数理解析研究所講究録
第125巻 1971年 68-81

半線型 Schrödinger 方程式について
(定常問題)

大阪市立大 工　　亀高惟倫

半線型 Schrödinger 方程式の定常解に関する簡単な注意を少し述べる事にする。一番簡単な形で方程式を書くと

$$i\frac{\partial u}{\partial t} = -\Delta u + g|u|^2 u \qquad (g = \pm 1)$$

ただし $u = u(x,t)$ は $(x,t) \in R^3 \times [0,\infty)$ に対して定義されている複素数値を取る函数である。$g=-1$ の場合は矢島氏等に扱われている様に非線型光学 $(n=1,2)$ とか分散媒質中の非線型波動伝播における self-trapping $(n=1)$ とか self-focusing $(n=2)$ に関連した現象を記述する簡単なモデルであるとされている。特に $n=1$ の場合には solitary wave の解があって矢島氏のお話しにある通りこれを中心に扱う方がこの「ソリトン研究会」の主旨とそうのであるが、ここではおえて相補的関係にある $g=1$ の場合を扱う事にする。さて $g=1$ に相当する場合の典型は次に述べる様に超流動現象を記

述する一番簡単なモデルとして登場する。すなわち超流動状態を記述する波動関数 $u(x,t)$ の時空変化は次の初期値境界値問題に従う。

$$
(1)\quad
\begin{cases}
i\hbar \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2M}\Delta u + V|u|^2 u & (x,t)\in\Omega\times[0,\infty) \\[2ex]
u\big|_{\partial\Omega} = 0 & \\[2ex]
u(x,0) = u_0(x) & x\in\Omega
\end{cases}
$$

ここで $\hbar$, M, V は正の定数、Ω は n 次元ユークリッド空間 R^n（物理的に意味があるのは $n=1,2,3$ の場合であるが以下は数学的取扱いであるから n は任意の自然数でよい）の中の有界領域であって十分なめらかな境界 $\partial\Omega$ を持つものとする。さて (1) の定常解で $u(x,t) = w(x)\exp\{-i\frac{E}{\hbar}t\}$ $(E>0)$ の形のものを求めて見よう。$w(x)$ に対する非線型楕円型境界値問題（BVP と略記）が導かれる。

$$
(2)\quad
\begin{cases}
D\Delta w + Ew - V|w|^2 w = 0 & \text{in } \Omega \\[1ex]
w\big|_{\partial\Omega} = 0 &
\end{cases}
$$

$D = \dfrac{\hbar^2}{2M}$ とおいた。$w(x)$ が実数値を取る（注.1）ものとすると (2) は次の様になる。

$$(3)\quad \begin{cases} D\Delta w + Ew - Vw^3 = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

$\sqrt{\frac{V}{E}}\,w$ をあらためて w と考える事により

$$(4)\quad \begin{cases} D\Delta w + E(1-w^2)w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

さらに $\varepsilon^2 = \frac{D}{E}$ とおくと (4) は

$$(5)\quad \begin{cases} \varepsilon^2\Delta w + (1-w^2)w = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

の形になる。$f(w) = (1-w^2)w$ は次の性質を持つ。

(6)
- (i) $f(w)$ は区間 $[0,1]$ で定義された十分なめらかな関数。
- (ii) $f(0) = f(1) = 0$
- (iii) $f''(w) < 0 \quad w \in [0,1]$

以下の議論には $f(w)$ に関しては (6) の性質しか使わない。したがって $f(w)$ の具体的な形は忘れて (6) の性質を持つ任意の函数であるとする。結局考察の対象は性質 (6) を持つ $f(w)$ を1つ固定し

$$(7)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 \Delta w + f(w) = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

という事になる。BVP (7) は常に自明な解 $w(x) \equiv 0$ を持つ ($f(0) = 0$ だから) 又 $\Omega = R^n$ であって境界条件なしならばもう1つ非自明解 $w(x) \equiv 1$ を持つ ($f(1) = 0$ だから)。我々は $0 \le w(x) \le 1$ in $\bar{\Omega}$ なる制限の下で BVP (7) の非自明解を求める事にする。この枠が自然である事を説明しよう。$w(x)$ の符号が Ω 内で交代し nodal line を持つ様な非自明解もあり得るのであるが、ここでは エネルギーの一番低いモード ((4) の ground state に相当する) を求める事にして、$w(x) \ge 0$ in $\bar{\Omega}$ とする。$f(w)$ は区間 $[0,1]$ 上でしか定義されていないが $f(w) < 0$ for $w > 1$ なる様になめらかな拡張を考える事が出来る。その様に修正した $f(w)$ を使った BVP (7) の $w(x) \ge 0$ in $\bar{\Omega}$ なるなめらかな非自明解があったとすると $w|_{\partial\Omega} = 0$ だから Ω 内に点 x_0 があって $w(x_0) = \max_{\bar{\Omega}} w(x) > 0$ となるが $\Delta w(x_0) \le 0$ であるから $f(w(x_0)) \ge 0$ となり $0 \le w(x) \le w(x_0) \le 1$ in $\bar{\Omega}$ が従うから $w(x)$ は修正前の $f(w)$ に対する BVP (7) の $0 \le w(x) \le 1$ in $\bar{\Omega}$ をみたす非自明解である事になる。さて ε を固

定された定数と考えると、$\varepsilon = 1$ として一般性を失なわない。したがって BVP (7) を書き直して

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta w + f(w) = 0 & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考える事にする。BVP (8) の非自明解の存在の規準として、その線型化、すなわち固有値問題

$$(9) \quad \begin{cases} \Delta \varphi + \lambda \varphi = 0 & \text{in } \Omega \\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

を考える。最小固有値を $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega)\ (>0)$ 対応する固有関数を $\varphi_0(x) = \varphi_0(x;\Omega)$ ただし $\max_{\bar{\Omega}} \varphi_0(x) = 1$ と規格化する。したがって $\varphi_0(x) > 0$ for $x \in \Omega$ である。

A. Pazy and P. H. Rabinowitz [ ] によると次の事がいえる。

[定理. 1]

(i) $\lambda_0 \geq f'(0)$ (subcritical or critical case) ならば $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ の制限をみたす BVP (8) の解は自明な解 $w(x) \equiv 0$ 以外にない。

(ii) $\lambda_0 < f'(0)$ (supercritical case) ならば $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar{\Omega}$ の制限をみたす BVP (8) の解は自

明な解 $w(x) \equiv 0$ と非自明解 $w(x) = w(x;\Omega)$
$(0 \leq w(x) < 1,\ w(x) \not\equiv 0$ in Ω) の丁度2つである。
(非自明な解は唯1つである。)

くわしい証明は [ ] を参照していただく事としてここでは証明の概略のみ述べる事にする。先ず subcritical or critical case を考えよう。$0 \leq w(x) \leq 1$ in Ω をみたす BVP (8) の任意の解 $w(x)$ は次の等式をみたす。

$$(10) \qquad 0 = (\Delta w + f(w), \varphi_0) = -(\lambda_0 w - f(w), \varphi_0)$$

ここで $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, $(\cdot,\cdot)$ は $L^2(\Omega)$ の通常の内積を表わす。$\varphi_0(x) > 0$ for $x \in \Omega$ であるから, $\lambda_0 \geq f'(0)$, $f''(w) < 0$ for $w \in [0,1]$ に注意すると, $w(x) \not\equiv 0$ in Ω ならば (10) の最後の項は負の数を表わす事になり矛盾が導かれるから BVP (8) の $0 \leq w(x) \leq 1$ in Ω をみたす解は $w(x) \equiv 0$ 以外にない事がわかる。次に supercritical case を考えよう。$f(w)$ は (6) をみたすから適当な正数 c を取って $F(w) = f(w) + cw$ が次の性質を持つ様に出来る。

$$(11) \quad \begin{cases} \text{(i)} & F(w) \text{ は } [0,1] \text{ 上で定義されたなめらかな函数} \\ \text{(ii)} & F(0) = 0,\ F(1) = c,\ F'(w) > 0 \quad \text{for } w \in [0,1] \\ \text{(iii)} & F''(w) < 0 \quad \text{for } w \in [0,1] \end{cases}$$

$F(w)$ を使うと BVP (8) は次の様に書ける。

$$(12)\quad \begin{cases} [-\Delta + c]\, w = F(w) & \text{in } \Omega \\ w|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

楕円型偏微分作用素 $-\Delta + c$ の領域 Ω 内部 Dirichlet 問題に対する Green 函数 $G(x,y) = G(x,y;\Omega)$ で次の性質を持つものが存在する事が知られている。

［補題、1］

(i) $G(x,y)$ は $x \neq y$ なる $\bar\Omega \times \bar\Omega$ の点 (x,y) に対し定義されたなめらかな函数.

(ii) $G(x,y) = G(y,x) \geq 0$ for $(x,y) \in \bar\Omega \times \bar\Omega$

(iii) $\sup_{\bar\Omega} \int_\Omega G(x,y)\,dy < \infty$.

(iv) 任意の $y \in \bar\Omega$ に対して $[-\Delta_x + c]\, G(x,y) = 0$ for $x \in \bar\Omega - \{y\}$, $G(x,y) = 0$ for $x \in \partial\Omega - \{y\}$.

上の Green 函数 $G(x,y)$ を使うと BVP (8) はさらに同値な問題に置き代える事が出来る。

$$(13)\quad w(x) = \mathcal{F}[w](x)$$

$$\mathcal{F}[w](x) = \mathcal{F}[w;\Omega](x) = \int_\Omega G(x,y;\Omega)\, F(w(y))\, dy$$

$F'(0) > \lambda_0 + c$ の時積分方程式 (I E) (13) が $0 \leq w(x) \leq 1$ in $\bar\Omega$ なる非自明解 $w(x;\Omega)$ を持つ事を示そう。Green 函数の性質より次の事が容易にわかる。

[命題. 1]

(i) $w(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \le w(x) \le 1$ in $\bar{\Omega}$ ならば $F[w](x) \in C^0(\bar{\Omega})$

$0 \le F[w](x) \le 1$ in $\bar{\Omega}$ さらに $F[w]\big|_{\partial\Omega} = 0$.

(ii) $w(x), w'(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \le w(x) \le w'(x) \le 1$ in $\bar{\Omega}$

ならば $0 \le F[w](x) \le F[w'](x) \le 1$ in $\bar{\Omega}$.

(iii) $0 \le F[1](x) < 1$ in $\bar{\Omega}$.

(iv) $w(x) \in C^0(\bar{\Omega})$, $0 \le w(x) \le 1$, $w(x) \not\equiv 0$ in $\bar{\Omega}$

ならば $0 < \delta \le 1$ なる δ を適当にえらんで

$F[w](x) \ge \delta \varphi_0(x)$ in $\bar{\Omega}$ とできる。

(v) $0 < \delta_0 < 1$, $F(\delta_0) = (\lambda_0 + c)\delta_0$ なる δ_0 が唯1つ

定まるが $0 < \delta \le \delta_0$ なる任意の δ に対し

$F[\delta\varphi_0](x) \ge \delta\varphi_0(x)$ in $\bar{\Omega}$.

二つの函数列 $\{\bar{w}_j(x) = \bar{w}_j(x;\Omega)\}_{j=0,1,2,\cdots}$ 及び

$\{\underline{w}_j(x) = \underline{w}_j(x;\Omega)\}_{j=0,1,2,\cdots}$ を次の様に定める。

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{w}_j(x) = F[\bar{w}_{j-1}](x) & \text{in } \Omega, \ j = 1,2,3,\cdots \\ \bar{w}_0(x) \equiv 1 & \text{in } \Omega. \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \underline{w}_j(x) = F[\underline{w}_{j-1}](x) & \text{in } \Omega, \quad j = 1,2,3,\cdots \\ \underline{w}_0(x) = \delta\varphi_0(x) & \text{in } \Omega \quad 0 < \delta = \delta(\Omega) \le \delta_0 = \delta_0(\Omega) \end{cases}$$

命題. 1 より次の事がわかる。

[命題．2]

(i) $\{\overline{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\cdots}$ は連続函数の単調減少列で下に有界．

(ii) $\{\overline{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\cdots}$ は Ω で一様にある連続函数 $\overline{w}(x)$ に収束する。

(iii) $\overline{w}(x)$ は BVP (8) の解である。

[命題．3]

(i) $\{\underline{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\cdots}$ は連続函数の単調増大列で上に有界．

(ii) $\{\underline{w}_j(x)\}_{j=0,1,2,\cdots}$ は Ω で一様にある連続函数 $\underline{w}(x)$ に収束する。

(iii) $\underline{w}(x)$ は BVP (8) の解である。

[命題．4]

(i) $\overline{w}(x) \geq \underline{w}(x)$ in Ω

(ii) BVP (8) の任意の非自明解 $w(x)$ $(0 \leq w(x) \leq 1$, $w(x) \not\equiv 0$ in Ω) に対し $\overline{w}(x) \geq w(x) \geq \underline{w}(x)$ in Ω.

(iii) $\overline{w}(x) \equiv \underline{w}(x)$ in Ω すなわち BVP (8) の非自明解は唯1つである。

命題．4 (iii) のみ証明しておこう。$\overline{w}(x)$, $\underline{w}(x)$ 共に BVP (8) の解であるから次の等式が成り立つ。

$$0 = (\Delta \overline{w} + f(\overline{w}), \underline{w}) - (\Delta \underline{w} + f(\underline{w}), \overline{w})$$
$$= \left(\frac{f(\overline{w})}{\overline{w}} - \frac{f(\underline{w})}{\underline{w}}, \overline{w}\,\underline{w} \right)$$

$\bar{w}(x)\underline{w}(x)>0$ in Ω 又命題.4 (i) より $f''(w)<0$ for $w\in[0,1]$ だから $\dfrac{f(\bar{w})}{\bar{w}}-\dfrac{f(\underline{w})}{\underline{w}}\le 0$ in $\bar{\Omega}$ であるが上の等式より $\dfrac{f(\bar{w})}{\bar{w}}-\dfrac{f(\underline{w})}{\underline{w}}\equiv 0$ in $\bar{\Omega}$ したがって $\bar{w}(x)\equiv\underline{w}(x)$ in $\bar{\Omega}$ が従って命題.4 (iii) が証明された事となる。以上で定理.1 の証明を終る。

さて次に BVP (8) において Ω を大きくして行くとどうなるかという事と BVP (7) において $\varepsilon\to 0$ とするとどうなるかという事を考えてみよう。先ず BVP (8) において $\Omega\to R^n$ としてみよう。この事は $\Omega\supset V_R=\{x\in R^n;\ |x|<R\}$ $R\to\infty$ を意味するものとする。$\Omega\supset\Omega'$ $\lambda_0(\Omega')<f'(0)$ とすると $\lambda_0(\Omega)\le\lambda_0(\Omega')<f'(0)$ だから Ω,Ω' 共に supercritical であって BVP (8) の非自明解 $w(x;\Omega)$ 及び $w(x;\Omega')$ がそれぞれ唯1つあるが $G(x,y;\Omega)\ge G(x,y;\Omega')$ for $(x,y)\in\bar{\Omega}'\times\bar{\Omega}'$ に注意すれば $w(x;\Omega)\ge w(x;\Omega')$ for $x\in\bar{\Omega}'$ がすぐわかる。したがって特に $w(x;\Omega)\ge\delta_0(\Omega')\varphi_0(x;\Omega')$ for $x\in\bar{\Omega}'$ である。$\Omega'=V_r(y)=\{x\in R^n;\ |x-y|<r\}$ とすれば $\delta_0(V_r(y))$ は y に無関係であるから $\delta_0(V_r(y))=\delta_0(r)$ と書く事として $w(x;\Omega)\ge\delta_0(r)\varphi_0(x;V_r(y))$ for $x\in\overline{V_r(y)}$. $\mathrm{dis}(x,\partial\Omega)$ は x から $\partial\Omega$ に至る距離を表わすものとして $\varphi_0(x;V_r(x))=1$ に注意すれば

$dis(x,\partial\Omega) \geq r$ なる任意の $x \in \Omega$ に対して

$w(x;\Omega) \geq \delta_0(r)$ なる評価を得る。話をはっきりさせるために $\delta_0(r)$ を下からさらにわかりやすい量で評価しよう。$0 < \delta < 1$ なる δ を任意に固定しよう。

$\lambda_0(r) = \lambda_0(V_r(y)) = \left(\frac{z_0}{r}\right)^2$ （ただし z_0 は Bessel 函数 $J_{\frac{n-2}{2}}(z) = 0$ の正の最小根）であるから r を十分大きく取ると $\lambda_0(r) < \frac{f(\delta)}{\delta} < f'(0)$ となり $V_r(y)$ は supercritical となる。(ξ,η) 平面上で直線 $\eta = \lambda_0(r)$ と直線 $\eta = -\frac{f(\delta)}{1-\delta}(\xi - 1)$ の交点の ξ-座標を $\underline{\delta}_0(r)$ とすると $\delta_0(r) \geq \underline{\delta}_0(r)$ である。結局次の評価を得る。

$$dis(x,\partial\Omega) \geq r \text{ ならば } w(x;\Omega) \geq \underline{\delta}_0(r) = \frac{\frac{f(\delta)}{1-\delta}}{\frac{f(\delta)}{1-\delta} + \lambda_0(r)}$$

さて $\Omega \supset V_R$ として $0 < \alpha \leq 1$ なる任意の α、および $R_0 \geq 1$ なる任意の R_0 を固定しよう。$r = r(R) = R^\alpha - R_0$ とおくと $r(R) \to \infty$ as $R \to \infty$ したがって $\underline{\delta}_0(r(R)) \to 1$ as $R \to \infty$ いいかえると $1 - \underline{\delta}_0(r(R)) \to 0$ as $R \to \infty$.

$$R - r(R) = R - R^\alpha + R_0 \geq R_0 \quad \text{for } R \geq 1$$

（$0 < \alpha < 1$ の場合には $R - r(R) \to \infty$ as $R \to \infty$）

$x \in V_{R-r(R)}$ ならば $dis(x,\partial V_R) \geq r(R)$ したがって $dis(x,\partial\Omega) \geq r(R)$ だから $w(x;\Omega) \geq \underline{\delta}_0(r(R))$

結局次の評価を得る。

[定理、2]

(i) $x \in V_{R-r(R)}$ ならば ($\Omega \supset V_R$, $r(R) = R^{\alpha} - R_0$)

$$0 < 1 - w(x;\Omega) < 1 - \delta_0(r(R)) = \frac{\lambda_0(r(R))}{\frac{f(\delta)}{1-\delta} + \lambda_0(r(R))}$$

(ii) $\Omega \to R^n$ の時 R^n でコンパクト一様に $w(x;\Omega) \to 1$.

さて次に BVP (7) において $\varepsilon \to 0$ とした場合であるが $f(w)$ を $\frac{1}{\varepsilon^2} f(w)$ で置き代えて同様の議論をくり返せばよい。$\lambda_0(r) < \frac{f(\delta)}{\varepsilon^2 \delta} < \frac{1}{\varepsilon^2} f'(0)$ とすると $V_r(y)$ は super-critical となり $dis(x, \partial\Omega) \geq r$ なる $x \in \Omega$ に対し

$$0 < 1 - w(x;\Omega) < 1 - \delta_0(r) = \frac{\lambda_0(r)\varepsilon^2}{\frac{f(\delta)}{1-\delta} + \lambda_0(r)\varepsilon^2}$$

$r = r(\varepsilon)$ を $r(\varepsilon) \to 0$ as $\varepsilon \to 0$ $\lambda_0(r)\varepsilon^2 \to 0$ as $\varepsilon \to 0$ なる様に取れる。たとえば $r(\varepsilon) = r_0 \varepsilon^{\alpha}$ $0 < \alpha < 1$ とすればよい。結局次の結論を得る。

[定理、3]

(i) 上の様な $r(\varepsilon)$ に対し $dis(x, \partial\Omega) \geq r(\varepsilon)$ ならば

$$0 < 1 - w(x;\Omega) < 1 - \delta_0(r(\varepsilon)) = \frac{\lambda_0(r(\varepsilon))\varepsilon^2}{\frac{f(\delta)}{1-\delta} + \lambda_0(r(\varepsilon))\varepsilon^2}$$

(ii) $\varepsilon \to 0$ とすると、BVP (7) の非自明解 $w(x;\Omega)$ は $O(\varepsilon)$ の境界層をのぞいて Ω 内部で一様に 1 に収束する。

この結果は次の意味で最良である。すなわち $n=1$ で $\Omega=(0,1)$ の場合 BVP (5) は

$$
(16)\quad \begin{cases} \varepsilon^2 w'' + w - w^3 = 0 & \text{in } (0,1) \\ w(0) = w(1) = 0 \end{cases}
$$

となるが非自明解は Jacobi の楕円函数 $sn(z;k)$ を使って

$$
w(x;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2k(\varepsilon)^2}{1+k(\varepsilon)^2}}\; sn\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+k(\varepsilon)^2}}\, x \,;\, k(\varepsilon)\right)
$$

ただし $\dfrac{1}{\varepsilon\sqrt{1+k(\varepsilon)^2}} = 2K(k(\varepsilon))$　$K(k)$ は第1種完全楕円積分 $K(k) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}\,d\theta$ を表わす。ここで $\varepsilon \to 0$ とすると上の関係より $k(\varepsilon) \to 1$ $(K(k(\varepsilon)) \to \infty)$ である。$sn(z;k) \to \tanh z$ as $k \to 1$ だから、

$$
w(x_0\varepsilon;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2k(\varepsilon)^2}{1+k(\varepsilon)^2}}\; sn\left(\frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+k(\varepsilon)^2}}\, x_0\varepsilon \,;\, k(\varepsilon)\right)
$$

$$
\longrightarrow \tanh\frac{x_0}{\sqrt{2}} < 1
$$

これは境界よりの距離が丁度 $O(\varepsilon)$ の点における $w(x;\varepsilon)$ の値は $\varepsilon \to 0$ としても 1 に近づかない事を示している

(注、1)　$f(\xi)$ がなめらかな実数値函数とするとき

$$
(17)\quad \begin{cases} \Delta w + f(|w|^2)\, w = 0 & \text{in } V_R \\ w\big|_{\partial V_R} = 0 \end{cases}
$$

の解で $r=|x|$ のみの函数となるものは本質的には実数値函数と思ってよい。実際 $w'(r) = \frac{d}{dr} w(r)$ として (17) は

$$
(18) \quad \begin{cases} w'' + \dfrac{n-1}{r} w' + f(|w|^2) w = 0 & \text{in } (0, R) \\ w(R) = 0 \end{cases}
$$

となるが $v(r) = \mathrm{Im} \left[e^{-i \arg w'(R)} w(r) \right]$ とおくと

$$
(19) \quad \begin{cases} v'' + \dfrac{n-1}{r} v' + f(|w|^2) v = 0 & \text{in } (0, R) \\ v(R) = v'(R) = 0 \end{cases}
$$

が得られ常微分方程式の初期値問題に対する解の一意性定理より $v(r) \equiv 0$ in $(0, R)$ すなわち $e^{-i \arg w'(R)} w(r)$ は実数値函数である。

References

[1] Pazy, A. and Rabinowitz, P. H., A nonlinear integral equation with applications to neutron transport theory, Arch. Rational Mech. Anal., Vol. 32 (1968) 226-246.

[2] Pitaevskii, L. P., Vortex lines in an imperfect Bose gas, Soviet Physics JETP, Vol.13(1961) 451-454.

[3] Gross, E. P., Hydrodynamics of a superfluid condensate, J. Math. Phys., Vol.4 (1963) 195-207.