数理解析研究所講究録
第131巻 1971年 44-56

Bordism algebras of periodic transformations

京大 数理研 島田信夫

表題は大きいが，ここで取扱うのはその極く一部分にすぎないことを先ずお断りしなければならない．

compact Lie groups のうちでも最も簡単な $S^1=U(1)$ およびその部分群 $\mathbb{Z}_n$ の differentiable action をもつ C^∞ 多様体の equivariant bordism group については，free actions の場合 Conner-Floyd [3], Conner [2], Su [12] Uchida [14], Kamata [5, 6] 等多くの人々によって論ぜられている．ここでは semi-free actions の場合の bordism の ring structure を主として述べたい．

§1. $\mathfrak{M}_*(S^i)$ $(i=1,3)$ の環構造

Conner-Floyd [3], Uchida [13] によって次の完全系列が知られている（実は split exact）:

(1.1) $\quad 0 \to \mathfrak{I}_*(Z_2) \xrightarrow{i} \mathfrak{M}_*(Z_2) \xrightarrow{\partial} \mathfrak{N}_*(Z_2) \to 0$

(1.2) $\quad 0 \to \mathcal{O}_*(S^1) \xrightarrow{i} \mathfrak{M}_*(S^1) \xrightarrow{\partial} \Omega_*(S^1) \to 0$

(1.3) $\quad 0 \to \mathcal{O}_*(S^3) \xrightarrow{i} \mathfrak{M}_*(S^3) \xrightarrow{\partial} \Omega_*(S^3) \to 0$

ここで，$\mathcal{I}_*(\mathbb{Z}_2)$ は unoriented manifolds with involution の bordism 群，$\mathcal{O}_*(S^i)$ $(i=1,3)$ は oriented manifolds with semi-free S^i-action の bordism 群，これらに対して，free involution および free S^i-action の場合をそれぞれ $\mathfrak{N}_*(\mathbb{Z}_2)$, $\Omega_*(S^i)$ で表わす．また $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2)=\sum_{k\geq 0}\mathfrak{N}_*(BO(k))$, $\mathcal{M}_*(S^1)=\sum_{k\geq 0}\Omega_*(BU(k))$, $\mathcal{M}_*(S^3)=\sum_{k\geq 0}\Omega_*(BSp(k))$.

これらの三つの完全系列の間には，その形の如く analogy が存在し統一的に論ずることが出来る．

定理(1.4)． F で，実数体 R，複素数体 C，四元数体 H のどれか一つを表わす．$d=\dim_R F$．$FP(n)$ は射影空間とする．このとき，1) $\mathfrak{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ ($\Omega_*(S^{d-1})$, $d-1=1,3$) は $\mathfrak{N}_*$ (Ω_*) 上の free module，生成系は $\{\alpha_{dn-1}=[S^{dn-1},T];\ n\geq 1\}$ で与えられる．ただし $T: S^{d-1}\times S^{dn-1}\to S^{dn-1}$ は，$S^{dn-1}\subset F^n$ (単位球面) として，scalar 積． 2) $\mathcal{M}_*(\mathbb{Z}_2)\approx\mathfrak{N}_*[\theta_0,\theta_1,\cdots]$, $\mathcal{M}_*(S^i)\approx\Omega_*[\theta_0,\theta_1,\cdots]$ $(i=1,3)$ は，それぞれ，Thom ring $\mathfrak{N}_*$, Ω_* 上の多項式環，$\theta_n=[\eta_n\to FP(n)]$ で η_n は canonical line bundle を表わす．

証) 1) はよく知られている．2) について $\mathcal{M}_*(S^1)$ の場合の証明を書く．他の場合も類似である．

v.bundle の Whitney sum を導びく写像 $\varphi: BU(k)\times BU(\ell)\to BU(k+\ell)$ によって"積"

$$H_i(BU(k);\mathbb{Z}) \otimes H_j(BU(l);\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{i+j}(BU(k+l);\mathbb{Z})$$

$$\Omega_i(BU(k)) \otimes \Omega_j(BU(l)) \longrightarrow \Omega_{i+j}(BU(k+l))$$

が induce され，$\sum_{k\geq 0} H_*(BU(k);\mathbb{Z})$ および $\mathfrak{M}_*(S^1)=\sum_{k\geq 0}\Omega_*(BU(k))$ は環構造をもつ．このとき自然写像 μ (Conner-Floyd [3])：$\sum \Omega_*(BU(k)) \to \sum H_*(BU(k);\mathbb{Z})$ は環としての準同型写像となる．$\theta_n=[\eta_n \to CP(n)] \in \Omega_{2n}(BU(1))$ の像を $a_n=\mu(\theta_n)=\{CP(n)\}\in H_{2n}(CP(\infty);\mathbb{Z})=H_{2n}(BU(1);\mathbb{Z})$ とおけば，$\{a_n\ ;n\geq 0\}$ は $H_*(BU(1);\mathbb{Z})$ の additive base をつくる．$\mathfrak{M}_*(S^1)\approx\Omega_*[\theta_0,\theta_1,\cdots]$ を証明するためには，$\{\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}\ ;0\leq i_1\leq\cdots\leq i_k\}$ が $\Omega_*(BU(k))$ の Ω_*-base であることを示せば十分である．そのためには $\mu(\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k})=a_{i_1}\cdots a_{i_k}$ が $H_*(BU(k);\mathbb{Z})$ の additive base であることを言えばよい (Conner-Floyd [3], Th. 18.1)．一方 $H^*(BU(k);\mathbb{Z})$ は写像 $f:\underbrace{CP(\infty)\times\cdots\times CP(\infty)}_{k\text{個}}\to BU(k)$, $f^*(\gamma_k)=\eta\times\cdots\times\eta$ によって $H^*(CP(\infty)\times\cdots\times CP(\infty);\mathbb{Z})=\mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_k]$ における対称式の部分環に同型に写される．$\omega=(i_1,i_2,\cdots,i_k)$, $0\leq i_1\leq\cdots\leq i_k$ に対して $s_\omega=\sum x_1^{i_1}\cdots x_k^{i_k}$ (無駄のない対称和) とおけば，$\{s_\omega\ ;\omega=(i_1,\cdots,i_k),\ 0\leq i_1\leq\cdots\leq i_k\}$ が $f^*(H^*(BU(k);\mathbb{Z}))\approx H^*(BU(k);\mathbb{Z})$ の additive base となる．$a_\omega=a_{i_1}\cdots a_{i_k}=f_*\{CP(i_1)\times\cdots\times CP(i_k)\}$ であるから，容易に次を得る (Milnor [7])，

$$\langle s_\omega, a_\omega\rangle=\langle x_1^{i_1},\{CP(i_1)\}\rangle\cdots\cdots\langle x_k^{i_k},\{CP(i_k)\}\rangle$$

$$
= \begin{cases} 0 & (\omega' \neq \omega) \\ 1 & (\omega' = \omega) \end{cases} \qquad \text{q.e.d.}
$$

§2. $\mathcal{O}_*(S^i)$ $(i=1,3)$ の環構造

Alexander [1] は (1.1) を利用して $\mathfrak{N}_*(\mathbb{Z}_2)$ の環構造を調べた. ただし彼は $\mathfrak{M}_*(\mathbb{Z}_2)$ の構造を full には用いていない. 定理(1.4) を使えば, より簡単に $\mathfrak{N}_*(\mathbb{Z}_2)$, $\mathcal{O}_*(S^i)$ の環構造が導びかれる. $\mathcal{O}_*(S^1)$ の場合を述べよう.

完全系列 (1.2)

$$
0 \to \mathcal{O}_*(S^1) \xrightarrow{\nu} \mathfrak{M}_*(S^1) \xrightarrow{\partial} \Omega_{*-1}(S^1) \to 0
$$

において, ν は ring homomorphism で, $\nu[M^n, T] = \sum_i [\nu_{F_i} \to F_i]$ で与えられる. F_i は T の fixed pt set F_T の連結成分で oriented closed submanifold, ν_{F_i} は M^n における normal bundle. また $\partial[\xi \to M] = [S(\xi), T]$, ここで $S(\xi) = \partial D(\xi)$ は disk bundle $D(\xi)$ の境界である, T は標準的な fiber-preserving $U(1)$-action. 従って特に

(2.1) $\qquad \partial\theta_n = [S^{2n+1}, T_0] = \alpha_{2n+1}, \quad \partial\theta_0^{\,n} = \alpha_{2n-1}$.

つぎに $\sigma_n = [CP(n+1), T]$, $n \geq 1$, を $T(s; (z_0, \cdots, z_{n+1})) = (sz_0, sz_1, \cdots, sz_n, z_{n+1})$ で定義すれば

(2.2) $\qquad \nu(\sigma_n) = \theta_n - \theta_0^{\,n+1} \qquad (n \geq 1)$.

さらに Ω_*-map

(2.3) $\qquad \Gamma : \mathcal{O}_*(S^1) \to \mathcal{O}_{*+2}(S^1)$

を次の様に定義する (Conner-Floyd [3], p. 94).

T_0 を D^2 上の標準的な S^1-action とするとき，semi-free S^1-action をもった多様体 (M^n, T) に対して，equivariant diffeomorphism $\varphi : (S^1\times M^n, T_0\times 1) \to (S^1\times M^n, T_0\times T)$，$\varphi(s, x) = (s, sx)$，によって境界を貼り合わせて得られた多様体を

(2.4) $\Gamma(M^n, T) = (\tilde{M}^{n+2}, \tilde{T}) = (-D^2\times M^n, T_0\times 1)_1 \cup_\varphi (D^2\times M, T_0\times T)_2$

とおく，これは自然な S^1-action $\tilde{T}$ をもつ．

このとき，fixed pt. set は $F_{\tilde{T}} = (\{0\}\times M^n)_1 \cup (\{0\}\times F_T)_2$ であり，

(2.5) $\nu[\tilde{M}^{n+2}, \tilde{T}] = \nu[M^n, T]\cdot\theta_0 - [M^n]\cdot\theta_0$

が成り立つ．記号

$$\iota : \mathfrak{M}_n(S^1) \to \mathfrak{M}_{n+2}(S^1) \qquad \iota(x) = x\cdot\theta_0\ ,$$

$$\varepsilon : \mathcal{O}_n(S^1) \to \Omega_n \qquad , \quad \varepsilon[M^n, T] = [M^n]\ ,$$

$$\tau : \Omega \to \mathfrak{M}_{n+2}(S^1) \qquad \tau[M^n] = [M^n]\cdot\theta_0$$

を用いて (2.5) を書き直すと

(2.6) $\nu\Gamma = \iota\nu - \tau\varepsilon$.

補題 (2.7). $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\cdot b + \varepsilon(a)\Gamma(b)$

$= a\cdot\Gamma(b) + \varepsilon(b)\Gamma(a)$ for $a, b \in \mathcal{O}_*(S^1)$

証) (2.6) から容易に従う

定理 (2.8). $\mathcal{O}_*(S^1)$ は生成系 $\{\Gamma^\ell(\sigma_{j_1}\cdots\sigma_{j_k})\ ;\ \ell\geq 0, 1\leq j_1\leq\cdots\leq j_k\}\cup\{1\}$ をもつ free Ω_*-module で，その環構造は，多項式環 $\Omega_*[\Gamma^\ell(\sigma_{j_1}\cdots\sigma_{j_k})\ ;\ \ell\geq 0,\ 1\leq j_1\leq\cdots\leq j_k]$ の，関係式 (2.7) から生成された ideal I による商として与えられる．$\mathcal{O}_*(S^3)$ についても同様．

証) (2.5) に注意すれば, $\mathfrak{M}_*(S^1)$ の monomials に適当な順序を入れて $\nu(\Gamma^\ell(\sigma_{j_1}\cdots\sigma_{j_k})) = \theta_0^\ell\theta_{j_1}\cdots\theta_{j_k}$ + lower terms が成り立つ. $\{\theta_0^\ell\theta_{j_1}\cdots\theta_{j_k}\}$ が $\mathfrak{M}_*(S^1)$ の Ω_*-base であることから定理が従う.

§3. $\mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3)$ について

p を奇素数として, $\mathbb{Z}_p$-action の場合, とくに $p=3$ の場合を主として取り扱う. 次の完全系列が知られている (Conner [2], Wu [15])

(3.1) $$0 \to \Omega_* \xrightarrow{i_*} \mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\nu} \mathfrak{M}_*(\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial} \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_p) \to 0$$

ここで $\mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_p)$ は前と同様に (semi-free) $\mathbb{Z}_p$-actions の bordism 群, $\mathfrak{M}_*(\mathbb{Z}_p) = \mathfrak{M}_*(S^1)\otimes_{\Omega_*}\cdots\otimes_{\Omega_*}\mathfrak{M}_*(S^1)$ ($\frac{p-1}{2}$ 個の tensor 積), $\Omega_*(\mathbb{Z}_p)$ を free $\mathbb{Z}_p$-actions の bordism 群, $\varepsilon : \Omega_*(\mathbb{Z}_p) \to \Omega_*$ を $\varepsilon[M^n, T] = [M^n/T]$ で定義するとき $\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_p) = \mathrm{Ker}\,\varepsilon$. $\mu_0 = [\mathbb{Z}_p, \sigma] \in \mathcal{O}_0(\mathbb{Z}_p)$ とするとき $i_*[M] = [M]\cdot\mu_0 = [M\times\mathbb{Z}_p, 1\times\sigma]$. ν, ∂ については前節におけると同様にして定義されたものである.

簡単のため以下 $p=3$ の場合を考える.

つぎの可換図式が成立する ([10] [15])

(3.2)
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{O}_*(S^1) & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{M}_*(S^1) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_*(S^1) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \lambda & & \lambda \downarrow \approx & & \downarrow \lambda & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega_* \xrightarrow{i_*} \mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3) & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{M}_*(\mathbb{Z}_3) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_3) & \to & 0
\end{array}$$

ここで λ は S^1-action を部分群 $\mathbb{Z}_3$ に restrict することにより得られる自然写像である.

このとき Conner-Floyd [3], §36, §46 により次のことが知られている：1) 写像 $\tilde{\lambda}: \Omega_*(S^1) \to \tilde{\Omega}_*(Z_3)$ は全射である，2) $\Omega_*(S^1) \approx \Omega_{*-1}(CP(\infty))$ は $\{ \alpha_{2n-1} = [S^{2n-1}, T] ; n \geq 1 \}$ で生成された free Ω_*-module である，3) ある oriented closed manifolds $M^4, M^8, \cdots, M^{4k}, \cdots$ の系列が存在して，

(3.3) $\quad \beta_{2n-1} = 3\alpha_{2n-1} + [M^4]\alpha_{2n-5} + [M^8]\alpha_{2n-9} + \cdots \qquad (n \geq 1)$

とおくとき $\{\beta_{2n-1} ; n \geq 1\}$ は $K = \mathrm{Ker}\,\tilde{\lambda}$ の生成系をつくる（関係式 β_{2n-1} における係数 $[M^{4k}] \in \Omega_{4k}$ は複素 cobordism における formal group law の係数と関係づけられる．柴田氏の講演および Miščenko [8] 参照）．

(3.4) $\quad \bar{\beta}_n = 3\theta_0^n + [M^4]\theta_0^{n-2} + [M^8]\theta_0^{n-4} + \cdots \qquad (n \geq 1)$

とおき，$\mathfrak{M}_*(Z_3)$ を同型 λ により $\mathfrak{M}_*(S^1)$ と同一視すれば，$\bar{\beta}_n$ は $\partial: \mathfrak{M}_*(Z_3) \to \tilde{\Omega}_*(Z_3)$ の核にぞくする．

(3.5) $\quad \partial(\bar{\beta}_n) = 0$.

従って完全系列 (3.1) から $\mu_n \in \mathcal{O}_*(Z_3)$ $(n \geq 1)$ が存在して $\nu(\mu_n) = \bar{\beta}_n$ となる．従ってつぎの定理を得る（Wu [15]）．

定理 (3.6) $\mathcal{O}_*(Z_3)$ は free Ω_*-module で $\Omega_*\{\mu_0, \mu_1, \cdots\}$ と $\lambda(\mathcal{O}_*(S^1))$ との直和に同型である．

つぎに $\mathcal{O}_*(Z_3)$ の積構造を調べよう．まず Ω_*-algebra としての生成系として $\{\mu_k \ (k \geq 0), \ \Gamma^\ell(\sigma_j) \ (\ell \geq 0, j \geq 1)\}$ がとれることは以上のことから明らかである．ただし $\lambda(\Gamma^\ell(\sigma_j))$

を単に $\Gamma^{\ell}(\sigma_j)$ とかくことにする。$\lambda : \mathcal{O}_*(S^1) \to \mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3)$ は中への環同型写像であり，$\mathrm{Im}\,\lambda \approx \mathcal{O}_*(S^1)$ は $\mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3)$ の subalgebra である。また $\mathrm{Im}\, i_* = \mathrm{Ker}\,\nu = \Omega_* \cdot \mu_0$ ($\mu_0 = [\mathbb{Z}_3, \sigma]$) は $\mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3)$ の ideal であり，実際 $\varepsilon : \mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3) \to \Omega_*$，$\varepsilon[M^n, \tau] = [M^n]$，として

$$(3.7) \qquad \mu_0 \cdot a = \varepsilon(a) \cdot \mu_0 \quad \text{for } a \in \mathcal{O}_*(\mathbb{Z}_3)$$

を得る。μ_n の間の関係を調べるため，μ_n の選び方を適当に固定しなければならない。まず (Conner [2])

$$(3.8) \qquad \mu_1 = [M^2, \tau_1]$$

とおく。ここで M^2 は，$CP(2)$ における代数曲線 $z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 = 0$ で，non-singular，genus $= 1$ である。$\tau_1(z_0, z_1, z_2) = (z_0, z_1, \rho z_2)$，$\rho = \exp(\frac{2\pi i}{3})$ とする。τ_1 の固定点は $(1, -1, 0)$，$(\rho, -1, 0)$，$(\rho^2, -1, 0)$ の三点であり，

$$(3.9) \qquad \nu(\mu_1) = 3\theta_0 .$$

つぎに

$$(3.10) \qquad \mu_2 = [CP(2), \tau_2]$$

を $\tau_2(z_0, z_1, z_2) = (z_0, \rho z_1, \rho^2 z_2)$ で定義する。τ_2 の固定点は $(1, 0, 0)$，$(0, 1, 0)$，$(0, 0, 1)$ の三点で

$$(3.11) \qquad \nu(\mu_2) = 3\theta_0^2 .$$

μ_n $(n \geqq 3)$ を定めるためつぎの準備をする。一般に (M^n, T) を S^1-action T をもつ oriented 閉多様体とするとき，T が semi-free でなくとも §2 におけると同様に Γ-operation

が定義される。これは任意のS^1-actionsのbordism群への作用となる。

$$(3.12) \qquad \Gamma[M^n, T] = [\tilde{M}^{n+2}, \tilde{T}].$$

またS^1-action T の restriction である Z_2-action $\lambda(T)$ をもつ多様体

$$(3.13) \qquad \lambda(M^n, T) = (M^n, \lambda(T))$$

も定義される $(\tilde{M}^{n+2}, \lambda(\tilde{T}))$ に対して $\lambda(\tilde{T})$ の固定点の集合は $F_{\lambda(\tilde{T})} = ((0)\times M^n)_1 \cup ((0)\times F_{\lambda(T)})$ であり、

$$(3.14) \qquad \nu[\tilde{M}^{n+2}, \lambda(\tilde{T})] = \nu[M^n, \lambda(T)]\cdot\theta_0 - [M^n]\cdot\theta_0$$

または、同値である

$$(3.15) \qquad \nu\lambda\Gamma = \tau\nu\lambda - \tau\varepsilon\lambda$$

が成り立つ。これから inductive に

$$(3.16) \qquad \nu\lambda\Gamma^n = \tau^n\nu\lambda - \sum_{i=0}^{n-1} \tau^{n-1-i}\tau\varepsilon\lambda\Gamma^i$$

を得る、いま μ_2 に対して S^1-action をもつ多様体

$$(3.17) \qquad (CP(2), T_2)$$

を、$T_2(e^{i\theta}; (z_0, z_1, z_2)) = (z_0, e^{i\theta}z_1, e^{2i\theta}z_2)$ で定義すれば、

$$(3.18) \qquad \lambda[CP(2), T_2] = [CP(2), \tau_2] = \mu_2$$

である。そこで

$$(3.19) \qquad \mu_n = \lambda\Gamma^{n-2}[CP(2), T_2] \qquad (n \geqq 2)$$

と定義する。このとき (3.16) から

$$(3.20) \qquad \nu(\mu_n) = 3\theta_0^{\,n} - \sum_{i=0}^{n-3} \varepsilon(\mu_{i+2})\theta_0^{\,n-2-i}$$

$$= 3\theta_0^{\,n} - \sum_{i=2}^{n-1} \varepsilon(\mu_i)\theta_0^{\,n-i}$$

を得る．これは (3.6) における $\nu(\mu_n)=\bar{\beta}_n$ の条件と多少くい違うが，(3.20) の右辺を改めて $\bar{\beta}_n$ と取り直しても $\{\bar{\beta}_n,\ n\geqq 1\}$ が $\partial:\Omega_*[\theta_i]\to\tilde{\Omega}_*(\mathbb{Z}_3)$ の kernel の free base を与えることは同じである．

以上の μ_n の定め方から，μ_n の間の関係式として

$$\mu_1^2 = 3\mu_2 - \varepsilon(\mu_2)\mu_0\ ,\quad \mu_1\mu_2 = 3\mu_3 + \varepsilon(\mu_2)\mu_1$$

$$(3.21)\qquad \mu_1\cdot\mu_n = 3\mu_{n+1} + \varepsilon(\mu_n)\mu_1 - \varepsilon(\mu_{n+1})\mu_0 \qquad (n\geqq 1)$$

$$\mu_2\cdot\mu_n = 3\mu_{n+2} + \varepsilon(\mu_n)\mu_2 + \varepsilon(\mu_{n+1})\mu_1 - \varepsilon(\mu_{n+2})\mu_0 \qquad (n\geqq 2)$$

等が両辺に ν および ε をほどこして比較することにより得られる．ただし $\varepsilon\,|\,\mathrm{Ker}\,\nu$ は単射であること，$\varepsilon(\mu_1)=0$，$\varepsilon(\mu_3)=0$ に留意．さらに同様にして

$$(3.22)\qquad \begin{aligned}\mu_1\cdot\Gamma^l(\sigma_i) &= 3\Gamma^{l+1}(\sigma_i) + \varepsilon(\Gamma^l(\sigma_i))\mu_1 - \varepsilon(\Gamma^{l+1}(\sigma_i))\mu_0\\ \mu_2\cdot\Gamma^l(\sigma_i) &= 3\Gamma^{l+2}(\sigma_i) + \varepsilon(\Gamma^l(\sigma_i))\mu_2 + \varepsilon(\Gamma^{l+1}(\sigma_i))\mu_1\\ &\quad - \varepsilon(\Gamma^{l+2}(\sigma_i))\mu_0\end{aligned}$$

が成り立つ．μ_n $(n\geqq 3)$，$\Gamma^l(\sigma_i)$ の間の関係として

$$(3.23)\qquad \begin{aligned}\mu_n\cdot\mu_m &= \mu_{n-1}\cdot\mu_{m+1} + \varepsilon(\mu_m)\mu_n - \varepsilon(\mu_{n-1})\mu_{m+1}\\ \mu_n\cdot\Gamma^l(\sigma_i) &= \mu_{n-1}\cdot\Gamma^{l+1}(\sigma_i) + \varepsilon(\Gamma^l(\sigma_i))\mu_n - \varepsilon(\mu_{n-1})\cdot\Gamma^{l+1}(\sigma_i)\end{aligned}\qquad (n\geqq 3)$$

があり，これらは形式的に $\mu_n=\Gamma(\mu_{n-1})$ とおいて (2.7) を適用したものに等しい．従って $\Theta_*(\mathbb{Z}_3)$ の積構造は essential には (2.7) により規定されていると考えてよい．勿論 (3.7)，(3.21)，(3.22) は別としての話である．

§4. 補足

これまで oriented manifold を考えたが，weak complex structure をもつ多様体とその structure と compatible な periodic transformation の bordism を考えても，以上に述べたことと類似なことが成り立つ．例えば完全系列の間の可換図式

$$
\begin{array}{ccccccccc}
(4.1) \quad 0 \to & \mathcal{O}_*^U(S^1) & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{M}_*^U(S^1) & \xrightarrow{\partial} & \Omega_*^U(S^1) & \to 0 & & \\
& \downarrow \lambda & & \downarrow \bar{\lambda} & & \downarrow \bar{\bar{\lambda}} & & & \\
0 \to \Omega_*^U \xrightarrow{i_*} & \mathcal{O}_*^U(Z_p) & \xrightarrow{\nu} & \mathfrak{M}_*^U(Z_p) & \xrightarrow{\partial} & \tilde{\Omega}_*^U(Z_p) & \to 0 & & (p:\text{素数})
\end{array}
$$

とか

$$\mathfrak{M}_*^U(S^1) = \sum_{k \geq 0} \Omega_*^U(BU(k)) \approx \Omega_*^U[\theta_0, \theta_1, \cdots]$$

$\theta_n = [\eta_n \to CP(n)]$，$\eta_n$ は canonical line bundle，

$\mathfrak{M}_*^U(Z_p) = \mathfrak{M}_*^U(S^1) \underset{\Omega_*^U}{\otimes} \cdots \underset{\Omega_*^U}{\otimes} \mathfrak{M}_*^U(S^1)$ （$p-1$ 個の tensor 積），

$\Omega_*^U(S^1) \approx \Omega_{*-1}^U(CP(\infty)) \approx \sum_{n \geq 1} \Omega_*^U \cdot \alpha_{2n-1}$ （free module），

$\tilde{\Omega}_*^U(Z_p) \approx \tilde{\Omega}_*^U(B_{Z_p})$ は p-torsion 等々

が成り立つ．$p=2$ ならば $\bar{\lambda}$ は同型写像であり，前節の方法で $\mathcal{O}_*^U(Z_2)$ の構造が同様に調べ得る．

$p=2$ の場合の (4.1) の下列の完全系列の応用として，吉田氏の講演における二つの命題を導いて見よう．

命題 (4.2)．$[M, T] \in \mathcal{O}_m^U(Z_2)$ とする．M における T の固定点集合の連結成分 F_i の normal bundle ν_{F_i} が trivial で，かつ $\dim_C \nu_{F_i}$ が一定数 n に等しいとする．このとき $F = \bigcup_i F_i$ とおけば，$[N], [L] \in \Omega_*^U$ が存在して

$$[F] = 2^n[N], \quad [M,T] = [N]\cdot[CP(1),\tau]^n + [L]\cdot[Z_2,\sigma]$$

が成り立つ. ここで $\tau(z_0,z_1) = (z_0,-z_1)$.

証) 命題の仮定から $\nu[M,T] = [F]\cdot\theta_0^n$ であり $\partial\theta_0^n = \bar{\alpha}_{2n-1} = [S^{2n-1},a]$ (aは標準的な involution) から $[F]\cdot[S^{2n-1},a] = 0$ in $\hat{\Omega}_*^U(Z_2)$. $[S^{2n-1},a]$ の order は 2^n であり (Kamata [5]), $\hat{\Omega}_*^U(Z_2)$ の生成系 $\{\bar{\alpha}_{2n-1};\ n \geq 1\}$ の間の relations も知られている([5]). それによって $[F] = 2^n[N]$ となる $[N] \in \Omega_*^U$ が存在する. 第2の関係式は両辺に ν, ε をほどこす前節の方法で容易に示される.

命題(4.3). $n(\geq 4)$ を偶数. S_n を $CP(2)$ における代数曲線 $z_0^n + z_1^n + z_2^n = 0$ とする(これは non-singular). $\tau'(z_0,z_1,z_2) = (z_0,z_1,-z_2)$ とするとき,

$$[S_n,\tau'] = \frac{n}{2}[CP(1),\tau] - \frac{n(n-2)}{4}[CP(1)]\cdot[Z_2,\sigma].$$

証) τ' の固定点は $\omega = e^{\frac{\pi i}{n}}$ とするとき $(1,\omega^{2j-1},0)$, $j=1,\cdots,n$, の n 個の点である($k = \frac{n}{2}$ とおく). 従って, $\nu[S_n,\tau'] = 2k\theta_0$.

一方 τ の固定点は $(1,0)$, $(0,1)$ の二点. $\nu[CP(1),\tau] = 2\theta_0$. 従って $[S_n,\tau'] - \frac{n}{2}[CP(1),\tau] \in \mathrm{Im}\, i_*$. また S_n の genus $= \frac{(n-1)(n-2)}{2} = (2k-1)(k-1) = 1-3k+2k^2$. $\chi(S_n) = 2(3k-2k^2)$. それ故

$\varepsilon[S_n,\tau'] = [S_n] = (3k-2k^2)[CP(1)]$ in Ω_*^U. 従って

$$\varepsilon\left([S_n,\tau'] - \frac{n}{2}[CP(1),\tau]\right) = k(2-2k)[CP(1)] = \frac{-n(n-2)}{2}[CP(1)]$$

$$\varepsilon[Z_2,\sigma] = 2, \quad \varepsilon|\mathrm{Im}\, i_* \text{ は単射}$$

であるから求める等式を得る.

参考文献

[1] J. C. Alexander, The bordism ring of manifolds with involution, Technical Report, Univ. of Maryland (1970)

[2] P. E. Conner, Seminar on periodic maps, Lect. Notes in Math. No. 46, Springer. 1967.

[3] P. E. Conner and E. E. Floyd, Differentiable periodic maps, Ergebnisse der Math., Vol. 33, Springer, 1964.

[4] ——————, Maps of odd period, Ann. of Math. 84 (1966)

[5] M. Kamata, The structure of bordism group $U_*(BZ_p)$, Osaka J. Math 7 (1970)

[6] ——————, On the ring structure of $U_*(BU(1))$, (to appear)

[7] J Milnor, Lectures on characteristic classes, Princeton Univ. 1957

[8] A. S. Miščenko, Bordisms with the action of the group Z_p and fixed points, Mat. Sbornik Tom 80 (1969), 英訳 Math. USSR Sbornik 9 (1969)

[9] E. Ossa, Cobordismustheorie von Fixpunktfreien und Semifreien S^1-Mannigfaltigkeiten, Thesis, Univ. zu Bonn (1969)

[10] N. Shimada and C.-M. Wu, Bordism algebra of semi-free S^1-actions, (to appear)

[11] R. E. Stong, Bordism and involutions, Ann. of Math. 90 (1969)

[12] J. C. Su, A note on the bordism algebra of involutions, Michigan Math. J. 12 (1965)

[13] F. Uchida, Cobordism groups of semi-free S^1-and S^3-actions, Osaka J. Math 7 (1970)

[14] ——————, Bordism algebra of involutions, Proc. Japan Acad. 46 (1970)

[15] C.-M. Wu, Bordism and maps of odd period, Osaka J. Math (to appear)