数理解析研究所講究録
第 125 巻 1971 年 56-67

Generalized Korteweg de Vries (G. KdV) 方程式の大域解について

早大 理工　堤 正義　飯野理一

§1. 非線型格子振動の式から物理的に導かれた，KdV 方程式 ($p=1$) および G. KdV 方程式 ($p\geqq 2$) のコーシー問題を考える (cf. [1]-[7])

(1.1) $$u_t + \gamma u^p u_x + u_{xxx} = 0, \quad \gamma=\pm 1, \ p=1,2,\cdots$$

(1.2) $$u(x,0) = f(x)$$

記号は主に Lions [8] に従った。

[主要定理]

(2.8) で定義された安定な集合 W が存在して，

$f(x) \in H^3(R^1)\cap W$ ならば，コーシー問題 (1.1), (1.2) は一意的な大域解 $u(x,t) \in L^\infty(0,T; H^3(R^1))\cap C[0,T; L^2(R^1)]$ をもつ．但し T は任意の正数である．さらに $u(x,t)\in W$, $\forall t$ である．

[注意] 初期条件の regularity をあげると解の regularity もあがる．

§2. 主要定理の証明

安定な集合Wを定義する. その為には次の2つの補題が必要である.

補題1. 任意の関数 $u(x) \in H^1(R^1)$ に対して, 不等式

(2.1) $$\|u\|_{L^q(R^1)} \leqq 2^\alpha \|u_x\|^\alpha \|u\|^{1-\alpha}, \qquad q \geqq 2$$

が成り立つ. ここで $\alpha = (q-2)/2q$.

補題2.

(2.2) $$I_1(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u^2\,dx$$

(2.3) $$I_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2\,dx - \frac{\gamma}{(p+1)(p+2)}\int_{-\infty}^{\infty} u^{p+2}\,dx$$

は. G. KdV 方程式(1.1) の積分不変量である.

そこで

(2.4) $$J_\varepsilon(u) = \varepsilon I_1(u) + I_2(u)$$

とおき

(2.5) $$d_\varepsilon = \inf_{\substack{u \in H^1(R^1) \\ u \neq 0}} \sup_{\lambda \geqq 0} J_\varepsilon(\lambda u)$$

とする. このとき

補題3. 任意の fixed $\varepsilon>0$ に対して $d_\varepsilon > 0$.

証明)

$$J_\varepsilon(\lambda u) = \frac{\lambda^2}{2}\left(\varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx\right) - \frac{\lambda^{p+2}}{(p+1)(p+2)}\gamma\int_{-\infty}^{\infty} u^{p+2} dx$$

$$= \frac{\lambda^2}{2} a_\varepsilon(u) - \frac{\lambda^{p+2}}{(p+1)(p+2)} b(u)$$

ここで

$$a_\varepsilon(u) = \varepsilon\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} u_x^2 dx.$$

$$b(u) = \gamma\int_{-\infty}^{\infty} u^{p+2} dx.$$

補題1とYoungの不等式を用いれば,

(2.6) $$|b(u)| \leqq 2^{p/2} \|u_x\|_{L^2(R^1)}^{p/2} \cdot \|u\|_{L^2(R^1)}^{(p+4)/2}$$

$$\leqq C(\varepsilon)\, a_\varepsilon(u)^{(p+2)/2}$$

ここで $C(\varepsilon)$ は ε に依存する定数である.

従って, もし $b(u) < 0$ ならば

$$\sup_{\lambda \geqq 0} J_\varepsilon(\lambda u) = +\infty.$$

もし $b(u) > 0$ ならば

$$\sup_{\lambda \geqq 0} J_\varepsilon(\lambda u) = J_\varepsilon\left(\{(p+1)a_\varepsilon(u)/b(u)\}^{1/p} u\right)$$
$$= \frac{p(p+1)^{2/p}}{2(p+2)} \frac{a_\varepsilon(u)^{(p+2)/p}}{b(u)^{2/p}}$$

従って ( ) によって

$$\sup_{\lambda \geqq 0} J_\varepsilon(\lambda u) \geqq \frac{p(p+1)^{2/p}}{2(p+2)} \frac{1}{C(\varepsilon)} > 0 .$$

(q. e. d.)

安定な集合 W を定義する：

(2.7) $\quad W_\varepsilon = \{ u \mid u \in H^1(R^1),\ 0 \leqq J_\varepsilon(\lambda u) < d_\varepsilon ,\ {}^\forall \lambda \in [0,1] \}$

(2.8) $\quad W = \bigcup_{\varepsilon > 0} W_\varepsilon$

このとき

補題4.

$$W_\varepsilon = W_{\varepsilon *} \cup \{0\}$$

$$W_{\varepsilon *} = \{ u \mid u \in H^1(R^1),\ a_\varepsilon(u) - \frac{1}{(p+1)} b(u) > 0 ,\ J_\varepsilon(u) < d_\varepsilon \}.$$

証明は Lions [ ] P.31 と同様にできる.

補題5. $u(x,t)$ をコーシー問題 (1.1) (1.2) の解とする.

もし初期値 $f(x) \in W_\varepsilon$ ならば

(2.9) $\quad u(x,t) \in W_\varepsilon , \quad {}^\forall t \geqq 0 . \quad {}^\forall \varepsilon > 0$ fixed.

証明)

(2.9) がなりたたないとする. $u(x,t) \not\equiv 0$ としてよい.

t^* を 解 $u(x,t)$ が W_ε に属さない最小の時間 t とすると,

$$u(x,t^*) \in \partial W_\varepsilon \quad (W_\varepsilon \text{の境界})$$

となる．このとき，補題4から

$$(2.10)\qquad a_\varepsilon(u(t^*)) - \frac{1}{p+1}b(u(t^*)) = 0,$$

または

$$(2.11)\qquad J_\varepsilon(u(t^*)) = d_\varepsilon .$$

(2.10)ならば

$$J_\varepsilon(u(t^*)) = J_\varepsilon(\{(p+1)a_\varepsilon(u(t^*))/b(u(t^*))\}^{1/p}u(t^*))$$
$$\geqq d_\varepsilon .$$

これは，$J_\varepsilon(u(t))$がG.KdV方程式の積分不変量であること，すなわち

$$(2.12)\qquad J_\varepsilon(u(t^*)) = J_\varepsilon(f) < d_\varepsilon$$

に矛盾する．

同様に(2.11)の場合も(2.12)に矛盾する．(q.e.d.)

次に，コーシー問題(1.1).(1.2)の局所解を逐次近似によって構成する：

$$(2.13)\qquad \begin{cases} u^{(0)}(x,t) \equiv 0, \\ u^{(n)}_t + \gamma(u^{(n-1)})^p u^{(n)}_x + u^{(n)}_{xxx} = 0, \quad (n=1,2,\cdots) \\ u^{(n)}(x,0) = f(x). \end{cases}$$

コーシー問題

$$(2.14)\qquad \begin{cases} u_t + \varphi(x,t)u_x + u_{xxx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

に対して，次の補題が成り立つ．

補題 6.　$f \in H^3(R^1)$，$\varphi(x,t) \in L^\infty(0,T;H^3(R^1)) \cap C[0,T;L^2(R^1)]$ ならば，コーシー問題 (2.14) は，一意的な解

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T;H^3(R^1)) \cap C[0,T;L^2(R^1)]$$

をもつ．

証明は parabolic regularization

$$\begin{cases} (u_\varepsilon)_t + \varphi(x,t)(u_\varepsilon)_x + (u_\varepsilon)_{xxx} + \varepsilon(u_\varepsilon)_{xxxx} = 0, & \varepsilon > 0 \\ u_\varepsilon(x,0) = f(x) \end{cases}$$

を用いれば，容易である．

近似解の列 $\{u^{(n)}\}$ は，各 $n>0$ に対して，補題6によって

$$u^{(n)}(x,t) \in L^\infty(0,T;H^3(R^1)) \cap C[0,T;L^2(R^1)]$$

となる．

n に関する帰納法によって，$u^{(n)}$ に関する次の評価が得られる．

補題 7.　ある正数 t_k が存在して，$0 \leqq t \leqq t_k$ において

(2.15)　$$\|u^{(n)}(t)\|_k \leqq L_k, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

但し，L_k は n には依存しない正の定数である．また

$\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{H^k(R^1)}$．

補題7を使えば，次の補題を得る．

補題8．ある正数 T^* が存在して，$0 \leqq t \leqq T^*$ において

$$(2.16)\quad \sup_{0\leqq t\leqq T^*} \|u^{(n+1)}(t) - u^{(n)}(t)\|_2^2 \leqq \rho \sup_{0\leqq t\leqq T^*} \|u^{(n)}(t) - u^{(n-1)}(t)\|_2^2, \quad 0<\rho<1$$

が成り立つ．

補題7，8から，ある関数 u と関数列 $\{u^{(n)}\}$ の部分列 $\{u^{(\mu)}\}$ が存在して，$\mu \to \infty$ のとき

$$u^{(\mu)} \longrightarrow u \quad \text{in } L^\infty(0,T^*, H^3(R^1)) \text{ weakly star}$$

$$u^{(\mu)} \longrightarrow u \quad \text{in } L^\infty(0,T^*, H^2(R^1)) \text{ strongly}.$$

方程式 (2.13) から容易に $u(x,t)$ はコーシー問題 (1.1) (1.2) の解であることがわかる．さらに方程式 (1.1) を考慮すると

$$u(x,t) \in C[0,T^*; L^2(R^1)]$$

となる．以上から次の局所存在定理が得られる．

定理1．すべての初期値 $f(x) \in H^3(R^1)$ に対して，正の数 T^* が存在して区間 $0 \leqslant t \leqslant T^*$ において，コーシー問題 (1.1)，(1.2) は一意的な解

$$u(x,t) \in L^\infty(0,T^*; H^3(R^1)) \cap C[0,T^*; L^2(R^1)]$$

をもつ．

一意性の証明は通常のエネルギー法で証明できる．

コーシー問題(1.1),(1.2)の解が大域的に存在することを言うためには，次の a priori 評価が必要である．

定理2．$f(x) \in W \cap H^3(R^1)$ ならば，任意の $T>0$ に対して

$$(2.17) \qquad \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u(t)\|_3 < C .$$

但し，C はいろいろな正の定数をあらわすものとする．

証明）

$f(x) \in W$ であるから，ある $\varepsilon_0>0$ が存在して $f(x) \in W_{\varepsilon_0}$．
このとき，補題5から任意の $t\geqq 0$ に対して

$$u(x,t) \in W_{\varepsilon_0}.$$

そこで補題4を用いると

$b(u)<0$ ならば $\quad \frac{1}{2} a_{\varepsilon_0}(u(t)) \leqq J(u(t)) = J(f) < C$

$b(u)>0$ ならば $\quad a_{\varepsilon_0}(u(t)) > \frac{1}{p+1} b(u(t))$ であるから

$$\frac{p}{2(p+2)} a_{\varepsilon_0}(u(t)) \leqq J(u(t)) = J(f) < C$$

従って

$$(2.18) \qquad \sup_{0\leqq t\leqq T} \|u(t)\|_1 < C .$$

次に

$$J_3(u) = \|u_{xx}\|^2 + \frac{5\gamma}{3(p+1)} \int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1} u_{xx}\, dx$$

とおく．

$I_3(u)$ を t に関し微分し，方程式(1.1)を用い，部分積分をほどこせば

$$\frac{d\,I_3(u(t))}{dt} = -\frac{\gamma p(p-1)(p-2)}{12}\int_{-\infty}^{\infty} u^{p-3}u_x^5\,dx$$

$$-\frac{5\gamma}{3}\int_{-\infty}^{\infty} u^{2p}u_x u_{xx}\,dx$$

となる．ところで

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u^{p-3}u_x^5\,dx\right| \leqq (\sup|u|)^{p-3}(\sup|u_x|)^3\|u_x\|^2$$

$$\leqq c\|u_{xx}\|^2 + c,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u^{2p}u_x u_{xx}\,dx\right| \leqq (\sup|u|)^{2p}\|u_x\|\,\|u_{xx}\|$$

$$\leqq c\|u_{xx}\|^2 + c\ .$$

ここで補題1と(2.18)を用いた．従って

$$\frac{d\,I_3}{dt} \leqq c\|u_{xx}\|^2 + c\,.$$

これを t に関して積分すると

$$\|u_{xx}\|^2 \leqq c\int_0^t \|u_{xx}\|^2 ds + ct + \|f_{xx}\|^2$$

(2.19)

$$+\frac{5\gamma}{3(p+1)}\int_{-\infty}^{\infty} f^{p+1}f_{xx}\,dx - \frac{5\gamma}{3(p+1)}\int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1}u_{xx}\,dx$$

$$\leqq c\int_0^t \|u_{xx}\|^2 ds + ct + c$$

ここで

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} u^{p+1}u_{xx}\,dx\right| = \left|(p+1)\int_{-\infty}^{\infty} u^p u_x^2\,dx\right| \leqq (p+1)(\sup|u|)^p\|u_x\|^2 \leqq c$$

を用いた. (2.14) から

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_{xx}\| < C .$$

これと (2.18) から

(2.19) . $$\sup_{0\leq t\leq T} \|u\|_2 < C .$$

さらに

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_{xxx}\|^2 = (u_{xxx},\ u_{xxxt})$$
$$= -\gamma(u_{xxx},\ (u^p u_x)_{xxx})$$
$$\leq C(1+\|u\|_2)^{p-1}\|u_{xxx}\|^2$$
$$\leq C'\|u_{xxx}\|^2 .$$

これより

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|u_{xxx}\| < C .$$

これと (2.19) から (2.17) が従う. (q.e.d.)

以上により主要定理は証明された。

〔注意〕 G.KdV 方程式は, 無限遠で微分までこめて零におちる孤立波とよばれる traveling wave :

$$u(x,t) = S(x-ct), \qquad c>0$$
$$S(x) = A[\operatorname{sech}^{\frac{2}{p}}(Bx)]$$

$$A = c^{\frac{1}{p}}\left\{1+\frac{2}{3}p+\frac{1}{2}p^2\right\}^{\frac{1}{p}},\quad B = 2/p\sqrt{c}$$

を解にもつ．しかし弧立波は安定な集合 W には属していない

[注意]

もっと一般化された方程式

$$u_t + \gamma u^p u_x + \sum_{q=1}^{r} u_{2q+1} = 0\ ,\quad r=1,2,\cdots$$

に対しても．主要定理と同様の定理がなりたつ．

References

1 . N. J. Zabusky, A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, New York, 1967.

2 . A. Sjöberg, On the Korteweg-de Vries equation, Uppsala Univ., Dep. of Computer Sci., Report, 1967.

3 . Y. Kametaka, Korteweg-de Vries equation, I, II, III, IV, Proc. Japan Acad., vol. 45, 552-555, 556-558, 656-660, 661-665, 1969.

4 . R. Teman, Sur un problème non linéaire, J. Math. pures et appl., vol. 48, 159-172, 1969.

5 . T. Mukasa and R. Iino, On the global solution for the simplest generalized Korteweg-de Vries equation, Math. Japonicae, vol. 14, 75-83, 1969.

6 . K. Masuda, On the initial value problem for the generalized Korteweg-de Vries equations, (preprint).

7 . M. Tsutsumi, T. Mukasa and R. Iino, On the generalized Korteweg-de Vries equation, Proc. Japan Acad., vol.46, 921-925, 1970.

8 . J. -L. Lions, Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non lineaires, Dunod, Paris, 1969..