数理解析研究所講究録
第132巻 1971年 14-32

二点接続問題に現われる差分方程式について

広島大学 理学部 河野實彦

1. 序. 複素平面上にいくつかの特異点をもつ微分方程式の global な性質を解析するにあたり, 我々は何らかの形の差分方程式に出会うはずである。例へば, いま複素全平面上に, 二つの特異点 ($t=0$, $t=\infty$) をもつ線型微分方程式について考察するとしよう。特異点が, どちらも確定特異点であれば, その微分方程式は Euler 型微分方程式と呼ばれ, もはや我々の研究対象にはならない。そこで一つを ($t=\infty$) を不確定特異点とすれば, そのときの一般型は, 次の形をしている。

$$(1)\qquad t^n \frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{gl} a_{l,r}\, t^r\right) t^{n-l}\frac{d^{n-l}x}{dt^{n-l}}$$

$a_{l,r}$: 複素定数

この微分方程式に対する global な性質を調べる

問題は，複素領域における微分方程式を研究する者にとっては，長年の懸案であった。さて，局所的理論によれば，確定特異点である原点の近傍においては

$$(2)\qquad x_j(t)=t^{\rho_j}\sum_{m=0}^{\infty}G_j(m)t^m \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

なる形の収束巾級数解が存在し，それらが基本解を構成している事を知る。また，一方不確定特異点 $t=\infty$ の近傍においては，原点に頂点を持ち，中心角が $\frac{\pi}{q}$ を越えないような任意の扇形領域 S において，基本解 $\{x_S^k(t)\ :\ k=1,2,\ldots,n\}$ が存在し，その各々の解の扇形領域 S での挙動は，次の様な漸近関係により記述される。

$$(3)\qquad x_S^k(t)\cong x^k(t) \qquad \text{as } t\to\infty \text{ in } S$$

ここで，$x^k(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$ は微分方程式 (1) の形式解で，

$$(4)\qquad x^k(t)=\exp\left(\frac{\lambda_k}{q}t^q+\frac{\alpha_{q-1}^k}{q-1}t^{q-1}+\cdots+\alpha_1^k t\right)t^{\mu_k}\sum_{s=0}^{\infty}h^k(s)t^{-s}$$

なる形を有す。右辺の級数は発散級数である。

上の結果から，それぞれの特異点の近傍における微分方程式 (1) の解の行動は知る事が出来る訳である。

ところで，その際，当然，特性定数 ρ_j，λ_k $\alpha^k_{q-1},\dots,\alpha^k_1$ μ_k の値や，巾級数展開式中の係数 $G_j(m)$，$h^k(s)$ に関する情報も必要であるが，それが差分方程式を通して与えられるのである。即ち，収束巾級数解においては，特性定数 ρ_j は n 次代数方程式

$$(5)\qquad [\rho]_n - \sum_{l=1}^{n} a_{l,0}\,[\rho]_{n-l} = 0\ ,\qquad [\rho]_p = \rho(\rho-1)\cdots(\rho-p+1),$$

の根であり，係数 $G_j(m)$ は qn 階差分方程式

$$(6)\quad \begin{cases} [m+\rho_j]_n\, G_j(m) = \displaystyle\sum_{l=1}^{n}\sum_{r=0}^{ql} a_{l,r}\,[m-r+\rho_j]_{n-l}\ G_j(m-r) \\ G_j(0)=1\ ,\quad G_j(-m')=0\quad (m'=1,2,\dots,qn-1) \end{cases}$$

の解と見なすことが出来る。

形式解(4)については，特性定数 λ_k，$\alpha^k_{q-1},\dots,\alpha^k_1$，$\mu_k$ の決定方法については後程説明するとして，発散級数の係数 $h^k(s)$ はやはりある差分方程式の解とみなすことが出来るが，話は少々厄介である。と言うのは，形式解(4)を直接微分方程式(1)に代入すれば，係数 $h^k(s)$ に関する式が得られるというのが原理であるが，ガウスならざる者には，その方法ではその関係式を見つけ出すことが出来ない。そこで，少し工夫をして，次の二つの差分方程式で

係数 $h^k(s)$ の関係式を表わすことにする。

(7) $$h^k(s) \equiv h_0^k(s) \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

(8) $$h_p^k(s) = \lambda_k h_{p-1}^k(s) + \alpha_{q-1}^k h_{p-1}^k(s-1) + \cdots + \alpha_1^k h_{p-1}^k(s-q+1) + (\mu_k - s + (q-1)p+1)\, h_{p-1}^k(s-q) \qquad (p=1,2,\dots,n)$$

(9) $$h_n^k(s) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{r=0}^{ql} a_{l,r}\, h_{n-l}^k(s+r-ql)$$

(8)を「第一差分方程式」，(9)を「第二差分方程式」と名づけておこう。そうすると，第一差分方程式から $h_p^k(s)$ と $h^k(s)$ の関係式が得られ，それを第二差分方程式に代入して得られた式が，係数 $h^k(s)$ のみたす差分方程式ということになる。しかも初期条件 $h^k(0)=1$，$h^k(s')=0$（$s'=-1,-2,\dots,-qn$（注）実際は $-q(n-1)+1$ まで）を課せれば，結局 $h^k(s)$ は(8)(9)から得られた差分方程式の一つの特殊解とみなせる訳である。

微分方程式の大域論の話に戻って，微分方程式(1)の global な性質を解明するには，各特異点の近傍で定義される解の間の関係を調べれば良い。収束巾級数解 $x_j(t)$ と不確定特異点の近傍における解 $x_S^k(t)$ の間には，扇形領域 S においては，

線形結合の関係式

$$(10)\qquad x_{\mathfrak{S}}^{k}(t) = \sum_{j=1}^{n} C^{(j,k)}(\mathfrak{S})\, x_j(t) \qquad in\ \mathfrak{S}$$

$$(k=1,2,\ldots,n)$$

が成立つはづである。係数 $C^{(j,k)}(\mathfrak{S})$ は扇形領域 $\mathfrak{S}$ には依存して変わるが、定数である。

では、一体、定数 $C^{(j,k)}(\mathfrak{S})$ を如何にして決定してやれば良いか、それが大問題なのである。詳しい説明は省くが、その決定を、$G_j(m)$ と $h^k(s)$ とに委ねようというのが我々の研究目的であった。(参照 [1] [2])

天下り的であるが、いま q 階の差分方程式

$$(11)\qquad (m+\rho_j-\mu_k)\, g^{(j,k)}(m) = \alpha_1^k\, g^{(j,k)}(m-1) + \alpha_2^k\, g^{(j,k)}(m-2) + \cdots + \alpha_{q-1}^k\, g^{(j,k)}(m-q+1) + \lambda_k\, g^{(j,k)}(m-q)$$

$$(j,k=1,2,\ldots,n)$$

を導入して、その基本解を

$$(12)\qquad g_1^{(j,k)}(m),\ g_2^{(j,k)}(m),\ \ldots,\ g_q^{(j,k)}(m)$$

と表わし、形式的に

$$(13)\qquad f_l^{(j,k)}(m) = \sum_{s=0}^{\infty} h^k(s)\, g_l^{(j,k)}(m+s), \qquad (l=1,2,\ldots,q)$$

なる関数を定義してみよう。すると第一，第2差分方程式と(11)式とから，容易に $f_l^{(j,k)}(m)$ が係数 $G_j(m)$ のみたす差分方程式(6)の特殊解となっていることがわかるのである。即ち各 j に対して gn コの特殊解が得られたという訳であるが，それらが更に，基本解をなす事を証明出来れば，$G_j(m)$ は $f_l^{(j,k)}(m)$ の一次結合

$$(14) \qquad G_j(m) = \sum_{l=1}^{g} \sum_{k=1}^{n} \mathcal{P}_l^{(j,k)} f_l^{(j,k)}(m)$$

$$(j=1, 2, \ldots, n)$$

として表わされる。ここで定数 $\mathcal{P}_l^{(j,k)}$ は上式で，$m=0, -1, -2, \ldots, -gn+1$ とおいた線型連立方程式を解くことによって決定出来，しかも最終的には，その定数 $\mathcal{P}_l^{(j,k)}$（Stokes 係数と呼ぶ）から，関係式(10)の係数も決定する事が出来るのである。

そこで，我々は関数 $f_l^{(j,k)}(m)$ が実際，well-defined であるかどうか，また各 j に対して gn コの関数が基本解をなすかどうか，調べなければならない。そのためには差分方程式(11)の解 $g_l^{(j,k)}(m)$ の m が充分大なるところでの挙動，第一，第二差分方程式(8)(9)から，$t^l(s)$ の s が充分

大なるときの挙動を綿密に解明する事を余儀なくされる。この拙論では形式解の係数 $h^k(s)$ の挙動に関する解析についてのみ，少し説明しよう。

2. 係数 $h^k(s)$ の漸近行動。

先ず，第一差分方程式 (8) によって，$h_p(s)$（以下，添数 k を書かない。対応する特性定数についても同様に。）が，$h(s)$ によって如何に表現されるかを考えよう。

容易に推測され得る事であるが，p が 1 増すごとに s については q ほど下った項を含むようになるので次の様な形に表現出来るであろう。

$$(15) \qquad h_p(s) = \sum_{\nu=0}^{qp} M(p:\nu:s)\, h(s-\nu)$$

ここで，係数 $M(p:\nu:s)$ を求めたいのであるが，そのためこれを第一差分方程式 (8) に代入し，$h(s-\nu)$ の係数を比較すると，次の三つの場合が起る。

(I) $0 \leqq \nu \leqq q-1$ のとき

$$\begin{aligned} M(p:\nu:s) = {} & \lambda\, M(p-1:\nu:s) \\ & + \alpha_{q-1}\, M(p-1:\nu-1:s-1) \\ & \vdots \\ & + \alpha_{q-\nu}\, M(p-1:0:s-\nu). \end{aligned}$$

(II) $q \leqq \nu \leqq q(p-1)$ のとき

$$M(p:\nu:s) = \lambda M(p-1:\nu:s) + \alpha_{q-1} M(p-1:\nu-1:s-1)$$
$$+ \cdots + \alpha_1 M(p-1:\nu-q+1:s-q+1)$$
$$+(\mu-s+(q-1)p+1) M(p-1:\nu-q:s-q)$$

(III) $q(p-1) < \nu \leqq qp$ のとき

$$M(p\cdot\nu\cdot s) = \alpha_{qp-\nu} M(p-1:q(p-1):s-\nu+q(p-1))$$
$$+ \cdots + \alpha_1 M(p-1:\nu-q+1 \quad s-q+1)$$
$$+(\mu-s+(q-1)p+1) M(p-1:\nu-q:s-q)$$

またまた、差分方程式になってしまったが、これを解くことによって、$M(p:\nu:s)$が決まるので解かざるを得ない。(I)の場合は、非斉次差分方程式で、その解は

$$(16) \qquad M(p:\nu:s) = \lambda^p + \lambda^p \mathop{S}_{j=1}^{p} \frac{\sum_{i=1}^{\nu} \alpha_{q-i} M(j-1:\nu-i:s-i)}{\lambda^j}$$

で与えられる。Sは和記号である。

この事から、表現式(15)の最初のq項の係数$M(p:\nu:s)$ $(0 \leqq \nu \leqq q-1)$はsには依存せず、特性定数のみで表わされる定数であることがわかる。

また $q \leqq \nu \leqq q(p-1)$ のときは (16)により決まった値から順次

$$(17)\quad M(p:\nu:s) = \lambda^p + \lambda^p \sum_{j=1}^{p} \frac{\sum_{i=1}^{q-1} \alpha_{q-i} M(j-1:\nu-i:s-i)}{\lambda^j} + \lambda^p \sum_{j=1}^{p} \frac{(\mu-s+(q-1)j+1)\, M(j-1:\nu-q:s-q)}{\lambda^j}$$

によって与えられる。更に $q(p-1) < \nu \leqq qp$ なる ν に対しては (III)式，それ自身が $M(p:\nu:s)$ の値を決めて行く。こうして係数 $M(p:\nu:s)$ が求められるが後の解析には，そのexplicitな値を必要としない。（勿論，求める事は容易でない!!） ただ，s が大きいときの，その挙動を知れば良い。その結果は次の通り。

補助定理1

$$(18)\quad \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^k} M(p.kq:s) = (-1)^k \lambda^{p-k} \binom{p}{k} \qquad (0 \leqq k \leqq p)$$

$$(19)\quad \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^k} M(p:kq+i:s) = C^{p}_{kq+i} \ (= \text{constant})$$

$$(1 \leqq i \leqq q-1,\quad 0 \leqq k \leqq p-1)$$

証明 p と k に関する数学的帰納法によって証明する。

$p=1$ の場合には，第一差分方程式より

$$M(1:0:s)=\lambda,\quad M(1:1:s-1)=d_{q-1},\ \ldots,\ M(1:q-1:s-q+1)=d_1$$

$$M(1:q:s-q)=(\mu-s+q)$$ であり，(18)(19)式が

$p=1,\ k=0$ に対して成立っていることは明らかである。

更に，$p=1,\ k=1$ の場合にも (18)式が成立つ。

今，$p-1$ までに対して (18)(19)式が成立つと仮定して，p の場合に証明する。

$k=0$ のときは，$M(p:0:s)=\lambda^p$ であり，かつ $M(p:\nu:s)$ $(1\leqq \nu\leqq q-1)$ は s には依存しない定数であるから，明らか。

$k=1$ のとき，即ち $\nu=q$ のとき (17)式より

$$(20)\qquad \frac{1}{s}M(p:q:s)=\frac{1}{s}\left\{\lambda^p+\lambda^p\sum_{j=1}^{p}\frac{\sum_{i=1}^{q-1}d_{q-i}\,M(j-1:q-i:s-i)}{\lambda^j}\right\}$$

$$+\lambda^p\sum_{j=1}^{p}\frac{\mu-s+(q-1)j+1}{s}\ \frac{M(j-1:0:s-q)}{\lambda^j}$$

となるが，右辺の大括弧の式は s に依らないので

$$(21)\qquad \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}M(p:q:s)=\lambda^p\sum_{j=1}^{p}(-1)\frac{\lambda^{j-1}}{\lambda^j}=(-1)\lambda^{p-1}\binom{p}{1}$$

を得る。以下，$\nu=q+i$ $(1\leqq i\leqq q-1)$ のときは (17)式の右辺に現われる $M(j-1:\nu-1:s-i)$ の位数は高々 1 であり，特に最後の和分に現われる $M(j-1:\nu-q:s-q)$ は定数であるから

$$(22)\qquad \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s}M(p:q+i:s)=C^{p}_{q+i}\quad(=\mathrm{const})$$

となる。 次は k に対して (18)(19) が成立つと仮定して，$k+1$ に対してもそれらが成立つ事を示す。

$1\leqq k<p-2$ のとき やはり (17) 式によって

$$(23)\qquad \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{k+1}}M(p:(k+1)q+i:s)$$

$$=\lambda^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{\sum_{l=1}^{q-1}\alpha_{q-l}}{\lambda^{j}}\left(\lim_{s\to\infty}\frac{M(j-1:(k+1)q+i-l:s-l)}{s^{k+1}}\right)$$

$$+\lambda^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{(-1)}{\lambda^{j}}\left(\lim_{s\to\infty}\frac{M(j-1:kq+i:s-q)}{s^{k}}\right)$$

を得るが，特に上式で $i=0$ のときは，右辺の二項目のみかる

$$(24)\qquad \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{k+1}}M(p:(k+1)q:s)$$

$$=\lambda^{p}\sum_{j=1}^{p}\frac{(-1)}{\lambda^{j}}(-1)^{k}\lambda^{j-1-k}\binom{j-1}{k}=(-1)^{k+1}\lambda^{p-k-1}\binom{p}{k+1}$$

これによって，$1\leqq i\leqq q-1$ のときは，仮定の p 以下に対して成立つ (19) 式によって，(23) の右辺は定数である事がわかる。

$k=p-2$ のときは (17) 式により (24) は得られるが

$\nu=(k+1)q+i=(p-1)q+i$ に対しては (Ⅲ) 式を用いなければならない。しかるにその時は

$$(25)\quad \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{k+1}}M(p:(k+1)q+i:s)$$

$$=\alpha_{q-i}\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{k+1}}M(p-1:q(p-1):s-1)+\cdots$$

$$+\alpha_1\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^{k+1}}M(p-1:(k+1)q+i-(q-1):s-q+1)$$

$$+\lim_{s\to\infty}\left(\frac{\mu-s+(q-1)p+1}{s}\quad\frac{M(p-1:kq+i:s-q)}{s^k}\right)$$

より, $1\leqq i\leqq q-1$ なる限り, 定数である事がわかる。

特に (25) で, $k=p-1$, $i=0$ とおけば

$$(26)\quad \lim_{s\to\infty}\frac{M(p:pq:s)}{s^p}=\lim_{s\to\infty}\left(\frac{\mu-s+(q-1)p+1}{s}\quad\frac{M(p-1:q(p-1):s-q)}{s^{p-1}}\right)$$

$$=(-1)^{p-1}$$

となる。以上により補助定理1が証明された。

さて, $h_p(s)$ の $h(s)$ による表現式を第二差分方程式に代入して, $h(s)$ に関する差分方程式を求めよう。

$\nu>qp$, $\nu<0$ のとき $M(p.\nu:s)\equiv 0$, $r>ql$, $r<0$ のとき $a_{l.r}\equiv 0$ と約束しておけば

$$(27)\quad \sum_{\nu=0}^{nq}\left\{M(n:\nu:s)-\sum_{r=0}^{nq}\sum_{l=1}^{n}a_{l,ql-r}M(n-l:\nu-r:s-r)\right\}h(s-\nu)=0$$

を得るが、これが形式解の係数 $h^k(s)$ のみたす差分方程式である。しかし 上式で $\nu=0,1,\ldots,q-1$ に対応する係数は 0 なのである。と言うのは、$h(s)$ の係数

$$(28)\quad F(\lambda)\equiv M(n:0:s)-\sum_{l=1}^{n}a_{l,ql}M(n-l:0:s-r)$$

$$=\lambda^n-\sum_{l=1}^{n}a_{l,ql}\lambda^{n-l}=0$$

は、特性定数 λ_k を決める方程式であり、更に $h(s-\nu)$ $(1\leqq\nu\leqq q-1)$ の係数が 0 となる式

$$(29)\quad M(n:\nu:s)-\sum_{r=0}^{\nu}\sum_{l=1}^{n}a_{l,ql-r}M(n-l:\nu-r:s-r)=0$$

からは、特性定数 $\alpha^k_{q-\nu}$ の値が決定される。また $h(s-q)$ の係数で $s=q$ のとき 0 とおいた式

$$(30)\quad M(n:q:q)-\sum_{r=0}^{q}\sum_{l=1}^{n}a_{l,ql-r}M(n-l:q-r:q-r)=0$$

は 特性定数 μ_k を決めるものである。これらは、形式解の係数 $h^k(s)$ が差分方程式(27)を満たし初期条件 $h^k(0)=1$, $h^k(s)=0$ $(s<0)$ をみたす特殊解であるとすることから 必然的に導かれるのである。

結局 差分方程式(27)は見かけ上は qn 階であったが、実は $q(n-1)$ 階差分方程式である。その最高階の係数は explicit に求められる。それは簡単で、$M(p:\nu:s)$ $(0 \leqq p \leqq q-1)$ は定数である事を考慮し、(30)式との関連から、

$$(31)\quad M(n:q:s)-\sum_{r=0}^{q}\sum_{l=1}^{n} a_{l,ql-r}\, M(n-l:q-r:s-r)$$

$$= M(n:q:s)-M(n:q:q)-\sum_{l=1}^{n} a_{l,ql}\Big(M(n-l:q:s-r)-M(n-l:q:q-r)\Big)$$

$$= \lambda^{n}\mathop{S}_{j=1}^{n}\frac{(q-s)\lambda^{j-1}}{\lambda^{j}}-\sum_{l=1}^{n} a_{l,ql}\,\lambda^{n-l}\mathop{S}_{j=1}^{n-l}\frac{(q-s)\lambda^{j-1}}{\lambda^{j}}$$

$$= (q-s)\left\{\lambda^{n-1}\binom{n}{1}-\sum_{l=1}^{n} a_{l,ql}\,\lambda^{n-l-1}\binom{n-l}{1}\right\} = (q-s)F'(\lambda)$$

となる。上の計算では(17)式を用いてある。

さらに、各係数の s が大きいときの挙動も補助定理1から知ることが出来る。

<u>補助定理 2.</u> 差分方程式(27)において $q+2 \leqq \nu \leqq nq$ に対する $h(s-\nu)$ の係数は、s が充分大なるとき、次の様に評価出来る。

$$(32)\quad M(n:\nu:s)-\sum_{r=0}^{nq}\sum_{l=1}^{n} a_{l,ql-r}\, M(n-l:\nu-r:s-r)$$

$$\cong (-1)^{\left[\frac{\nu}{q}\right]} F^{\left(\left[\frac{\nu}{q}\right]\right)}(\lambda)\, s^{\left[\frac{\nu}{q}\right]} \left\{ C_\nu + O\left(\frac{1}{s}\right) \right\}$$

但し，ここで C_ν は定数で，ν が q の倍数のときは $C_\nu \equiv 1$ である。[ ] はガウス記号。

証明　補助定理 1 より

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s^{\left[\frac{\nu}{q}\right]}} \left\{ M(n:\nu:s) - \sum_{l=1}^{n} a_{l,ql}\, M(n-l:\nu:s-r) - \sum_{r=1}^{nq} \sum_{l=1}^{n} a_{l,ql-r}\, M(n-l:\nu-r:s-r) \right\} = \tilde{C}_\nu \ (= \mathrm{const})$$

は，明らかである。特に ν が q の倍数のとき，例へば $\nu = qk$ のとき，

$$\tilde{C}_\nu = (-1)^k \lambda^{n-k} \binom{n}{k} - \sum_{l=1}^{n} a_{l,ql} (-1)^k \lambda^{n-l-k} \binom{n-l}{k}$$

$$= (-1)^k F^{(k)}(\lambda)$$

（証明終）

我々の目的は $h^k(s)$ の s が充分大きいときの挙動を知る事であったが，幸いにも，ここに差分方程式の解の挙動に関する Perron の論文（1910）がある。（参照 [3]）使いやすい形に書きなおせば，次の様に述べられる。

Poincaré－Perron の定理

(33) $\lim_{n\to\infty} a_i(n)/n^{k_i} = \hat{a}_i$ (定数) $(i=1,2,\ldots,r)$

なる $a_i(n)$ を係数にもつ差分方程式

(34) $z(n+r)+a_1(n)z(n+r-1)+\cdots+a_r(n)z(n)=0$

の解の挙動について考察する。今 xy-平面上に $(0,0)$, $(1,k_1)$, $(2,k_2)$, …, (r,k_r) なる点を印し，それらの点を適当に結び，y の正方向に凸となる折線を作る。その際 全ての点は 折線上 又は それより下にある様にする。この折線を Newton－Puiseux Polygon というが，それが一辺のみからなるとき その辺の方向係数を q とすれば

(35) $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|z(n)|^{\frac{1}{n}}}{\Gamma(n+1)^{\frac{q}{n}}} = |e_\lambda|$$

が成立つ。ここで，e_λ は代数方程式

(36) $$t^r + b_1 t^{r-1} + \cdots + b_r = 0$$

の根の一つである。但し

(37) $$b_i = \lim_{n\to\infty} a_i(n)/n^{qi} = \hat{a}_i \text{ 又は } 0.$$

さて，補助定理2の結果によれば，差分方程式(27)は正に，Poincaré-Perronの定理が適用出来る型であることがわかる。最高階の係数 $(q-s)F'(\lambda)$ （注：$F'(\lambda)\neq 0$，即ち特性定数 λ_j に対して $\lambda_j\neq\lambda_k$ $(j\neq k)$ と仮定しておく。）で割って，

$$(38)\qquad h(s)+\sum_{\nu=1}^{(n-1)q} a_\nu(s)\,h(s-\nu)=0$$

のように書きなおしておけば，Newton-Puiseux Polygon を作るための点は

$(0,0)\quad (1,0)\quad \cdots\cdots\quad (q-1,0)$

$(q,1)\quad (q+1,1)\quad \cdots\cdots\quad (2q-1,1)$

$\cdots\cdots$

$(kq,k)\quad (kq+1,k)\quad \cdots\cdots\quad ((k+1)q-1,k)$

$\cdots\cdots$

$((n-1)q,\ n-1)$.

であり，Polygon は一辺のみから成っていることがわかる。しかも，その辺の方向係数は $\frac{1}{q}$ である。更に，$\nu=kq$ のとき

$$(39)\qquad \lim_{s\to\infty} a_{kq}(s)\,/\,s^{(kq)\times\frac{1}{q}} = (-1)^k F^{(k+1)}(\lambda)\,/\,F'(\lambda)$$

$\nu\neq kq$ のとき

$$(40)\qquad \lim_{s\to\infty} a_\nu(s)\,/\,s^{\nu\times\frac{1}{q}} = 0$$

であるから，結局，次の結果が得られた事になる。

<u>定理</u>　特性定数 λ_j が相異なるという条件，即ち $\lambda_j \neq \lambda_k$ $(j \neq k)$ の下で，形式解(4)の係数 $h^k(s)$ に対して，次の不等式が成立つ。

$$(41) \quad \overline{\lim_{s\to\infty}} \frac{|h^k(s)|^{\frac{1}{s}}}{\Gamma(s+1)^{\frac{1}{qs}}} \leq \frac{1}{|\hat{\lambda}_k - \lambda_k|^{\frac{1}{q}}} \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

ここで $|\hat{\lambda}_k - \lambda_k| = \min_{j \neq k} |\lambda_j - \lambda_k|$.

<u>証明</u>　(36)に対応する代数方程式は(39)(40)の関係から

$$t^{q(n-1)} - \frac{F''(\lambda_k)}{F'(\lambda_k)} t^{q(n-2)} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{F^{(n)}(\lambda_k)}{F'(\lambda_k)} = 0$$

この根は

$$t_j^q = \frac{1}{\lambda_k - \lambda_j} \qquad (j=1,2,\dots,n : j \neq k)$$

であるから Poincaré-Perron の定理から(41)式が得られる。

このようにして，$h^{k}(s)$ の挙動を解明する事が出来た訳である。$g_{\ell}^{(j,k)}(m)$ に関する解析にはまた興味深い面もあるが，それは微分方程式(1)の接続問題の解析と密接に関連し，話は長くなるので：尻切れとんぼの感はまぬがれないが，この拙論はこれで止める。

参考文献

[1] K. Okubo : J. Math. Soc. Japan 15 (1963)
[2]. M. Kohno : Japanese J. Math 40 (1970)
[3]. O. Perron : Jhar Deutsch. Math. Verein 19 (1910)