数理解析研究所講究録
第127巻 1971年 67-95

4次元多様体の exotic PL automorphism とその応用

東大　福原真二

§1. Introduction

$S^3\times T^2$ 上には、互に相異なる PL structure が、丁度二つ入る。そのうち exotic な structure をもつものを、考察することにより、われわれは、次の結果をえる。

Theorem 1.

(S_1) 及び (S_2) をそれぞれ次の命題とする。

(S_1): $S^2\times T^2$ の self PL s-cobordism は product である。

(S_2): $S^1\times S^3$ と同じ homotopy type をもつ closed PL manifold は $S^1\times S^3$ に PL homeomorphic である。

このとき、(S_1) 及び (S_2) のうち、少くとも一方は誤りである。

この Theorem の証明は、Fukuhara [4] の Theorem 5 の (H_2) と上の Theorem 1 の (S_2) とが同値な命

題であることにより明らかである。ところで. Wall [8] の simply connected 5-dimensional s-cobordism に関する結果は. non-simply connected の場合にも拡張できて. 次のことがわかる。

Theorem 2

M. N を互に h-cobordant な closed PL 4-manifold とする。このとき. 適当な $k \geqq 0$ に対して. $M \# k(S^2 \times S^2)$ は $N \# k(S^2 \times S^2)$ に PL homeomorphic である。

Theorem 1 と 2 を合せ考えることにより. われわれは. 次予想をたてることが. 可能となろう。

Conjecture

適当な k に対して. $S^1 \times S^3 \# k(S^2 \times S^2)$ と同じ. homotopy type をもつ. closed PL manifold で. $S^1 \times S^3 \# k(S^2 \times S^2)$ と PL homeomorphic でないものが存在する。

この論文で. われわれは. $S^3 \times T^2$ 上の exotic structure

を考えることにより．上の予想に関連したある結果をみちびく。

§2. Exotic PL automorphism of 4-manifold

Definition

M を PL manifold, f を M の PL automorphism すなわち M から M 自身への PL homeomorphism とする。

このとき．f が exotic であるとは．

① f は topologically pseudo-isotopic to the identity

② f は PL pseudo-isotopic to the identity でない。

場合をいう。

Example 1

T^n ($n \geqq 6$) 上には．exotic PL structure が入るが．それらに対応して．T^n ($n \geqq 5$) には．exotic PL automorphism が存在する。

(Wall - Hsiang - Shaneson - Cernavski)

Example 2
$S^2 \times T^{n-2}$ $(n \geqq 5)$ にも、exotic PL automorphism が存在することが、Fukuhara [4] と n-dimensional s-cobordism theorem より容易にわかる。

$S^2 \times T^2$ 上に exotic PL automorphism が存在するかどうかは、非常に興味のある問題で、これには、4次元 Poincaré 予想や、4-2 unknotting problem が深くかかわっている。われわれの結果は、次の通りである。

Theorem 3
① 適当な $k \geqq 0$ に対して、$S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)$ の PL automorphism f で、exotic なものが存在する。

② f の任意の covering は、$D^3 \times T^2 \natural k(D^3 \times S^2)$ の対応する covering manifold の PL automorphism に extend することができない。

Theorem 3の証明に．われわれは次の Hudson [3] の unknotting theorem moving the boundary を使う。

Theorem 4 (Hudson)

M^m, Q^q をそれぞれ．m, q 次元 PL manifold とする。ただし M は compact。M, ∂M は connected。

$f, g : (M, \partial M) \longrightarrow (Q, \partial Q)$ を．

$(M, \partial M) \longrightarrow (Q, \partial Q)$ の pair map として．

homotopic な proper PL embedding とする。さらに．

① $q - m \geqq 3$ ② $(M, \partial M)$ は $2m-q+1$-connected

③ $(Q, \partial Q)$ は $2m-q+2$ - connected

とする。

以上の仮定のもとに．f と g は．ambient isotopic である。

proof of Theorem 3.

$(S^3\times T^2)_\beta$ を $S^3\times T^2$ に exotic PL structure を与えたものとする。$S^3\times T^2$ を分解して、
$D_1^3\times T^2\cup S^2\times T^2\times I\cup D_2^3\times T^2$ と考える。このとき、
"id" : $S^3\times T^2\longrightarrow(S^3\times T^2)_\beta$ と isotopic な homeomorphism h で、$h|D_1^3\times T^2\cup D_2^3\times T^2=PL$ なるものが、0.1.2-handle の straightening により存在する。$H=h(S^2\times T^2\times I)$ とおく。
H は、$S^2\times T^2$ の self PL h-cobordism である。
handle-body の議論により、

$$H=(\partial_-H\cup h_1^2\cup\cdots\cup h_n^2)\cup\{S^2\times T^2\# n(S^2\times S^2)\}\times I$$
$$\cup(\partial_+H\cup k_1^2\cup\cdots\cup k_n^2)$$

なる分解が存在する。ただし、$\partial_-H=h(\partial D_1^3\times T^2)$
$\partial_+H=h(\partial D_2^3\times T^2)$。$h_i^2$, k_i^2 はそれぞれ、
∂_-H, ∂_+H に trivial かつ、互に disjoint に attach された 2-handle である。また、

$h_i : (D^2\times D^3,\ S^1\times D^3)\longrightarrow(h_i^2,\ h_i^2\cap\partial_-H)$

$k_i : (D^2\times D^3,\ S^1\times D^3)\longrightarrow(k_i^2,\ k_i^2\cap\partial_+H)$

を PL homeomorphism とする。

$W_i = \partial_- H \cup h_1^2 \cup \cdots \cup h_i^2 \qquad 1 \leqq i \leqq n$

$W = W_n \cup \{S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2)\} \times I$

$V_i = \partial_+ H \cup k_1^2 \cup \cdots \cup k_i^2 \qquad 1 \leqq i \leqq n$

$V = V_n \cup \{S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2)\} \times I$

$\partial_+ V = \partial_+ H \qquad \partial_- V = \partial V - \partial_+ V$

とする。

2-handle の straightening により、

$h^{-1} : H \longrightarrow S^2 \times T^2 \times I$ と ∂H を fix

した isotopy で isotopic な homeomorphism

$h' : H \longrightarrow S^2 \times T^2 \times I$ で、

$h' | W_n \cup V^n = PL$ なるものが存在する。

一方、$S^2 \times T^2 \times I$ の handle-body 分解として、

$(S^2 \times T^2 \times 0 \cup \overline{h_1^2} \cup \cdots \cup \overline{h_n^2}) \cup \{S^2 \times T^2 \# n(S^2 \times S^2)\} \times I$

$\cup (S^2 \times T^2 \times 1 \cup \overline{k_1^2} \cup \cdots \cup \overline{k_n^2})$

を考える。ただし、$\overline{h_i^2}$, $\overline{k_i^2}$ は、それぞれ、

$S^2 \times T^2 \times 0$, $S^2 \times T^2 \times 1$ に trivial かつ disjoint に

attach された 2-handles で、$\overline{h_i^2}$ と $\overline{k_i^2}$ とが

cancell するような complementary pair となって

いるとする。$\overline{h_i}$, $\overline{k_i}$ は h_i, k_i と同様に定める。

$\overline{W_i} = S^2\times T^2\times 0 \cup \overline{h_1^2} \cup \cdots \cup \overline{h_i^2}$

$\overline{W} = \overline{W_n} \cup \{S^2\times T^2 \# n(S^2\times S^2)\}\times I.$

$\overline{V_i} = S^2\times T^2\times 1 \cup \overline{k_1^2} \cup \cdots \cup \overline{k_i^2}$

$V = V_n \cup \{S^2\times T^2 \# n(S^2\times S^2)\}\times I$

$\partial_+\overline{V} = S^2\times T^2\times 1$, $\partial_-\overline{V} = \partial\overline{V} - \partial_+\overline{V}$

とする。

$h'\circ h_1|D^2\times 0$, $\overline{h_1}|D^2\times 0$ は.

$(D^2, S^1) \longrightarrow (S^2\times T^2\times I, S^2\times T^2\times 0)$ なる

proper PL embedding で. pair の map として

て考えるとき. 明らかに homotopic である。

よって. Theorem 4 と regular neighbourhood

の uniqueness により. h' と isotopic な

homeomorphism $h'': H \longrightarrow S^2\times T^2\times I$ で

次の条件を満たすものが存在する。

① $h''(W_1) = \overline{W_1}$

② $h''|W_n\cup V_n = PL$

③ $h''|\partial_-H$ と $h'|\partial_-H$ は PL isotopic

④ $h''|\partial_+H = h'|\partial_+H$

ここで、

$$H_i = H - \bigcup_{j=1}^{i} h_j(D^2 \times \mathrm{int}\, D^3)$$

$$\partial_- H_i = \partial H_i - \partial_+ H$$

$$\overline{H}_i = S^2 \times T^2 \times I - \bigcup_{j=1}^{i} \overline{h}_j(D^2 \times \mathrm{int}\, D^3)$$

$$\partial_- \overline{H}_i = \partial \overline{H}_i - S^2 \times T^2 \times 1$$

とおく。

次に、$h''|H_1 : H_1 \longrightarrow \overline{H_1}$ において、
$h''|H_1$ を isotopy で動かして、h_2^2 と $\overline{h_2^2}$ とを一致させることを考える。
$h'' \circ h_2 | D^2 \times 0$，$\overline{h}_2 | D^2 \times 0$ は、
$(D^2, S^1) \longrightarrow (\overline{H}_1, \partial_- \overline{H}_1)$ なる proper PL embedding で、pair の map として、homotopic である。なぜなら、
$\pi_2(\overline{H}_1, \partial_- \overline{H}_1) = \pi_2(\partial_- \overline{H}_1 \cup 3\text{-handle}, \partial_- \overline{H}_1) = 0$。よって、又、Theorem 4 と regular neighbourhood の uniqueness により、
$h''|H_1$ と isotopic な $h''' : H_1 \longrightarrow \overline{H_1}$ で、

次の条件を満たすものが存在する。

① $h'''(\partial_- H_1 \cup h_2^2) = \partial_- \overline{H_1} \cup \overline{h_2^2}$

② $h''' | \partial_- H_1 \cup h_2^2 \cup \cdots \cup h_n^2 \cup V_n = PL$

③ $h''' | \partial_- H_1$ と $h'' | \partial_- H_1$ とは PL isotopic

④ $h''' | \partial_+ H = h' | \partial_+ H$

以下．$\pi_2(\overline{H_i}, \partial_- \overline{H_i}) = \pi_2(\partial_- \overline{H_i} \cup 3\text{-handles}, \partial_- \overline{H_i}) = 0$ に注意して．h_{i+1}^2 と $\overline{h_{i+1}^2}$ と順次重ねることにより．われわれは．

$g : V \longrightarrow \overline{V}$ なる homeomorphism で次の条件を満たすものをとる。

① $g | \partial_- V \cup V_n = PL$

② $g | \partial_+ H = h' | \partial_+ H$

③ $g | \partial_- V : \partial_- V \longrightarrow \partial_- \overline{V}$ は．
$h(D_1^3 \times T^2) \cup W_n$ から．$D_1^3 \times T^2 \cup \overline{W_n}$ への PL homeomorphism に extend できる。

さらに．条件④ として．$\partial_+ V$ の一点と $\partial_- V$ の一点を結ぶ．PL properly embedded arc l で．l の regular neighbourhood $N(l)$ を

$\bigcup_{i=1}^{n} k_i^2$ と disjoint になるようなものとして適当にとり、
$g|N(\ell) = PL$ かつ、$g(N(\ell)) \cap \bigcup_{i=1}^{n} \overline{k_i^2} = \phi$
なる条件を加えておく。

このような ℓ の存在は general position の議論より明らかであるし、$g|N(\ell)$ が PL になるためには、1-handle の straightening を行なえばよい。

今までの議論で、$(S^3 \times T^2)_\beta$ が、
$D^3 \times T^2 \natural n(D^3 \times S^2)$ の二つの copy をその boundary である PL homeomorphism で張り合せたものになっていることがわかったわけである。

さらに、われわれは、$g: V \longrightarrow \overline{V}$ なる homeomorphism を isotopy で適当に動かして、V_n と $\overline{V_n}$ が重なるようにできないかと考える。そのためには、g を構成していったときのように、k_i^2 と $\overline{k_i^2}$ とを isotopy で順次一致させていくことができればよいが、$g \circ k_i | D^2 \times 0$ と $\overline{k_i} | D^2 \times 0$ は、$(D^2, S^1) \longrightarrow (\overline{V}, \partial_+ \overline{V})$ なる

pair の map とは一般には homotopic ではないので g のときのように、k_i^2 と $\bar{k}_i^2$ とを重ねていくことはできない。そこで、$\bar{k}_i^2$ なる 2-handles を新たな handles と取りかえたり、complementary な handle pair をつけ加えたりして、V の新しい handle-body 分解を考える。すなわち以下の通りである。

$\partial_+ V$ の一点 p と k_i^2 の一点を $\partial_+ V$ の中で arc l_i で結び、これを $\pi_2(V, \partial_+ V, p)$ の元と考え、a_i で表わす。同様に $\partial_+ \bar{V}$ の点 $g(p)$ と $\bar{k}_i^2$ の一点とを $\partial_+ \bar{V}$ の中の適当な arc で結び、これを、
$\pi_2(\bar{V}, \partial_+ \bar{V}, g(p))$ の元と考え b_i で表わす。
$i_* : \pi_1(\partial_+ V) \longrightarrow \pi_1(V)$ は isomorphism であり、$\widehat{\partial_+ V}$, $\hat{V}$ をそれぞれ $\partial_+ V$, V の universal covering とするとき
$\pi_2(V, \partial_+ V) \cong \pi_2(\hat{V}, \widehat{\partial_+ V}) \cong H_2(\hat{V}, \widehat{\partial_+ V})$
$\cong \underbrace{nZ \oplus \cdots \oplus nZ \oplus \cdots}_{\pi_1(\partial_+ V)}$ となる。

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ は
それぞれ. $\pi_2(V, \partial_+ V)$, $\pi_2(\bar{V}, \partial_+ \bar{V})$ の
$Z[\pi_1]$-module としての free basis になっている。
ただし. $\pi_1(\partial_+ V)$ と $\pi_1(\partial_+ \bar{V})$ を g_* で同一視して. 共に π_1 と書くことにする。

$g_*: \pi_2(V, \partial_+ V) \longrightarrow \pi_2(\bar{V}, \partial_+ \bar{V})$ なる
$Z[\pi_1]$-module isomorphism を basis
$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$
を使って. $G = (g_{ij})$ と matrix で表わす。
$g_{ij} \in Z[\pi_1]$ である。

よく知られているように. $\pi_1 \cong Z + Z$ の Whitehead group $Wh(\pi_1)$ は 0 である。よって. G の
$GL_n(Z[\pi_1]) \to GL(Z[\pi_1]) \xrightarrow{\alpha} Wh(\pi_1)$
による image は 0 である。
ここで. $\ker \alpha$ は elementary matrix と
$$\begin{pmatrix} \pm\sigma & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$$
$\sigma \in \pi_1$ なる matrix で

generate される $GL(\mathbb{Z}[\pi_1])$ の subgroup である。
このことは、適当な m に対し、

$$\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} = EU$$ とかけることを意味する。

ただし、E は elementary matrix の finite product。 $U = \begin{pmatrix} \pm\sigma & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$ $\sigma \in \pi_1$ である。

いま、g の条件④により、$g|N(\ell) = PL$ である。
そこで、$\mathrm{int}\, N(\ell)$ の中で、それぞれ、$N(\ell) \cap \partial_+ V$ と、$N(\ell) \cap \partial_- V$ に attach された 2-handles で complementary な pair を m 組定める。
それらを、$k^2_{n+1}, ---, k^2_{n+m}$, 及び、
$h^2_{n+1}, ----, h^2_{n+m}$ とする。ただし k^2_{n+i} と h^2_{n+i} が complementary になっているとする。
h_{n+i} は同相によって、$(D^2 \times D^3, S^1 \times D^3)$ から $(h^2_{n+i}, h_{n+i} \cap \partial_- V)$ への PL homeomorphism とする。また、

$$V_1 = V - \bigcup_{i=1}^{m} h_{n+i}(D^2 \times \mathrm{int}\, D^3)$$

$\overline{V_1} = g(V_1)$　　$\partial_+ V_1 = \partial_+ V$　$\partial_- V_1 = \partial V_1 - \partial_+ V_1$

とする。

$g_1 = g|V_1 : \quad V_1 \longrightarrow \overline{V_1}$　　とおく。

k^2_{n+i} の一点と p を $\partial_+ V_1$ の中の arc l_{n+i} で

結び、$\pi_2(V_1, \partial_+ V_1)$ の元と考え a_{n+i} で表わす。

$g_1(k^2_{n+i}) = \overline{k^2_{n+i}}$ とおく。$\overline{k^2_{n+i}}$ を $g(l_{n+i})$

で結び $\pi_2(\overline{V_1}, \partial_+\overline{V_1})$ の元と考え b_{n+i} で表わす。

このとき、$(g_1)_* : \pi_2(V_1, \partial_+ V_1) \longrightarrow \pi_2(\overline{V_1}, \partial_+\overline{V_1})$

を basis $(a_1, ---- a_n, a_{n+1}, ---- a_{n+m})$,

$(b_1, ----, b_n, b_{n+1}, ----, b_{n+m})$ で、

matrix 表示すると $\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix}$ になる。

一方、$\begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & 1_m \end{pmatrix} = EU$ であった。

そこで、E および U に相当する分だけ、matrix

を修正するために、V_1 の 2-handles、

k^2_i を新たな handles と取りかえることを考える。

そこで、次のような2種類の操作 (イ)、(ロ) を行なう。

(イ) われわれは、たとえば k_1^2 と k_2^2 とを arc $l_1 \cup l_2$ にそって connect したものを、少し isotopy で動かしたものを新たな 2-handle $(k_1^2)'$ として選ぶことができる。$(k_1^2)'$ は次の条件をみたすようにできる。

① $(k_1^2)'$ は $\bigcup_{i=2}^{n+m} k_i^2$ と disjoint

② $\partial_+ V_1 \cup (k_1^2)' \cup \left(\bigcup_{i=2}^{n+m} k_i^2\right)$ の V_1 における regular neighbourhood は V_1 全体である。

③ $(k_1^2)'$ を $\partial_+ V_1$ の中の適当な arc l_1' で結んで $\pi_2(V_1, \partial_+ V_1)$ の元と考え a_1' と表わす。このとき、$a_1' = a_1 + a_2$ である。

(ロ) われわれは、たとえば k_1^2 の一点と p とを結ぶ l_1 のかわりに適当な arc l_1' をとって、k_1^2 の一点と p を l_1' で結んだものが、$\pi_2(V_1, \partial_+ V_1)$ の中で、a_1 に π_1 の元 σ を act させたもの $\sigma \cdot a_1$ となるようにできる。

以上の(イ),(ロ)に代表される操作を有限回行うことによって、われわれは、次のようなV_1の新たなhandle-body分解をえる。

① $V_1 = \partial_+ V_1 \cup (h_1^2)' \cup \cdots \cup (h_{n+m}^2)'$
$\cup \{S^2 \times T^2 \# (n+m)(S^2 \times S^2)\} \times I$
とかける。ただし、$(h_i^2)'$は、$\partial_+ V_1$にtrivialかつ、disjointにattachされた2-handlesをあらわす。

② $(h_i^2)'$の一点とpを$\partial_+ V_1$の中で適当なarc l_i'で結んだものを、$\pi_2(V_1, \partial_+ V_1)$の元として、$a_i'$ $(1 \leq i \leq n+m)$と表わすとき、
$(g_1)_* : \pi_2(V_1, \partial_+ V_1) \longrightarrow \pi_2(\overline{V_1}, \partial \overline{V_1})$の basis $(a_1', \cdots, a_n', a_{n+1}, \cdots, a_{n+m})$ $(b_1, \cdots, b_n, b_{n+1}, \cdots, b_{n+m})$による matrix表示は、$1_{n+m} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$になる。

$(h_1)'$を $(D^2 \times D^3, S^1 \times D^3) \longrightarrow ((h_1^2)', (h_1^2)' \cap \partial_+ V)$

なる PL homeomorphism とするとき．以上の議論により
$g_1 \circ (k_1)' | D^2 \times 0$ ， $\overline{k_1} | D^2 \times 0$ は．
$(D^2, S^1) \longrightarrow (V_1, \partial_+ V_1)$ なる pair の map
とは．homotopic になる。ゆえに．Theorem 4 と
regular neighbourhood の uniqueness より
われわれは．g_1 と isotopic な．$g_2 : V_1 \to \overline{V_1}$
で次の条件を満たすものをえる。

① $g_2((k_1^2)') = \overline{k_1^2}$

② $g_2 | \partial_+ V_1$ は $g_1 | \partial_+ V_1$ と PL isotopic

③ $g_2 | \partial V_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n+m} (k_i^2)' \right) = PL$

④ $g_2 | \partial_- V_1 = g_1 | \partial_- V_1$

次に．

$$V_{1.1} = V_1 - (k_1)'(D^2 \times \mathrm{int}\, D^3)$$
$$\overline{V_{11}} = \overline{V_1} - \overline{k_1}(D^2 \times \mathrm{int}\, D^3)$$
$$\partial_- V_{11} = \partial_- V_1 \quad , \quad \partial_+ V_{11} = \partial V_{11} - \partial_- V_{11}$$
$$\partial_- \overline{V_{11}} = \partial_- \overline{V_1} \quad , \quad \partial_+ \overline{V_{11}} = \partial \overline{V_{11}} - \partial_- \overline{V_{11}}$$
$$g_3 = g_2 | V_{11} : \quad V_{1.1} \longrightarrow \overline{V_{1.1}}$$ とおく。

a_i', b_i $(2 \leqq i \leqq n+m)$ に対応する
$\pi_2(V_{11}, \partial_+V_{11})$, $\pi_2(\overline{V_{11}}, \partial_+\overline{V_{11}})$ の元を
a_i'', b_i'' $(2 \leqq i \leqq n+m)$ とする。このとき、
basis $(a_2'', \cdots, a_{n+m}'')$, $(b_2'', \cdots, b_{n+m}'')$
による $(g_3)_* : \pi_2(V_{11}, \partial_+V_{11}) \longrightarrow \pi_2(\overline{V_{11}}, \partial_+\overline{V_{11}})$
の matrix 表示は $1_{n+m-1} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ で
あることが、次の diagram より容易にわかる。

$$\begin{tikzcd}
 & & \pi_2(V_{11}, \partial_+V_{11}) \arrow[dr, "\cong"] \arrow[ddd, bend right, "(g_3)_*"'] & & \\
0 \arrow[r] & \pi_2(\partial_+V_1 \cup (h_1^2)', \partial_+V_1) \arrow[r] \arrow[d, "(g_2|)_* = (1)"] & \pi_2(V_1, \partial_+V_1) \arrow[r] \arrow[d, "(g_2)_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] & \pi_2(V_1, \partial_+V_1 \cup (h_1^2)') \arrow[r] \arrow[d, "(g_2|)_*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \pi_2(\partial_+\overline{V_1} \cup \overline{h_1^2}, \partial_+V_1) \arrow[r] & \pi_2(\overline{V_1}, \partial_+\overline{V_1}) \arrow[r] & \pi_2(\overline{V_1}, \partial_+\overline{V_1} \cup \overline{h_1^2}) \arrow[r] & 0 \\
 & & \pi_2(\overline{V_{11}}; \partial_+\overline{V_{11}}) \arrow[ur, "\cong"'] & &
\end{tikzcd}$$

以上により、われわれは $g_3 : V_{11} \longrightarrow \overline{V_{11}}$ を isotopy で動かして、$(h_2^2)'$ と $\overline{h_2^2}$ とを一致させることができる。以下同様に $(h_i^2)'$ と $\overline{h_i^2}$ とを重ねる isotopy を inductive に構成していくことにより最終的に、次のような homeomorphism をうることができる。

$\bar{g}:\{S^2\times T^2 \# (n+m)(S^2\times S^2)\}\times I$ ⟲ なる homeomorphism で．$\bar{g}|\partial = pL$ 。

このとき．$f=\left(\bar{g}\big|\{S^2\times T^2\#(n+m)(S^2\times S^2)\}\times 1\right)^{-1}\circ$

$$\left(\bar{g}\big|\{S^2\times T^2\#(n+m)(S^2\times S^2)\}\times 0\right)$$

を．$\{S^2\times T^2\#(n+m)(S^2\times T^2)\}\times I$ の pL automorphism と考えれば．$(S^3\times T^2)_\beta$ が $S^3\times T^2$ に pL homeomorphic にならないことより．f は．$D^3\times T^2 ♮ (n+m)(D^3\times S^2)$ の pL automorphism に extend できないことがわかる。f は明らかに topologically pseudo-isotopic to the identity であることが．$\bar{g}$ の存在によりわかるから．f は exotic である。

Theorem 3 の後半は．$(S^3\times T^2)_\beta$ の任意の covering がまた exotic structure をもつことより．明らか。

q.e.d.

§3. Non-trivial homotopy triangulation of 4-manifold.

ここでわれわれは、Theorem 3 の exotic PL automorphism を使って、4-dimensional homotopy triangulation の nontrivial element を構成する。

Definition

M を compact PL manifold とするとき、M の homotopy triangulation を次のように定義する。

(f, N) を次のような pair とする。

① N は compact PL manifold. ② $f:(N,\partial N)\to(M,\partial M)$ は $f|\partial N$ = PL homeomorphism かつ、f は boundary を fix した homotopy で homotopy equivalent。さらに、(f,N) と (f',N') が ①,② を満たす pair としたとき、これらが同値とは、適当な PL homeomorphism $g: N\to N'$ s.t. $f'\circ(g|\partial N)=f$ で、次の diagram が boundary を fix して homotopy commute することとする。

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\simeq"] & & N' \arrow[dl, "f'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

。以上によって定まる pair の同値類を M の homotopy triangulation と定義し、$hT(M,\partial M)$ と記す。

Theorem 5
適当な $k \geq 0$ に対し，$hT(S^2 \times S^1 \times I \# k(S^2 \times S^2), \partial)$ および，$hT(S^1 \times S^3 \# k(S^2 \times S^2))$ は，non-trivial element をもつ。

この証明に，我々は，Shaneson[6] の次の Theorem を使う。

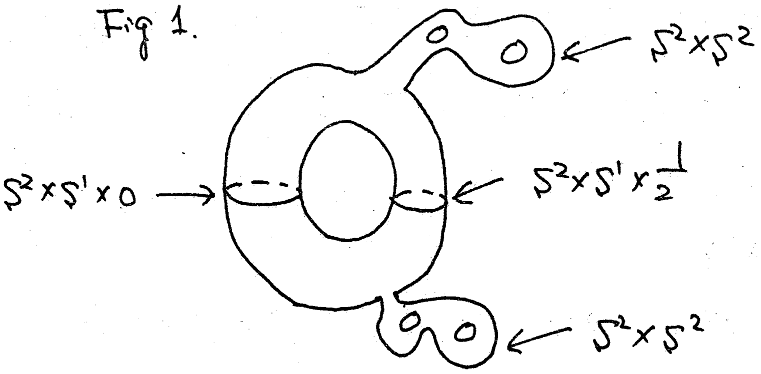
Theorem (Shaneson)
M を closed PL 4-manifold で，$\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ とする。このとき，M の PL homeomorphism は，homotopic to the identity ならば，PL pseudo-isotopic to the identity である。

Proof of Theorem 5
f を Theorem 3 の証明で，construct したような，$S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2)$ の exotic PL ~~homeo~~automorphism で，その任意の covering が，$D^3 \times T^2 \natural k(D^3 \times S^2)$ の対応する covering の PL homeomorphism に extend できないものとする。必要ならば，finite covering をとることにより我々は，f に最初から次のような仮定をもうけることがで

きる。

仮定：f と identity との topological pseudo-isotopy $F : (S^2\times T^2 \# k(S^2\times S^2))\times I \circlearrowleft$ で、$F(S^2\times S^1\times 0\times I)\cap S^2\times S^1\times \frac{1}{2}\times I = \phi$ なるものが存在する。ただし、$S^2\times T^2 = S^2\times S^1\times R/\mathbb{Z}$ と考え、k 個の $S^2\times S^2$ は $S^2\times S^1\times 0$ および $S^2\times S^1\times\frac{1}{2}$ 以外のところで connected sum されているものとする。(Fig1)

Fig 1.



このとき、Siebenmann[7] の weak pseudo-isotopy theorem により、

$F\times id_{S^1} : (S^2\times T^2 \# k(S^2\times S^2))\times I\times S^1 \circlearrowleft$ なる pseudo-isotopy を、isotopy に deform することができる。すなわち、

$G : S^2\times T^2 \# k(S^2\times S^2)\times I\times S^1 \circlearrowleft$ なる isotopy

(i.e. I-preserving homeomorphism) で、

$G|(S^2\times T^2 \# k(S^2\times S^2))\times 1\times S^1 = f\times id_{S^1}$

$G|(S^2\times T^2 \# k(S^2\times S^2))\times 0\times S^1 = id$

なるものがある。さらに、

$G(S^2\times S^1\times 0\times I\times S^1)\cap S^2\times S^1\times\frac{1}{2}\times I\times S^1=\phi$ にできる。

次に、

$$G|S^2\times S^1\times 0\times I\times S^1 : S^2\times S^1\times 0\times I\times S^1 \longrightarrow (S^2\times T^2\# k(S^2\times S^2))\times I\times S^1$$

なる isotopy を Edward-Kirby [1] の covering isotopy により、cover する。すなわち、

$G': (S^2\times T^2\# k(S^2\times S^2))\times I\times S^1 \circlearrowleft$ なる isotopy で、

$$G'|S^2\times S^1\times 0\times I\times S^1 = G|S^2\times S^1\times 0\times I\times S^1$$

$$G'|S^2\times S^1\times\frac{1}{2}\times I\times S^1 = id$$

となるものが存在する。

$S^2\times T^2\# k(S^2\times S^2)$ の中で、$f(S^2\times S^1\times 0)$ と $S^2\times S^1\times 0$ に bound される manifold を、H_1, H_2 とする。(Fig.2)

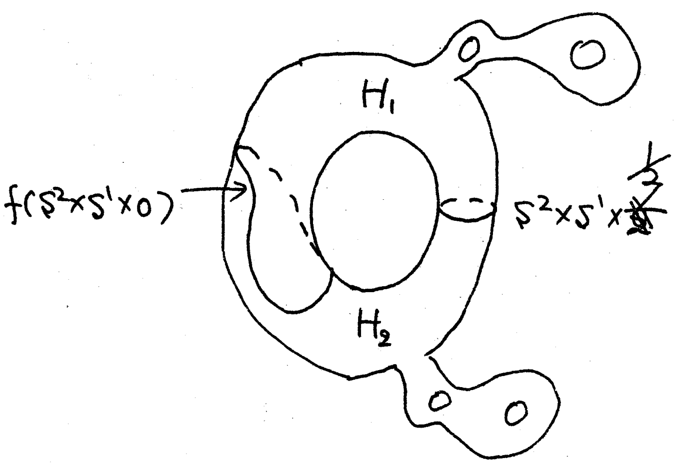


Fig.2

$g_i = (G'|H_i \times 1 \times S^1)^{-1} : H_i \times S^1 \longrightarrow (S^2 \times S^1 \times I \# k(S^2 \times S^2)) \times S^1$
$(i=1,2)$ とおく。

$g_i|\partial H_i \times S^1 = (f|S^2 \times S^1 \times 0)^{-1} \times id_{S^1} \cup id_{S^2 \times S^1 \times \frac{1}{2} \times S^1}$
である。

$\overline{g_i} : H_i \times R \longrightarrow (S^2 \times S^1 \times I \# k'(S^2 \times S^2)) \times R$ を
g_i の infinite cyclic covering とする。

$h_i = p \circ \overline{g_i} \circ i$ とおく。ただし p, i は次の diagram のような canonical な projection と inclusion である。

$$\begin{array}{ccc} H_i \times R & \xrightarrow{\overline{g_i}} & (S^2 \times S^1 \times I \# k'(S^2 \times S^2)) \times R \\ i \uparrow & & p \downarrow \\ H_i & \xrightarrow[h_i]{} & S^2 \times S^1 \times I \# k'(S^2 \times S^2) \end{array}$$

$h_i|\partial H_i = (f|S^2 \times S^1 \times 0)^{-1} \cup id_{S^2 \times S^1 \times \frac{1}{2}}$ となっている。

この (H_i, h_i) を $hT(S^2 \times S^1 \times I \# k'(S^2 \times S^2), \partial)$ の element とみる。このときもし (H_i, h_i) が、ともに trivial element だと仮定してみる。そうすると、
$h : S^2 \times T^2 \# k(S^2 \times S^2) \circlearrowleft$ なる PL homeomorphism で、

$h|f(S^2\times S^1\times 0) = f^{-1}|f(S^2\times S^1\times 0)$

$h|S^2\times S^1\times \frac{1}{2} = id$

・ hはf^{-1}にhomotopic

となるものが存在する。

次のlemmaを使うと、fが、$D^3\times T^2 \natural k(D^3\times S^2)$のPL homeomorphismにextendされて、矛盾が生じる。すなわち、(H_i, h_i) $(i=1,2)$のうち、少くとも、一方は、non-trivial elementであることがわかる。

lemma.

h, $h\circ f$は共に、$D^3\times T^2 \natural k(D^3\times S^2)$のPL homeomorphismにextendできる。

proof of lemma

hを$S^2\times S^1\times \frac{1}{2}$のところで、切り開いたhomeomorphismを

$\bar{h}: S^2\times S^1\times I \# k(S^2\times S^2) \circlearrowleft$ とする。

$\bar{h}|\partial = id$である。$S^1\times S^3 \# k(S^2\times S^2)$を、

$S^1\times D^3 \cup S^2\times S^1\times I \# k(S^2\times S^2) \cup S^1\times D^3$なる分解を、

考える。$\bar{\bar{h}}: S^3\times S^1 \# k(S^2\times S^2) \circlearrowleft$ なるPL

homeomorphismを、$\bar{\bar{h}} = id_{S^1\times D^3} \cup \bar{h}|S^2\times S^1\times I \# k(S^2\times S^2)$

$\cup\ id_{S^1\times D^3}$

で定義する。$\tilde{h}$ は homotopic to id だから、Theorem 6 により、$D^4\times S^1 \# k(D^3\times S^2)$ の PL homeomorphism に extend できる。このPL homeomorphism を使って、h の PL extension である。
$D^3\times T^2 \# k(D^3\times S^2)$ の PL homeomorphism を構成できる。$h\circ f$ に関しても同様である。 lemma q.e.d.

Theorem 5 の後半に関しては、
$hT(S^2\times S^1\times I \# k(S^2\times S^2), \partial)$ の non-trivial element (H_i, h_i) の $\partial H_i = S^1\times S^2 \cup S^1\times S^2$ に $S^1\times D^3$ をはりつけて作る。Gluck [2] により、$S^1\times S^2$ のPL homeomorphism は homotopic to the identity なら、isotopic to the identity であることに注意すれば、この element が non-trivial なことがわかる。 Theorem 5 q.e.d.

references

1. Edwards, R.H. and Kirby, R.C.
"Deformations of Spaces of Embeddings"
Notes, U.C.L.A. 1969.

2. Gluck, H.
"The embedding of 2-spheres in 4-sphere"
Trans. Am. Math. Soc. 104 (1964) 303-333

3. Hudson, J.F.D.
"Piecewise Linear Topology"
Benjamin.

4. Fukuhara, S
"On the Hauptvermutung of 5-dimensional manifolds and s-cobordisms"
(to appear)

5. Kirby, R.C.
"Lectures on triangulation of manifolds"
Notes, U.C.L.A. 1969

6. Shaneson, J.L.
"Non-Simply-connected surgery and
Some result in low dimensional topology"

7. Siebenmann, L.C.
"Disruption of low dimensional handle
body theory by Rochlin's theorem"
Notes

8. Wall, C.T.C.
"On simply connected 4-manifold"
Proc. London. Math. Soc. 39 (1964) 141-149.