数理解析研究所講究録
第132巻 1971年 33-43

境界層の方程式 $f'''+2ff''+2\lambda(k^2-f'^2)=0$

東京都立大学
岩野 正宏

1. 境界層の方程式

流体力学で，3階の方程式

$$(A)\qquad f'''+2ff''+2\lambda(k^2-f'^2)=0,\ k>0,\ \lambda<0$$

を 境界条件

$$(A_0)\qquad f(0)=0,\quad f'(0)=0,$$

$$(A_\infty)\qquad f'(\infty)=k$$

のもとに 解くことが要請されている．しかし この境界値問題は，T. Hartman， J. Serrin など著名な人々の努力にもかかわらず，まだ解決されていないように思う．境界条件 (A_0) のかわりに 境界条件

$$(A_0')\qquad f(0)=\alpha,\quad f'(0)=\beta$$

と (A_∞) とを満足する 解が存在するための必要十分条件

は すでに F. Kemnitz と R. Iglish とによって求められている。P. Hartman の Ordinary Differential Equations に それの詳しい説明がある。すなわち，

解としては $0<t<\infty$ で $\beta \leqq f'(t)<k$ となるものだけを考える。任意の $k>0$, $\lambda<0$, $0 \leqq \beta<k$ とに対して定まる定数 $A(\lambda,\beta,k)$ と $\alpha \geqq A(\lambda,\beta,k)$ で定義された単調増加な連続関数 $\gamma(\alpha)$ $(\gamma(A(\lambda,\beta,k))=0)$ とが存在し，初期値問題

$$f''' + 2ff'' + 2\lambda(k^2 - f'^2) = 0,$$

$$f(0)=\alpha, \quad f'(0)=\beta, \quad f''(0)=\gamma$$

の解 $f(t)$ が，$t=\infty$ まで接続可能でしかも

$$\lim_{t\to\infty} f'(t) = k$$

を満足するための必要十分条件は α と γ とが

$$\alpha \geqq A(\lambda,\beta,k), \quad 0 \leqq \gamma \leqq \gamma(\alpha)$$

を満足することである。このとき $f''(t)>0$.

定数 $A(\lambda,\beta,k)$ が，$\beta=0$ かつ $k>0$, $\lambda<0$ のとき，常に非正ということがわかれば上記の存在定理は流体力学の境界値問題に対して解の存在を保証する。しかしながら，この定数の決め方は解析的（超越的）であるか

ら，$A(\lambda, \beta, k)$ の符号が λ, β, k の値によってどのようになるかは全くわからない。かつて筆者が Serrin さんに会って，この結果は最終的なものであるかどうかを尋ねたとき，「いつかは境界条件 (A_0)，(A_∞) のもとでの解の存在がでるに違いない」と話された。

P. Hartman は上記の解 $f(t)$ の，$t \to \infty$ における，行動を詳しく調べている。簡単に説明すれば，$f''(0) = \gamma(\alpha)$ のときに限り，$f'(t) - k$ は指数関数の大きさで 0 に近づき，$0 \leq f''(0) < \gamma(\alpha)$ のときは $f'(t) - k$ は t のベキの大きさで 0 に近づくことが証明されている。

$\lambda > 0$ のときは，解の存在と一意性が H. Weyl によって得られている。

一方方程式 (A) は独立変数 t を陽に含んでいないことから 2 階の方程式に変換される。2 階の方程式の境界値問題にかんしては，南雲の存在定理と呼ばれる極めて有力な武器をもっている。或は，南雲，岡村，H. W. Knobloch の存在定理を，Kneser 族の立場から統一的に取り扱った福原の(境界値問題にかんする)存在定理がある。これらの存在定理を応用して，境界値問題 $(A)-(A_0)-(A_\infty)$ の解の存在を証明することはできないであろうか。これが筆者の期待である。十年ばかり前に，福原先生と協同研究をしたときのノートをもとにして少しばかり書いてみたい。

2. 2階の方程式への変換

f' を f の関数と考えれば

$$f''=f'\frac{df'}{df},\qquad f'''=f'^2\frac{d^2f'}{df^2}+f'\left(\frac{df'}{df}\right)^2$$

となるから，方程式 (A) は

$$\text{(B)}\quad f'\left\{f'\frac{d^2f'}{df^2}+\left(\frac{df'}{df}\right)^2\right\}+2ff'\frac{df'}{df}+2\lambda(k^2-f'^2)=0$$

となる。

$$f_0=f(0),\ f_0'=f'(0),\ f_0''=f''(0),\ f_0'''=f'''(0)$$

とおく。境界条件 (A_0) から，

$$f_0=f_0'=0,$$

また (A) から

$$f_0'''=-2\lambda k^2>0.$$

したがって，f' を f の関数と考えれば $f''=f'\frac{df'}{df}$ であるから，$f'\sim cf^\delta$ とおいてみると

$$f''\sim c^2\delta f^{2\delta-1}$$

ゆえに $f\to 0$ のとき，もし $f_0''\neq 0$ であれば

$$f_0''\sim c^2\delta,\qquad 2\delta-1=0.$$

ゆえに

$$(B_0)\qquad \lim_{f\to 0}\frac{f'}{\sqrt{f}}=\sqrt{2f_0''}\qquad (\text{if}\ \ f_0''\neq 0),$$

もし $f_0''=0$ のときは $f_0'''\neq 0$ であることに注意して
$f'''=f'^2\,d^2f'/df^2+f'(df'/df)^2$ を用いれば

$$(B_0')\qquad \lim_{f\to 0}\frac{f'}{\sqrt[3]{f^2}}=\sqrt[3]{-9\lambda k^2}\qquad (\text{if}\ f_0''=0).$$

条件 (A_∞) から $f\sim kt$，したがって $t\to\infty$ のとき $f\to\infty$. ゆえに

$$(B_\infty)\qquad f'\to k\qquad \text{as}\ \ f\to\infty.$$

新しい従属変数として

$$g=f'^2$$

をとれば，

$$\dot{g}=\frac{dg}{df}=2f'\frac{df'}{df},\quad \ddot{g}=\frac{d^2g}{df^2}=2\left\{f'\frac{d^2f'}{df^2}+\left(\frac{df'}{df}\right)^2\right\}$$

であるから　方程式 (B) は

$$(C)\qquad \sqrt{g}\,\ddot{g}+2f\dot{g}+4\lambda(k^2-g)=0$$

に変換され, 条件 (B_0) $(B_0)'$, (B_∞) に対応して それぞれ 次の条件を得る:

$$(C_0) \qquad \lim_{y\to 0}\frac{g}{f} = 2y_0''$$

$$(C_0)' \qquad \lim_{y\to 0}\frac{g}{f^{4/3}} = 3k\sqrt[3]{\lambda^2 k}$$

$$(C_\infty) \qquad g \to k^2 \qquad \text{as } f\to\infty$$

もっと簡単に

$$g(0)=0, \qquad g(\infty)=k^2.$$

3. 南雲の存在定理

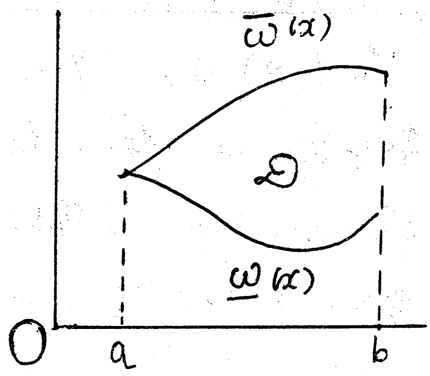
南雲氏の存在定理と一意性の定理を証明なしに述べる。

$f(x, y, z)$ は 領域

$\mathfrak{D}$: $a \leqq x \leqq b$, $\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$, $\underline{\Omega}(x, y) \geqq z \leqq \overline{\Omega}(x, y)$

において (x, y, z) の連続な関数; $\underline{\omega}(x)$, $\overline{\omega}(x)$ は $a \leqq x \leqq b$ において 2回微分可能; $\underline{\Omega}(x, y)$, $\overline{\Omega}(x, y)$ は 領域

$\mathfrak{D}:\quad a \leqq x \leqq b,\ \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$



において微分可能である；しかも次の不等式が成り立つ：

$$\underline{\omega}(a)=\overline{\omega}(a)=A,$$

$$\underline{\Omega}(x,\underline{\omega}) \leqq \underline{\omega} \leqq \overline{\Omega}(x,\underline{\omega}),\quad \underline{\Omega}(x,\overline{\omega}) \leqq \overline{\omega} \leqq \overline{\Omega}(x,\overline{\omega}),$$

$$(*)\begin{cases} \underline{\omega}''(x) \geqq f(x,\underline{\omega}(x),\underline{\omega}'(x)), \\ \overline{\omega}''(x) \leqq f(x,\overline{\omega}(x),\overline{\omega}'(x)), \end{cases}$$

$$(\#)\begin{cases} f(x,y,\underline{\Omega}(x,y)) - \underline{\Omega}_x(x,y) - \underline{\Omega}_y(x,y)\,\underline{\Omega}(x,y) > 0, \\ f(x,y,\overline{\Omega}(x,y)) - \overline{\Omega}_x(x,y) - \overline{\Omega}_y(x,y)\,\overline{\Omega}(x,y) < 0. \end{cases}$$

このとき

$$y(a)=A,\qquad y(b)=B,\qquad \underline{\omega}(b) \leqq B \leqq \overline{\omega}(b)$$

となる方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

の積分曲線が領域 $\mathscr{D}$ 内に存在する。

条件(＊)は，$y(x)$ が $\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$ を満足し，条件(#)は $dy(x)/dx$ が $\underline{\Omega}(x, y(x)) \leqq y'(x) \leqq \overline{\Omega}(x, y(x))$ を満足することを保証するための条件である。解があれば $y(x)$ および $z(x) = dy(x)/dx$ は積分方程式

$$y(x) = \frac{A(b-x)+B(x-a)}{b-a} - \int_a^b G(x,t) f(t, y(t), z(t))\,dt,$$

$$z(x) = \frac{B-A}{b-a} - \int_a^b G_x(x,t) f(t, y(t), z(t))\,dt,$$

$$G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(b-x)(t-a)}{b-a}, & a \leq t \leq x \leq b \\[2ex] \dfrac{(b-t)(x-a)}{b-a}, & a \leq x \leq t \leq b \end{cases}$$

を満足することがわかる。この積分方程式が，$\mathscr{D}$ 内に属するような解をもつことが言えれば定理は証明されたことになる。

つぎに，$y'' = f(x, y, y')$ を

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$$

の形にかき，$z = Z(x, y, \zeta)$ とおいて y, ζ に関す

る方程式をつくり，この方程式についての条件によって2定点を通る $y''=f(x,y,y')$ の解の一意性が得られる。

$$\frac{dy}{dx}=Z(x,y,\varsigma),$$

$$\frac{d\varsigma}{dx}=F(x,y,\varsigma)\equiv\frac{1}{Z_\varsigma}\left\{f(x,y,Z)-Z_x-Z_yZ\right\}$$

の右辺の関数が

$$Z_\varsigma>0,\quad F_y\geqq 0$$

を満足するならば，2定点を通る $y''=f(x,y,y')$ の解曲線はただ一つに限る。

4. 無限区間における南雲型の存在定理についての福原の予想

南雲の存在定理の証明をみればわかることであるが，積分方程式の解の存在を証明するときに，区間が有限であることは極めて都合のよい条件になっている。対応する積分方程式を，無限区間の場合につくれば，

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi}{(1+x)(1+\xi)} & 0\leqq\xi\leqq x<\infty\\[2ex] \dfrac{x}{(1+\xi)(1+x)} & 0\leqq x\leqq\xi<\infty\end{cases}$$

$$H(\xi, y(\xi), z(\xi))$$
$$= (1+\xi)^4 h(\xi, y(\xi), z(\xi)) + 2(1+\xi)^3 z(\xi),$$

$$y(x) = \frac{A+Bx}{1+x} - \int_0^\infty G(x,\xi) H(\xi, y(\xi), z(\xi)) \frac{d\xi}{(1+\xi)^2},$$

$$z(x) = \frac{B-A}{(1+x)^2} - \int_0^\infty G_x(x,\xi) H(\xi, y(\xi), z(\xi)) \frac{d\xi}{(1+\xi)^2}$$

で与えられる。この積分方程式が解 $\{y(x), z(x)\}$ をもてば、$y(x)$ は

$$y(0) = A, \quad y(\infty) = B,$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = h\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right)$$

を満足することは初等的計算で確めることができる。

さて境界層の方程式(C)を、$y'' = h(x, y, y')$ の形にかけば

$$\ddot{g} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\left\{2f\dot{g} + 4\lambda(k^2 - g)\right\}$$
$$\equiv h(f, g, \dot{g})$$

となり，したがって k は $g=0$ において特異性をもつ。積分方程式に転換して解の存在を証明することは，たとえ可能であったとしても，有限区間でしかも特異性のない南雲氏の場合のように簡単にはできそうもない。

福原先生は最近"Kneser 族の理論と境界値問題の位相的取扱い"という論文を発表された。この理論を応用すれば，積分方程式を解かなくても「不等式(＊)および(#)を満足する関数 $\underline{\omega}(f)$, $\overline{\omega}(f)$, $\underline{\Omega}(f,g)$, $\overline{\Omega}(f,g)$ が方程式(C)に対してもしつくれるならば境界条件 $g(0)=0$, $g(\infty)=k^2$ を満足する(C)の解の存在がでるであろう」と予想しておられる。

F. Kemnitz と R. Iglish が取り扱った場合の(C)に対する境界条件は

$$g(\alpha)=\beta^2, \qquad g(\infty)=k^2$$

となっている。この境界条件に対応して不等式(＊)と(#)とを満足する関数 $\underline{\omega}(f)$, $\overline{\omega}(f)$, $\underline{\Omega}(f,g)$, $\overline{\Omega}(f,g)$ をつくることはそれほどむづかしくはない。しかし問題の境界条件に対応するこれらの関数をつくることは大へんむづかしい！