数理解析研究所講究録
第 128 巻 1971 年 205-220

動的システムのモデル検定

東大　工学部　茅　陽一
東大　工学部　石川　真澄

§1. 序論

いわゆる現代制御理論は，同定，最適制御，推定の三つに大別できる。衆知の様に，これらの問題はいずれもその適用にあたって，事前に何らかの仮定を必要とする。

即ち，同定問題においては，たとえば伝達関数モデルの決定に際し，システムが線形オートノマス且つ何次形かという構造を仮定してはじめてそのパラメータを決定しうる。最適制御問題では与えられたモデルがシステムの数学的表現として妥当であるという仮定を要する。推定問題でも同様に，仮定したモデル及び雑音の共分散行列が妥当であるという前提が必要である。

この様な事情にもかかわらず，これらの種々の仮定がはたして妥当であるか否かを論じたものはきわめて少なく，それらはいずれも種々の欠点を有している。

ここではこれらの仮定がはたして妥当であるか否かをシステムの入出力データに基づいて統計的に検定する手法について述べてみたい。

これらの仮定が妥当でない時に，その結果がどの様に変化するかという事については，従来より感度解析の手法があるが，そこで得られる感度は設計段階において既に知りうるものであり，実際のシステムとは無関係なものである。従ってこの感度を用いて仮定の妥当性を論ずるのは本質的に不可能である。

それに対して，ここでは従来のものとは全く異なる感度の概念を提案する。モデルパラメータw_mに基づいてシステムにActionを加えた時のシステムの評価関数を$J(w_s, w_m)$とする。（ただし，w_sはシステムのパラメータとする。）この$J(w_s, w_m)$をw_mの関数として見ると，$J(w_s, w_m)$が$w_m = w_s$で最小値をとる事は明らかである。従って，ここで感度ξを

$$\xi(w_s, w_m) \triangleq \left.\frac{\partial J(w_s, w)}{\partial w}\right|_{w=w_m}$$

と定義すると，上述の事より$\xi(w_s, w_s) = 0$である。従って

$$w_m = w_s \iff \xi(w_s, w_m) = 0$$

この事より，この感度$\xi(w_s, w_m)$を求め，この値が零であるか否かを見れば，モデルのパラメータ値w_mが妥当である

か否かがわかる事になる。

しかし，実際に得られる感度は雑音に汚されているため，統計的な議論が必要となり，上で述べた事は，感度の期待値が零であるという仮説を統計的に検定する問題となる。ただこの場合問題となるのは，統計的推定においては点推定という形で，統計量の分布が未知であっても適用が可能であるのに対し，統計的検定においては，統計量の確率分布に関する知識が要求されると言う事である。即ち，統計量としては，この場合帰無仮説と対立仮説のそれぞれに対し異なる値をとる必要があると同時に，その確率分布をある程度知りうるという，二つの要求を満足するものでなければならない。これが，この種の問題が従来困難とされてきた原因の一つでもある。

幸い上で述べた感度は，後述の様にこの二つの要件を満たすほか，次の様な利点を持つ。

雑音について要求される性質としては，平均値零で，入力と無相関でありさえすれば良く，白色性等の仮定は必要としない。

より一般的なモデルとの比較においてモデルの妥当性を検定するにもかかわらず，帰無仮説の下では本来零になるべき付加パラメータに関する感度を用いるため，より一般的な

モデルを実際に求める必要は無く，もとのモデルを用いて容易に感度を計算できるので計算量が少なくてすむ。

このように，ここで用いた感度による手法は，従来の種々の手法が克服しえなかったさまざまの困難を克服しうる特徴をもつ。

§2. 与えられたモデルの妥当性の検定

最適制御理論は，　　　　システムの数学的モデルが与えられている事を前提として，そのモデルに対する最適制御入力を求める事を目的としている。しかしながら，前述の様に，与えられたモデルがはたしてシステムの表現として妥当であるか否かという問題は，従来ほとんど研究されてこなかった。ここで扱うのはこのような問題である。この場合，どの様な観点に立ってモデルが妥当であるかを判断するのかが重要となる。

まず第一に考えられるのは，モデルの出力が，与えられた入力データに対して，システムの出力と同じようなふるまいを示すか否かでモデルの妥当性を判断するものである。従って，この場合，出力誤差 e_k，あるいは出力平均二乗誤差 $\overline{e_k^2}$ を考える事になる。（Fig. 1）

次に考えられるのは，制御という観点からモデルの妥当性を判断するものである。我々がシステムのモデルを作るのは

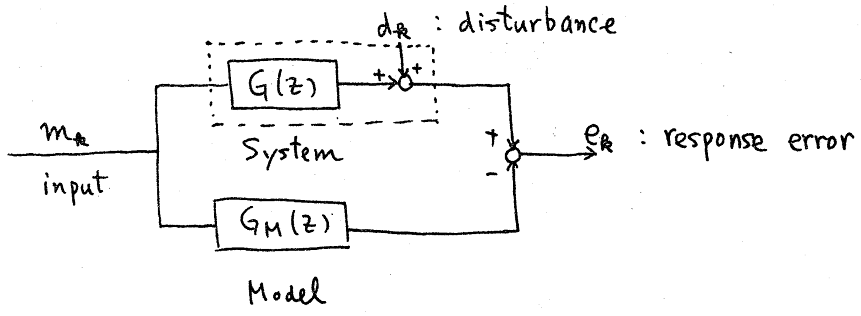

Fig 1. System and Model

ほとんどの場合，それ自体が目的ではなくて，作ったモデルに基づいてシステムを制御するのが目的である事から考えても，モデルの妥当性を論ずるのに，制御を考慮する事はきわめて有効であると考えられる。

なお，ここでは信号および雑音の強定常性を仮定する。

2.1. 出力平均二乗誤差感度を用いた伝達関数モデルの妥当性の検定[1]

ここで考えるのは，次の様な問題である。

「システムの伝達関数モデルと入出力データが与えられた時，この入出力データに基づいて，与えられたモデルが出力平均二乗誤差という観点から見て妥当であるか否かを検定せよ。」

モデル $G_M(z)$ を次のものとする。

$$G_M(z) = \frac{\hat{b}_0 + \hat{b}_1 z^{-1} + \cdots + \hat{b}_m z^{-m}}{1 + \hat{a}_1 z^{-1} + \cdots + \hat{a}_m z^{-m}} \tag{2.1}$$

この時，次の原理を用いてモデルの妥当性を検定できる。

モデル $G_M(z)$ が出力平均二乗誤差という観点から見て妥当

$$\Updownarrow$$

$$E\left.\frac{\partial\overline{e_k^2}}{\partial\hat{a}_i}\right|_{P_0}=E\left.\frac{\partial\overline{e_k^2}}{\partial\hat{b}_j}\right|_{P_0}=0\quad;\quad\begin{array}{l}i=1,2,\cdots\cdots\\ j=0,1,\cdots\cdots\end{array}\tag{2.2}$$

ただし
$$P_0=\{a_1\ a_2\ \cdots\cdots\ b_0\ b_1\ \cdots\cdots\}$$
$$=\{\hat{a}_1\cdots\hat{a}_m\ 0\cdots0\ \hat{b}_0\ \cdots\hat{b}_m\ 0\ \cdots\}\tag{2.3}$$

多くの場合，(2.2) は次の様に付加パラメータ $\hat{a}_{m+1}$, $\hat{b}_{m+1}$ に関する感度の期待値が零であるという事でおきかえられる。

$$E\left.\frac{\partial\overline{e_k^2}}{\partial\hat{a}_{m+1}}\right|_{P_0}=E\left.\frac{\partial\overline{e_k^2}}{\partial\hat{b}_{m+1}}\right|_{P_0}=0\tag{2.4}$$

ここで $\dfrac{\partial\overline{e_k^2}}{\partial\hat{a}_{m+1}}$, $\dfrac{\partial\overline{e_k^2}}{\partial\hat{b}_{m+1}}$ は強定常不規則過程の長時間にわたる時間平均だから，近似的に正規分布をなし，従って (2.4) は T^2 検定により検定できる。

なお，ある次数で locally minimum の状態にある伝達関数モデルを本手法により検定すると，モデルが妥当でないという結論が得られるのは明らかである。

2.2. 出力平均二乗誤差感度を用いたインパルス応答モデルの妥当性の検定 (2)

問題の形式は 2.1. とほぼ同じである。

原理：モデル $\{g_M(k)\ ;\ k=0,1,\cdots,N\}$ が出力平均二乗誤差という観点から見て妥当

$$\Updownarrow$$

$$E\left.\frac{\partial\overline{e_k^2}}{\partial h_i(k_i)}\right|_{P_0}=-2E\,J_i(k_i)\Big|_{P_0}=0\quad;\ i=1,2,\cdots\tag{2.5}$$

ただし,

$$J_i(\mathbb{k}_i) = \overline{m(n-k_1)\cdots m(n-k_i)\, e(n)} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \{ h_1(0), h_1(1), \cdots, h_2(0,0), h_2(0,1), \cdots \} \\ &= \{ g_M(0), \cdots, g_M(N), 0, \cdots \} \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\mathbb{k}_i$ は整数をその要素とする i 次元ベクトルとする。$J_i(\mathbb{k}_i)$ は無限にあるが,実際には適当な個数をとり,又,前述と同じ理由で近似的に正規分布をなす事から,(2.5) は T^2 検定により検定できる。

2.3. 制御評価指数感度を用いた状態変数モデルの妥当性の検定(3)

ここで考えるのは次の様な問題である。

「システムの状態変数モデル及び入出力データが与えられた時,データに基づいてそのモデルが制御という観点から見て妥当であるか否かを検定せよ。」

この問題も,2.1. と同様にして,制御評価指数の,付加パラメータに関する感度の期待値が零であるか否かを検定すればよい。

なお,ここでの考え方を更に押し進めると,制御方策を考慮しながら,システムのモデル形成を行なうという新しい考え方が導かれる。(4) これは従来別個に考えられてきた同定と最適制御を統一的に取り扱う一手法として,有効なものと思われる。

§3. システムの形式の検定

ここでも信号，雑音が強定常不規則過程である事を仮定する。

3.1. 伝達関数モデルの次数の検定[5]

ここで考えるのは，次の様な問題である。

「システムの与えられた入出力データに基づき，システムがある仮定した次数であるか否かを検定せよ。」

この問題に関しては従来より二・三の提案がなされているが，いずれも雑音に特殊な性質を仮定したり，非能率であったりして，実用に耐えないものと思われる。[6][7][8][9][10][11]

この問題に対する，基本的な考え方として次の二通りの考え方がある。

(a) モデルを決定する事なく，次数の検定を行なう。

(b) 実際にモデルを決定し，それを用いて次数の検定を行なう。

このうち，前者の方は，次数が決まってからはじめてモデルを作れば良いので，後者よりも望ましいが，問題としては，前者の方が困難であるのは明らかである。

原理 1. （これは 2.1. の手法を若干変形したものである。）

$$\text{システムが } L \text{ 次形} \Longrightarrow \underset{T_1, T_2}{E} \left. \frac{\partial \overline{e_k^2}}{\partial \hat{a}_{L+1}} \right|_{P_0} = \underset{T_1, T_2}{E} \left. \frac{\partial \overline{e_k^2}}{\partial \hat{b}_{L+1}} \right|_{P_0} = 0 \qquad (3.1)$$

ただし T_1 は 伝達関数モデルの同定のデータ

T_2 は 感度を計算するデータ

原理2.

システムがL次形 $\Longrightarrow$ $E\,\hat{a}_{L+1} = E\,\hat{b}_{L+1} = 0$ (3.2)

ただし $\hat{a}_{L+1}$, $\hat{b}_{L+1}$ は，L次形モデルを初期値として，ガウスニュートン法により求めたL+1次のパラメータとする。

原理3. 入力を m, 出力を c とする時

システムが一次形 $\Longrightarrow$

$$E\det\begin{bmatrix} c_n & c_{n-1} & m_n & m_{n-1} \\ c_{n+l} & c_{n+l-1} & m_{n+l} & m_{n+l-1} \\ c_{n+2l} & c_{n+2l-1} & m_{n+2l} & m_{n+2l-1} \\ c_{n+3l} & c_{n+3l-1} & m_{n+3l} & m_{n+3l-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.3)$$

ただし，l は外乱の自己相関関数の減衰時定数より十分長いものとする。なお，この方式は，外乱の帯域幅がシステムの帯域幅に比べて十分大きい必要がある。

各方式の比較

方式1 & 2	方式3
モデルを多数回求める必要あり。	モデルを求める必要無し。
計算量は比較的多い。	計算量は少ない。
外乱に対する制約は少ない。	外乱に対する制約は多い。
同一のデータ長に対して方式3.の方が検定力が小さい。	

これらの手法により，システムの次数を決定するには，低い次数より，仮説を棄却できなくなるまで，順次この手法をくりかえし適用すればよい。

なお，成因分析の手法が次数の決定に適用できぬかと考えたが，現在の段階では外乱に対して要求される性質が厳しすぎて，特別な場合を除いて，適用できうる状態ではない。

3.2. 線形オートノマス性の検定[2]

ここで考えるのは，次の様な問題である。

「システムの与えられた入出力データに基づき，システムが線形オートノマスであるか否かを検定せよ。」

従来の，この問題に関する提案は，筆者の知るかぎりでは皆無である。

原理：システムが線形オートノマス $\Longleftrightarrow \underset{T_1, T_2}{E} \left. \dfrac{\partial \overline{e_k^2}}{\partial h_i(k_i)} \right|_{P_0} = 0$ (3.4)

$; i = 2, 3, \cdots$

§4. カルマンフィルタの妥当性の検定

カルマンフィルタは，ディジタル計算機による状態推定に適した手法として，ロケットの軌道推定等に欠かせぬものとなっている。カルマンフィルタがこの様に多く使われる理由としては，記憶容量が少なくてすむ，データと無関係に事前にフィルタの構造パラメータを計算しうるのでオンラインで状態推定を行なう際には計算量はきわめてわずかですむ事などがあげられる。

しかし，この，フィルタの構造パラメータを事前に計算できるという事は，逆に欠点でもある。即ち，この場合，フィ

ルタの構造パラメータは，事前にシステムのパラメータ，雑音の共分散行列等を仮定する事により得られるものであり，もしこれらの仮定がちがっていたとしても，カルマンフィルタの使用中に，これらの仮定に関する情報がフィードバックされて，フィルタの構造パラメータを修正するというような事は，従来のカルマンフィルタにおいては全く考えられていない。筆者らは，カルマンフィルタのこのような短所を克服する一手法を開発したので，ここに述べてみたい。

なお，ここでは簡単のためシステムの次数は既知とする。（未知の場合にも，§2. と類似の手法を用いれば，ここでの手法を適用できる。）

システム及び観測機構：

$$x_k = \Phi x_{k-1} + \Gamma w_{k-1} \tag{4.1}$$

$$z_k = H x_k + v_k \tag{4.2}$$

$$E\, w_k = 0 \quad , \quad E\, w_k w_k^T = Q$$

$$E\, v_k = 0 \quad , \quad E\, v_k v_k^T = R$$

カルマンフィルタ：

$$\hat{x}_k = \Phi \hat{x}_{k-1} + K_k \nu_k \tag{4.3}$$

ただし　$\nu_k \triangleq z_k - H\Phi\hat{x}_{k-1}$　　*innovation sequence*

又，K_k は次の漸化式により求められる。

$$P_k' = \Phi P_{k-1} \Phi^T + \Gamma Q \Gamma^T \tag{4.4}$$

$$K_k = P'_k H^T [H P'_k H^T + R]^{-1} \tag{4.5}$$

$$P_k = (I - K_k H) P'_k \tag{4.6}$$

ただし　P'_k : $k-1$ ステップまでの観測に基づいた x_k の推定誤差共分散行列

P_k : k ステップまでの観測に基づいた x_k の推定誤差共分散行列

この時，問題の形式は次の様になる。

「カルマンフィルタの与えられた入出力データ（z_k 及び $\hat{x}_k$）に基づいて，仮定したパラメータ値 Φ, Q, R の妥当性を検定せよ。」

このような問題に関して，従来二、三の研究が発表されているが，いずれも不十分である。それに対し，筆者らの手法は，Φ, Q, R の中の任意のパラメータを対象としうるという点からより一般的であり，又，アダプティブフィルタにもこの考え方を発展させる事が可能であるという特長も有する。

即ち，筆者らの手法は，評価関数 J の，仮定したパラメータ値 μ に関する感度　　　　が零であるか否かを統計的に検定するものである。なお，ここでは評価関数 J として

$$J = E[\nu_k^T \nu_k] \tag{4.7}$$

を考えた。（この J が，$J' = \mathrm{tr}\, P_k$ なる通常のカルマンフィルタのそれと等価である事は，容易に証明できる。）従って，

感度は次式で表わされる。

$$\left.\frac{\partial J}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} = -2E\left[\nu_k^T H \left.\frac{\partial \hat{x}_{k|k-1}}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_0} \right] \tag{4.8}$$

ただし μ_0 は，仮定したパラメータ値である。

ν_k, w_k 従って x_k のエルゴード性を仮定すれば，(4.8) は時間平均でおきかえられ，§2. と全く同一の手順を用いて T^2 検定を適用できる。なお，$\frac{\partial \hat{x}_{k|k-1}}{\partial \mu}$ は通常の感度解析の手法を用いて求める事が可能である。

次の様な例について，計算機によるシミュレーションを行なった。

システム：
$$x_a(k) = A\,x_a(k-1) + w_a(k-1)$$
$$z_a(k) = x_a(k) + v_a(k)$$
$$E[w_a(k)^2] = q_a \quad , \quad E[v_a(k)^2] = r_a$$
$$(A, q_a, r_a) = (0.9,\ 1.0,\ 2.0)$$

w_a, v_a としては，互に独立な正規性乱数を用いた。

モデル：
$$x(k) = a\,x(k-1) + w(k-1)$$
$$z(k) = x(k) + v(k)$$
$$E[w(k)^2] = q, \quad E[v(k)^2] = r$$

データ長：1000 データを 10 区間に分割したものを用いた。

以上の条件の下で，T^2 検定により仮定したパラメータ値 (a, q, r) の妥当性の検定を行なった。なお，この場合 $\frac{\partial \hat{J}}{\partial q} \propto \frac{\partial \hat{J}}{\partial r}$ なので，$\frac{\partial \hat{J}}{\partial a}$ と $\frac{\partial \hat{J}}{\partial q}$ の二つを用いて T^2 検定を行なった。

従って，この場合の棄却域は

$$F \geq F_{2,8}(0.05) = 4.46$$

Simulation Result

true parameter $(A, q_a, r_a) = (0.9, 1.0, 2.0)$

	parameter			J	F	Decision
	a	q	r			
Case 1.	0.9	1.0	1.0	3.733	10.135	Reject
Case 2.	0.9	1.0	1.6	3.663	2.519	Accept
Case 3.	0.9	1.0	2.0	3.647	0.829	Accept
Case 4.	0.9	1.0	4.0	3.682	3.255	Accept
Case 5.	0.9	0.5	2.0	3.682	3.255	Accept
Case 6.	0.9	1.5	2.0	3.685	4.831	Reject
Case 7.	0.9	2.0	2.0	3.733	10.135	Reject
Case 8.	0.9	2.0	4.0	3.647	0.829	Accept
Case 9.	0.9	1.5	1.6	3.721	8.776	Reject
Case 10.	1.0	1.0	2.0	3.821	471.70	Reject
Case 11.	0.95	1.0	2.0	3.687	13.719	Reject
Case 12.	0.85	1.0	2.0	3.690	2.576	Accept
Case 13.	0.8	1.0	2.0	3.801	4.700	Reject

いずれの場合も真値からのずれが大きい時には，仮説は棄却されており，これはこの場合の評価関数$\hat{J}$の値の変化とほぼ符合している。（この$\hat{J}$はシミュレーションによって求めたものである。）

ここでの考え方を押し進めると，$\frac{\partial J}{\partial \mu}$ が零となるように各パラメータを駆動するアダプティブカルマンフィルタを構成できる。即ち，kステップにおけるパラメータの変化幅を$\Delta\mu_k$とすると

$$\Delta\mu_k = -K \left.\frac{\partial J}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_{k-1}} \tag{4.9}$$

とすればよい。このような考え方により，Γ, Q, R の中の任意の未知パラメータの推定が可能となり，シミュレーション結果によっても，その好ましい特性が裏付けられた。

§5. 結論

ここに述べた感度の考え方を用いる事により，同定，最適制御，推定のいずれに対しても，それらの事前の仮定の妥当性を検定する事が可能になり，有効且つ非常に一般的に適用しうる手法である事がわかった。又，この感度を用いてパラメータをアダプティブに変化させる事も可能になった。

参考文献

(1) 茅：伝達関数モデルの妥当性の検定；計測自動制御学会論文集，5-4，pp 54-63 (1969)

(2) 茅，石川：インパルス応答モデルの妥当性の検定；計測自動制御学会論文集，6-4，pp337-345 (1970)

(3) 志岐，石川，茅：最適制御から見たモデル形成；第2回統計学的制御理論シンポジウム講演論文集，pp 41-44 (1970)

(4) N.Shiki,M.Ishikawa & Y.Kaya: Co-ordination of Modelling and Optimal Control; Proceedings of the Fourth Hawaii International Conference on System Sciences, pp516-518 (1971)

(5) 石川, 茅: 線形システムの次数の検定; 第9回 SICE 学術講演会予稿集, pp 147-148 (1970)

(6) R.C.K.Lee: Optimal Estimation,Identification and Control;MIT Press (1964)

(7) K.J.Åström&T.Bohlin: Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records; Proceedings of the Second IFAC Symposium on the Theory of Self-Adaptive Control Systems(1955),pp96-111,Plenum Pub. Co. (1966)

(8) 茅: 伝達関数の推定; 計測と制御, 7-3, pp151-161 (1968)

(9) H.Akaike: On a Decision Procedure for System Identification;Preprints of Papers for IFAC Kyoto Symposium on Systems Engineering Approach to Computer Control, pp485-490 (1970)

(10) K.J.Åström: On the Achievable Accuracy in Identification Problems;Preprints of the IFAC Symposium on Identification in Automatic Control Systems, Prague (1967)

(11) T.Bohlin: On the Problem of Ambiguities in Maximum Likelihood Identification; Preprints of Second Prague IFAC Symposium on Identification& Process Parameter Estimation (1970)