数理解析研究所講究録
第127巻 1971年 23-34

Semi-free circle action の 指数について

阪大 理　内田伏一

§1. 序

この報告において，semi-free circle action について考察し、次の結果を得る。

定理1.　向きづけられたn次元可微分閉多様体M上の semi-free circle action について，各k次元 stationary point set F^k は標準的な方法で向きづけられ，Mの指数は各F^kの指数の和に等しい。

定理2.　指数零でない向きづけられた4k次元可微分閉多様体上の semi-free circle action の stationary point set は2k次元以上の連結成分をもつ。

§2. 可微分作用

n 次元可微分閉多様体 M 上のコンパクトトリー群 G の可微分作用 $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ について考える。各点 $x \in M$ に対し

$$G_x = \{ g \in G : \varphi(g, x) = x \}$$

は G の閉部分群になるが，これを $x \in M$ の isotropy 部分群という。 $G_x = G$ なるとき $x \in M$ を stationary point という。

$$F = \{ x \in M : G_x = G \}.$$

各点 $x \in M - F$ の isotropy 部分群が単位群なるとき G-action φ は semi-free であるという。

今，M 上に G-不変な Riemannian metric (常に存在する) を一つ固定する。このとき，stationary point $x \in M$ において接空間 M_x を表現空間とする G の直交表現

$$\rho_x : G \longrightarrow \dot{A}ut(M_x)$$

が誘導される。ここで次の可換な図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} M_x & \xrightarrow{\rho_x(g)} & M_x \\ \downarrow{\scriptstyle \exp} & \circlearrowright & \downarrow{\scriptstyle \exp} \\ M & \xrightarrow{\varphi_g} & M \end{array}$$

但し，$g \in G$，$\varphi_g(y) = \varphi(g, y)$.

$$V_x = \{v \in M_x : \rho_x(g)v = v \quad \forall g \in G\}$$

と置けば、exponential 写像 $\exp : M_x \longrightarrow M$ によって V_x から F への local diffeomorphism が与えられる。

従って stationary point set F の各連結成分は M の閉部分多様体になる。また M_x における V_x の直交補空間 N_x は G-不変であり、特に $\varphi : G \times M \longrightarrow M$ が semi-free であれば、$N_x - \{0\}$ 上に G が表現 ρ_x によって fixed point free に作用する。

§3. semi-free circle action

以後コンパクトリー群 $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ の semi-free な可微分作用 $\varphi : S^1 \times M \longrightarrow M$ について考える。

stationary point $x \in M$ の接空間 M_x を表現空間とする誘導表現

$$\rho_x : S^1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(M_x)$$

及び M_x の不変部分空間 V_x, N_x $(M_x = V_x \oplus N_x)$ について前節で考察したが、ここでは線型写像

$$J = \rho_x(\sqrt{-1}) : N_x \longrightarrow N_x$$

について考えてみよう。$J^4 = \text{identity}$ だから、一般に

$$N_x = N_x^+ \oplus N_x^- \quad (\text{直和})$$

但し、$N_x^+ = \{v \in N_x : J^2(v) = v\}$, $N_x^- = \{v \in N_x : J^2(v) = -v\}$

と分解されるが，$N_x-\{0\}$ 上に S^1 が表現 ρ_x によって fixed point free に作用するので $N_x^+=\{0\}$，即ち

$$\forall v\in N_x : J^2(v)=-v.$$

これは線型写像 $J: N_x\longrightarrow N_x$ が N_x に複素構造を与えることを示している。即ち

$$(a+\sqrt{-1}b)\cdot v = av+bJv,\quad v\in N_x,\ a,b\in\mathbb{R}.$$

さて，S^1 は可換群だから

$$\forall z\in S^1 : J\circ\rho_x(z)=\rho_x(z)\circ J \quad \text{on } N_x.$$

即ち

$$\rho_x : S^1\longrightarrow \mathrm{Aut}(N_x)$$

は複素表現である。

S^1 の複素既約表現は表現空間 $\mathbb{C}$ 上の ρ^k ($k=0,\pm1,\pm2,\cdots$)

$$\rho^k(z)\cdot v = z^k\cdot v,\quad z\in S^1,\ v\in\mathbb{C}$$

のいずれかと同型であり，この中で原点以外で fixed point free になるのは $k=\pm1$ の場合だけである。この事実と $J=\rho_x(\sqrt{-1})$ によって N_x の複素構造が定義されていることによって

$$\rho_x(a+\sqrt{-1}b)\cdot v = av+bJv,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a^2+b^2=1,\ v\in N_x$$

が示される。以上をまとめて，

補題．semi-free circle action $\varphi : S^1\times M\longrightarrow M$ の

stationary point set の各連結成分は M の閉部分多様体であり，M における normal bundle は，induced circle action がスカラー積になるような複素構造をもつ。

系．semi-free circle action の stationary point set の空でない連結成分の余次元は偶数である。

§4．有向多様体上の semi-free circle action

向きづけられた n 次元可微分閉多様体 M 上の semi-free circle action $\varphi: S^1 \times M \longrightarrow M$ について考える。前節より，stationary point set は

$$F = \bigcup_k F^{n-2k} \quad (\text{disjoint union})$$

と表わせる，ここに F^{n-2k} は M の $n-2k$ 次元閉部分多様体である。更に embedding $F^{n-2k} \subset M$ の normal bundle には複素構造を定義出来たが，この complex normal bundle を ν^k と書こう。このとき ν^k には自然に bundle としての向きが定まり，bundle isomorphism

$$\tau(F^{n-2k}) \oplus \nu^k \longrightarrow \tau(M^n) \,|\, F^{n-2k}$$

が向きを保つように F^{n-2k} の向きを定め得る。

ところで，有向閉多様体 X 上の complex vector bundle ξ に associate した sphere bundle 及び complex projective space bundle の total spaces を夫々 $S(\xi)$, $CP(\xi)$ で表わすとき, $S(\xi)$, $CP(\xi)$ は X 及び ξ の向きによって自然に向きづけられた多様体となる。 上述の記号の下で,

補題 oriented cobordism ring Ω_* において,

(a) $$\sum_{k\geq 1} [CP(\nu^k)] = 0$$

(b) $$[M] = \sum_{k\geq 0} [CP(\nu^k \oplus \theta)]$$

ここに θ は trivial complex line bundle を表わす。

証明. (a) を示すには $F^n = \emptyset$ と仮定して良い。 今 N_k を S^1-不変な F^{n-2k} の tubular neighborhood とし, $k\geq 1$ に対し互いに交わらないものとする。 このとき

$$B^n = M - \bigcup_k \mathrm{Int}\, N_k$$

は M の S^1-不変なコンパクト部分多様体であり, B^n 上の circle action は fixed point free であり, その orbit 多様体 B^n/S^1 は有向多様体であり; 境界は $CP(\nu^k)$, $k\geq 1$ の disjoint union である。 即ち等式 (a) が成り立つ。

次に (b) を示すため, $D^2 \times M$ 上の circle action を2つ定義する。

$$\tau_1(\lambda, (z, x)) = (\lambda z, x), \quad \tau_2(\lambda, (z, x)) = (\lambda z, \varphi(\lambda, x))$$

ここに $\lambda\in S^1$, $z\in D^2$ は複素数であり, $x\in M$。

$$f: S^1\times M \longrightarrow S^1\times M$$

を $f(\lambda,x)=(\lambda,\varphi(\lambda,x))$ によって定義すれば f は $(\tau_1, S^1\times M)$ から $(\tau_2, S^1\times M)$ への equivariant diffeomorphism を与える。従って $(\tau_1, D^2\times M)$ と $(\tau_2, -D^2\times M)$ の境界を f によって張り合せることによって, 向きづけられた $n+2$ 次元可微分閉多様体 M^{n+2} と, その上の circle action を得る。$(\tau_1, D^2\times M)$ において, $0\times M$ 以外では fixed point free であり $0\times M$ の各点は stationary point であり, $(\tau_2, D^2\times M)$ において, やはり $0\times M$ 以外では fixed point free であり $(0,x)$ における isotropy 部分群は $x\in M$ における φ の isotropy 部分群に等しい。従って, M^{n+2} 上に τ_1 と τ_2 によって定義された circle action は semi-free で であり, この semi-free circle action について等式 (a) は等式 (b) を導びく。

有向閉多様体 X 上の complex k-plane bundle ξ^k について, $CP(\xi^k)$ の実係数コホモロジー環に Leray-Hirsch の定理を適用し, 多様体の指数の定義にあてはめると, 等式

$$I(CP(\xi^k)) = \frac{1+(-1)^{k+1}}{2}\cdot I(X)$$

を得る。 これを補題の等式 (a), (b) にあてはめることによって，定理 1 が証明出来る。

§5. *stationary point set* の次元について

向きづけられた n 次元可微閉多様体上の *fixed point free circle actions* のコボルディズム群を $F_n(S^1)$ で，同じく *semi-free circle actions* のコボルディズム群を $SF_n(S^1)$ で表わそう．

$\varphi : S^1 \times M \longrightarrow M$ を *fixed point free circle action*，
$\tau : S^1 \times S^{2N+1} \longrightarrow S^{2N+1}$ を $\tau(\lambda,(z_0,\cdots,z_N))=(\lambda z_0,\cdots,\lambda z_N)$ で与えられる標準的な *circle action* とする。 *equivariant* な可微分写像

$$f : M \longrightarrow S^{2N+1}$$

が S^{2N-1} 上で *transversal regular* なるとき $(\varphi|V, V)$，但し $V=f^{-1}(S^{2N-1})$，は $F_{n-2}(S^1)$ の元を表わす。 この対応によって，*Smith* 準同型写像

$$\Delta : F_n(S^1) \longrightarrow F_{n-2}(S^1)$$

を得る。 (*well-defined* な準同型写像になる)

また，n 次元有向閉多様体上の *complex k-plane bundle* ξ^k に対して，$S(\xi^k)$ 上のスカラー積による *circle action* を考えることによって，準同型写像 (*well-defined*)

$$\partial : \Omega_n(BU(k)) \longrightarrow F_{n+2k-1}(S^1)$$

を得る。

今，$f : S(\xi^k) \longrightarrow S^{2N-1}$ を circle actions に関して equivariant な可微分写像とすれば

$$S(\xi^k \oplus \theta) = S(\xi^k) * S^1 \xrightarrow{f*1} S^{2N-1} * S^1 = S^{2N+1}$$

は equivariant な可微分写像であり，S^{2N-1} 上 transverse regular 且つ $(f*1)^{-1}(S^{2N-1}) = S(\xi^k)$ である。従って，次の可換な図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
\Omega_n(BU(k)) & \xrightarrow{\ \partial\ } & F_{n+2k-1}(S^1) \\
\Big\downarrow i_* & \circlearrowright & \Big\uparrow \Delta \\
\Omega_n(BU(k+1)) & \xrightarrow{\ \partial\ } & F_{n+2k+1}(S^1)
\end{array}$$

更に，$i_* : \Omega_n(BU(k)) \cong \Omega_n(BU(k+1))$ for $n \leqq 2k$ である。

他方，semi-free circle action に対して，stationary point set と complex normal bundle とを考えることによって，次の exact sequence を得る。

$$0 \longrightarrow SF_n(S^1) \xrightarrow{k} \sum_{k \geqq 0} \Omega_{n-2k}(BU(k)) \xrightarrow{\partial} F_{n-1}(S^1) \longrightarrow 0$$

これだけの準備の下に定理2を証明しよう。

今，$I(M^{4n}) \neq 0$ なる有向閉多様体 M^{4n} 上の或る semi-free circle action について，stationary point set が

$$F = \bigcup F^{4n-2k} \quad (k > n)$$

と表わせたとする。このとき F^{4n-2k} の complex normal bundle ν^k は $\nu^k \cong \xi^{k-1} \oplus \theta$ と表わせる。ここに ξ^{k-1} は F^{4n-2k} 上の或る complex $(k-1)$-plane bundle である。

前頁の可換図式より

$$\partial\Big(\sum_{k>n} [\xi^{k-1}]\Big) = 0$$

であるから，exact sequence によって，或る $4n-2$ 次元閉多様体上の semi-free circle action $\varphi : S^1 \times V \longrightarrow V$ が存在し，

$$\beta([\varphi, V]) = \sum_{k>n} [\xi^{k-1}].$$

即ち，この semi-free circle action の stationary point set は $F = \bigcup F^{4n-2k}$ に一致する。従って，定理1によると，

$$I(M^{4n}) = \sum I(F^{4n-2k}) = I(V^{4n-2}) = 0$$

これは仮定 $I(M^{4n}) \neq 0$ に矛盾する。従って，$I(M^{4n}) \neq 0$ なる有向閉多様体 M^{4n} 上の任意の semi-free circle action の stationary point set は必ず $2n$ 次元以上の連結成分をもつ。

付記．　本稿は[6]の解説であり，§4の末尾の$I(CP(3k))$の等式の証明を省略した以外は[6]より詳しい。　§4の補題(b)については[8] Th. 4.2において，これより精密な結果が得られている。

Atiyah-Singer の指数定理によって，任意の circle action について，定理1が成り立つことが，Atiyah-Hirzebruch [1]によって注意されている。　また，コボルディズム論の立場から，この結果を導びくことが，服部-谷口[4]によって為されている。　更に，rational cohomology manifolds のコボルディズムを考えることによっても同様の結果を導びき得ることが，川久保-Raymond [5]によって示された。

参考文献

[1] Atiyah-Hirzebruch : Spin-manifold and group actions, (de Rham 記念)

[2] Chern-Hirzebruch-Serre : On the index of a fibered manifold, Proc. AMS, 8 (1957), 587-596.

[3] Conner-Floyd : Differentiable Periodic Maps.

[4] 服部-谷口 : S^1-action and bordism, コボルディズム理論研究集会報告集

[5] 川久保 - Raymond : The index of manifolds with toral actions and geometric interpretations of the $\sigma(\infty,(S^1,M^4))$ invariant of Atiyah and Singer (pre-print).

[6] Kawakubo - Uchida : On the index of a semi-free S^1-action, J. Math. Soc. Japan 23 (1971), to appear.

[7] Spanier : Algebraic Topology

[8] Uchida : Cobordism groups of semi-free S^1- and S^3-actions, Osaka J. Math. 7 (1970), 345-351.