持っている⁷⁾。しかし、これらの solitary wave が KdV equation に於けるような基本的な役割を果たしているかどうかは、未だ明らかになっていない。

ここでは、次の Nonlinear Schrödinger Equation

$$-i\psi_t = \psi_{xx}/2 + |\psi|^2\psi \quad (3)$$

に於ける soliton の役割について、numerical solution を求めることで調べる。このタイプの方程式は、非線型分散系を伝播する modulated plane wave の振幅を近似的に記述するものであって、特に nonlinear optics や heat pulse in solid の self trapping の現象を調べるのに用いられている⁸⁾。Eq. (3)の solitary wave solution は

$$S(x,t; a, v, x_0) = a \operatorname{sech}(a(x-vt-x_0)) \times \exp\{ivx - i(v^2-a^2)t/2\} \quad (4)$$

であることは、容易に示される。KdV solitary wave (2) は、one parameter family を作ってゐるが、(4)は a と v との 2 つの parameter を含む。Eq. (3) ならびにその solitary wave solution (4) は Galilei 変換に対して invariant であることは、直ぐ判る。

$$x' = x - vt$$

$$t' = t$$

$$\varphi'(x', t') = \exp\{-i v x + i v^2 t / 2\} \cdot \varphi(x, t)$$

(5)

solution の時間的発展を調べるために、(3)は差分方程式に書き替へられた。その際、微分はすべて対称差分、即ち $\varphi_t = \{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t-\Delta t)\} / 2\Delta t$, $\varphi_{xx} = \{\varphi(x+\Delta x) - 2\varphi(x) + \varphi(x-\Delta x)\} / (\Delta x)^2$ で置き換へられた。計算にあたり、 $\Delta x = 5 \times 10^{-3}$, $\Delta t = 10^{-4}$ がとられた。数値計算の過程では、保存量 $\int |\varphi|^2 dx$ が check されたが、以下に示す場合には、いずれも 1% の範囲でこの量は保存されてゐた。

先ず solitary wave の衝突問題が、

$$\begin{aligned} \varphi(x, t=0) &= \sum_j S(x, t=0; a_j, v_j, x_{0j}) \\ &= \sum_j S_j \end{aligned} \quad (6)$$

の初期値の下に解かれた。2体問題については Fig. 1, 2, 3体問題については Fig. 3 にその結果が示されてゐる。衝突

によって *solitary wave* の個性が失われぬのは、KdV Eq. の場合と全く同じである。2つの *solitary wave* が作用し合う場合、波形が時向と共にどのように変化して行くかが第1図からわかるであろう。第2図には、幾つかの parameter の組に対応して、2つの *solitary wave* がもっとも接近したと思われる場所での振幅の絶対値が示されている。2つの *solitary wave* の相対速度を大きくすると、衝突はあり抜けに近くなることが判る。すなわち、衝突の前後での *phase shift* (< 0) の値は小さくなる。2つの *solitary wave* の振幅の差が小さいと、離れたところで *energy* をやり取りするが、この差が大きくなると、小さい方の波は大きい方に呑み込まれてしまう。それにも拘わらず、再び元の波が現われて来る。第3図には ~~二つの case に分けて~~ 3体問題の結果の一例が示されている。*solitary wave* の個性の保存は、非常に良く成立している。

(6)とは少し違った初期値、すなわち

$$\psi(x, t=0) = \sum_j S_j \exp(id_j) \quad (6')$$

についての解も求められた。*solitary wave* の接近しているところでの波形は全く異なっているが、衝突の際の *phase shift* や個性の保存については、全然差がみられない。

次に、ある初期値から出発したときの *solitary wave*

formationの問題が、

$$\varphi(x, t=0) = b \operatorname{sech}(ax) \quad (7)$$

という初期値の下に(3)を数値積分することによって調べられた。結果は第4図に示されている。(b/a)があるcriticalな値をこえると、solitary waveが発生しているようにみえる。b=10, a=2のcaseでは明らかに2個のsolitary waveが発生しているようである。この問題は、(3)の平面波解のinstabilityとの関連に於て、Karpman-Kruskalによって調べられ、同じような答が既に得られている。formationの条件や、発生したsolitary waveの振舞いについては、更に長時間の観察を必要とするため、我々はまだ十分に調べていない。

KdV Equationのみならず、(3)のようなNonlinear Schrödinger Eq.に於てもsolitary waveが重要な役を演ずることが判った。これは、(3)式が、density, momentum, energy以外にも保存量を持つていることにも関係しているのかも知れない。我々は既に(3)式が少くとも次のような保存量

$$I_1 = \int |\varphi|^2 dx$$

$$I_2 = (2i)^{-1} \int (\varphi^* \varphi_x - \varphi_x^* \varphi) dx$$

$$I_3 = \int (|\varphi_x|^2 - |\varphi|^4) dx$$

$$I_4 = (2i)^{-1} \int \{ (\varphi^* \varphi_{xxx} - \varphi_{xxx}^* \varphi) + \\ + 3|\varphi|^2 (\varphi^* \varphi_x - \varphi_x^* \varphi) \} dx$$

$$I_5 = \int \{ |\varphi_{xx}|^2 / 2 - (|\varphi|_{,x}^2)^2 / 2 - \\ - 3|\varphi|^2 |\varphi_x| + |\varphi|^6 \} dx$$

を持って来ることを示し得た。これらの保存量の重要性、更にこれ以外にも、場合によっては可附番無限個の保存量が存在する可能性については、今はまだ良く判らないうが、KdV Equation について述べられた Lax の議論などが、方程式(3)を取り扱かうときにも参考になると思われる。)

References

- 1) N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Letters 15 (1965) 240,
 Yu. A. Berezin and V. I. Karpman, Zh. Eksp. i Teor. Fiz. 51 (1966) 1557, Sov. Phys. JETP 24 (1967) 1049,
 C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal and R. M. Miura, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 1045,
 V. I. Karpman, Phys. Rev. Letters 25A (1967) 700,
 Yu. A. Berezin, Sov. Phys. Tech. Phys. 13 (1968) 11.

- R. M. Miura, *Journ. Math. Phys.*, 9 (1968) 1202,
 R. M. Miura, C. S. Gardner and M. D. Kruskal, *Journ. Math. Phys.* 9 (1968) 1204,
 M. D. Kruskal, R. M. Miura and C. S. Gardner, *J. M. P.*, 11 (1970) 952
 P. D. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.*, 21 (1968) 467.
- 2) D. J. Korteweg and G. de Vries, *Phil. Mag.*, 39 (1895) 442.
- 3) See, for example, N. J. Zabusky, *Proceedings of the Symposium on Nonlinear Partial Differential Equations*, Ed. by W. F. Ames (Academic Press Inc., New York, 1967) p. 233
- 4) H. Washimi and T. Taniuti, *Phys. Rev. Letters* 17 (1966) 966.
- 5) C. S. Gardner and G. K. Morikawa, *Comm. Pure Appl. Math.* 18 (1965) 35,
Courant Inst. of Math. Sci., N.Y.U. Report NYO 9082 (1960).
- 6) T. Taniuti and C. C. Wei, *Journ. Phys. Soc. (Japan)* 24 (1968) 941,
 C. H. Su and C. S. Gardner, *Journ. Math. Phys.* 10

(1969) 536.

- 7) See, for example, A. Scott, *Active and Nonlinear Wave Propagation in Electronics* (Wiley-Interscience, 1970).
- 8) V. I. Karpman and E. M. Krushkal', *Sov. Phys. JETP* 28 (1969) 277,
 T. Taniuti and N. Yajima, *Journ. Math. Phys.*, 10 (1969) 1369,
 N. Asano, T. Taniuti and N. Yajima, *Journ. Math. Phys.* 10 (1969) 2020,
 V. Narayanamurti and C. M. Varma, *Phys. Rev. Lett.* 25 (1970) 1105,
 F. D. Tappert and C. M. Varma, *Phys. Rev. Lett.* 25 (1970) 1108.

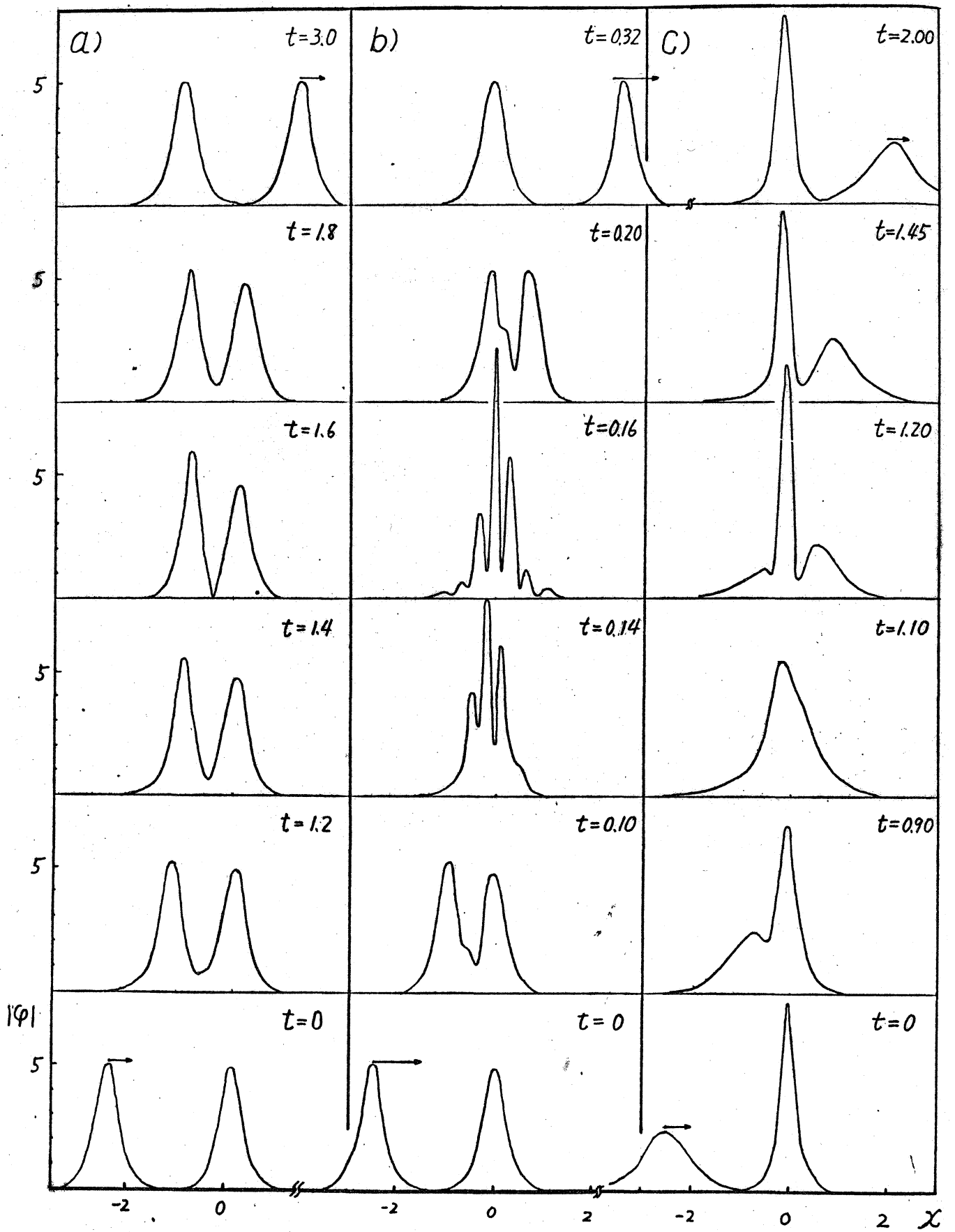


FIG. 1

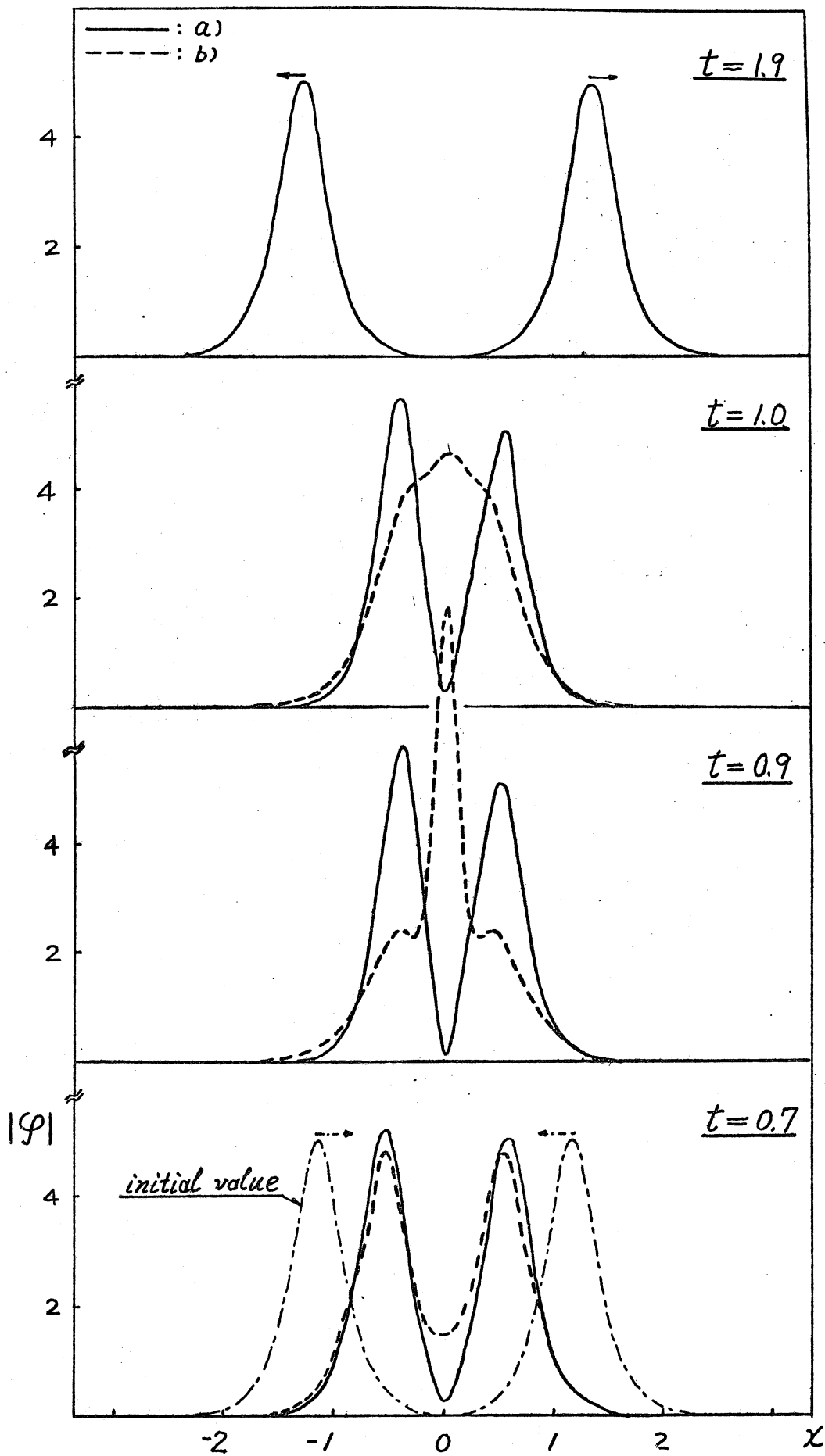


FIG. 2

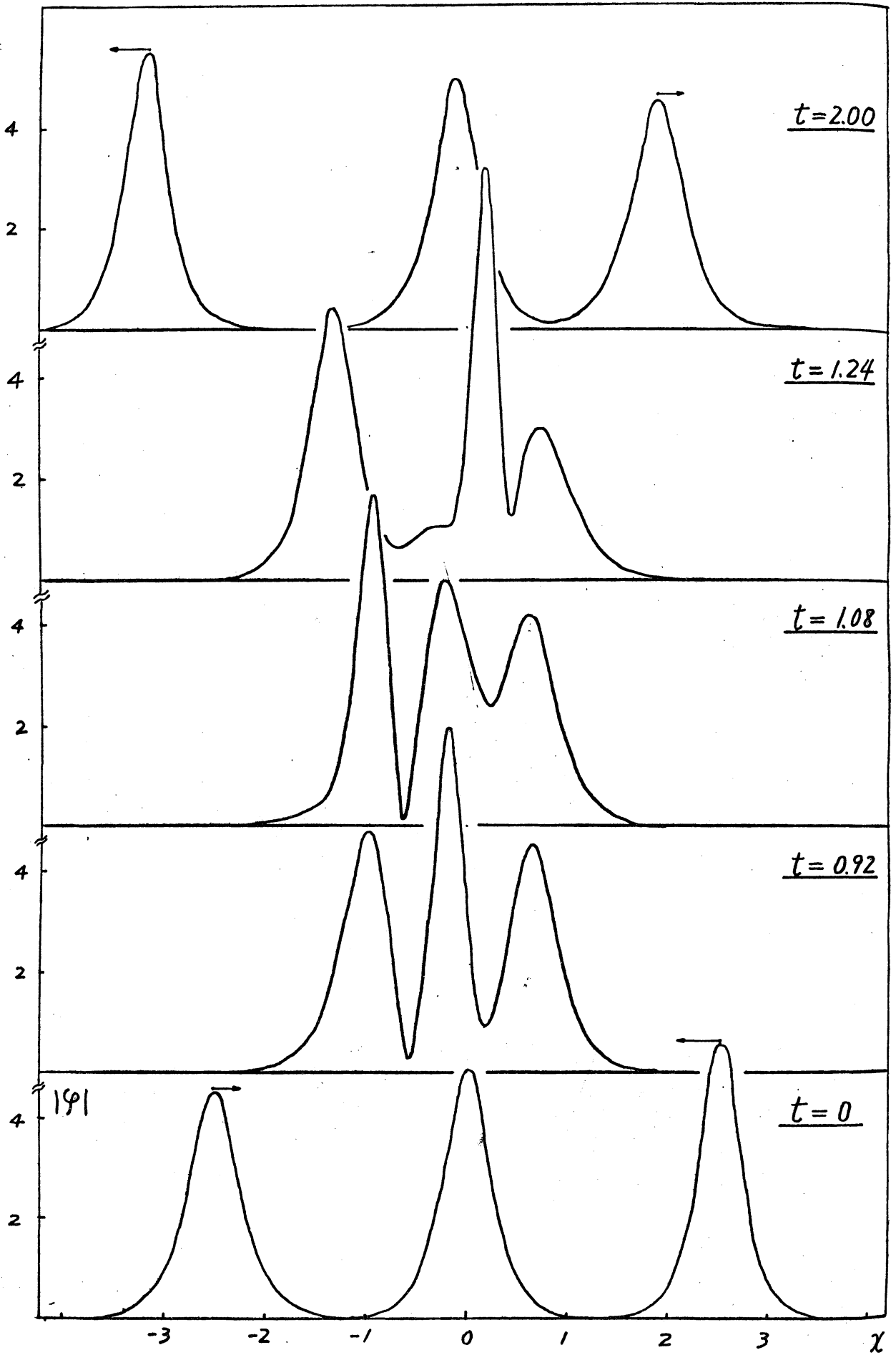


FIG. 3

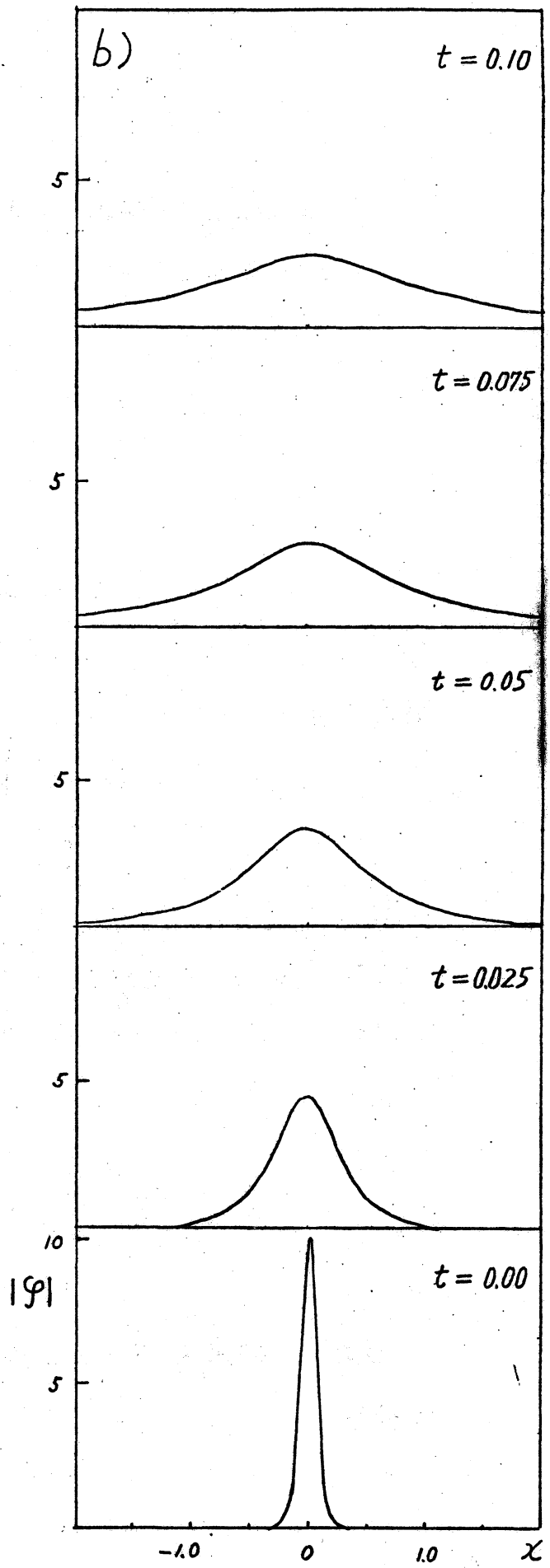
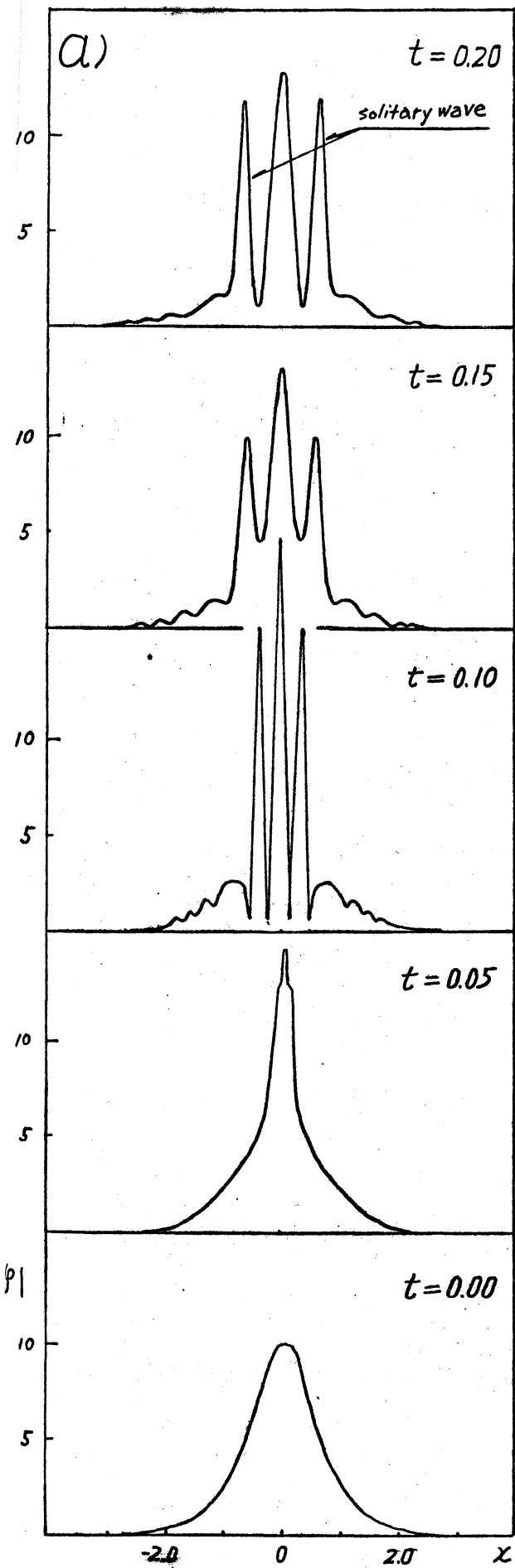


FIG. 4