数理解析研究所講究録
第133巻 1972年 70-77

$K(\pi,1)$ 上のファイバー空間のホモロジー

阪大 教養　野村泰敏

§1．序

Hochschild と Serre は [6] において群拡大のいわゆる Hochschild-Serre のスペクトル列を用いて次の二つの完全列を得た。$1 \to N \to G \to Q \to 1$ を群の拡大とし，M を G-加群とする。$H^q(N,M)=0$，$0<q<m$ のとき

$$0 \to H^m(Q,M^N) \to H^m(G,M) \to H^m(N,M)^G \to H^{m+1}(Q,M^N) \to H^{m+1}(G,M)$$

は完全である。$H^q(N,M)=0$，$1<q<n$ $(n>1)$ のとき

$$\cdots \to H^{n-1}(Q,M^N) \to H^{n-1}(G,M) \to H^{n-2}(Q,H^1(N,M)) \to H^n(Q,M^N) \to H^n(G,M)$$

は完全である。ホモロジーの場合は J. Stallings が [15] でやはりスペクトル列を用いて同様の完全列を導いて居り，別の証明が Knus [9]，Stammbach [16] によって得られている。才1の完全列の $m=1$ のときの位相的証明は単純な Z 係数のとき Ganea [4] により得られている。一方中心拡大に対して才1の完全列（$m=1$ の場合）を若干項延長することは岩堀

と松本 [7] によりなされ，その位相的証明はやはり Ganea [5] により得られている。他方第二の完全列のホモロジーの場合は，Eckmann と Stammbach [2] によりスペクトル列を用いない証明が得られて居り、それは次の様に述べられる。

$1 \to N \to G \to Q \to 1$ を群拡大とし，M を Q-加群とする。$H_q(N, M) = 0$，$1 < q < n$ ならば

$$H_n(G, M) \to H_n(Q, M) \to \mathrm{Tor}^Q_{n-2}(H_1(N), M) \to H_{n-1}(G, M) \to \cdots$$
$$\cdots \to H_1(N) \otimes_Q M \to H_1(G, M) \to H_1(Q, M) \to 0$$

は完全列となる。

本稿では M が自明な整数 Z のとき，iterated Whitney join ([3], [8], [11], [17]) を用いて，Hochschild-Serre の第1と第2の完全列（ホモロジーの場合）を統一する形で而も若干項（本質的に2項）延長する形で Eckmann-Stammbach の完全列の位相的証明を与える。従って [7], [5] の結果の任意拡大への拡張も併せて得られたこととなる。(cf. [11])

§2. 定理とその系

$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ を Hurewicz の意味でのファイバー空間とし F と B とは弧状連結とする。このとき lifting function を用いて B のループ空間 ΩB の F への作用 $\mu: \Omega B \times F \to F$ が定まり (cf. [1])，これより $\pi_1(B)$ の $H_*(F)$ への作用が合成

$$\tilde{\mu}: Z\pi_1(B)\otimes H_q(F) \approx H_0(\Omega B)\otimes H_q(F) \subset H_q(\Omega B\times F) \xrightarrow{\mu_*} H_q(F)$$

として得られる。たゞし $Z\pi_1(B)$ は $\pi_1(B)$ の群環で，以下 $\pi_1(B)$ を Q と略記し，ZQ とかくべきところを単に Q と記す。従て $H_*(F)$ は Q-加群となる。

定理 m, n を $1\leqq m<n$ なる整数とし，$0<q<m$ 及び $m<q<n$ に対して $H_q(F)=0$，$1<k<n-m+1$ に対して $\pi_k(B)=0$ とするとき完全列

$$H_{n+1}(E)\xrightarrow{p_*}H_{n+1}(B)\to R\to H_n(E)\xrightarrow{p_*}H_n(B)\to Tor^{Q}_{n-m-1}(H_m(F), Z)$$
$$\to H_{n-1}(E)\to\cdots\to H_m(F)\otimes_Q Z\to H_m(E)\xrightarrow{p_*}H_m(B)\to 0.$$

及び $$H_n(F)\to R\to Tor^{Q}_{n-m}(H_m(F), Z)\to 0$$

が存在する。従って

$$H_{n+1}(B)\to Tor^{Q}_{n-m}(H_m(F), Z)\to H_n(E)/i_*H_n(F)\to H_n(B)\to\cdots\to H_m(B)\to 0$$

は完全である。

さて $$1\to N\xrightarrow{i} G\xrightarrow{\rho} Q\to 1$$

を任意の群拡大とするとき $n\to gng^{-1}$ $(n\in N,\ g\in G)$ により $\theta(g): N\to N$ が引起され，これは $\theta(g)_*: H_*(N)\to H_*(N)$ を導く。上の拡大は Eilenberg-MacLane spaces のファイバー空間 $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ で実現される。このとき $\tilde{\mu}(\rho g\otimes c)=\theta(g)_*c$ となることが，$\theta(g)$ の引起す F の写像と $\mu(\rho g,\ )$ の定める F の写像とが free homotopic となることから示される (cf. [12])。ゆえに次の系を得る。

系. $0<q<m$ 及び $m<q<n$ $(1\leqq m<n)$ に対して $H_q(N)=0$ であれば

$$H_{n+1}(Q)\to \mathrm{Tor}^{Q}_{n-m}(H_m(N),Z)\to H_n(G)/\iota_* H_n(N)\to H_n(Q)\to$$
$$\mathrm{Tor}^{Q}_{n-m-1}(H_m(N),Z)\to\cdots\to H_m(N)\otimes_Q Z\to H_m(G)\to H_m(Q)\to 0$$

は完全である。特に $n=m+1$ で, $H_m(N)$ が自明な Q 加群でかつ $H_1(Q)=0$ のときは

$$H_{m+1}(N)\to H_{m+1}(G)\to H_{m+1}(Q)\to H_m(N)\to H_m(G)\to H_m(Q)\to 0$$

は完全列である。

尚最后の完全列を, Kervaire [10] の得た代数的K理論に関連する或る完全列を導くのに応用することは [12]を参照されたい。

§3. 証明の概要. [13]

補題 1 $F\xrightarrow{i}E\xrightarrow{p}B$ を Hurewicz fibration で B を弧状連結, F はホモロジー $(n-1)$連結, $n\geqq 1$, とする。$\sigma: SF\to C_p$ を $\sigma(x,t)=(i(x),t)\in CE\cup_p B$ で定義される写像とするとき, σ はホモロジー $(n+1)$-連結で

$$\tilde{H}_0(\Omega B)\otimes H_n(F)\xrightarrow{\tilde{\mu}} H_n(F)\xrightarrow{\sigma_*} H_{n+1}(C_p)\to 0$$

は完全である (Ganea [3], Th. 2.2)

さて, §2 の p に対して iterated Whitney join

$$p_k: E_k\to B,\qquad E_k=\overbrace{PB\oplus\cdots\oplus PB}^{k}\oplus E$$

を作るとその fibre F_k は $\overbrace{\Omega B*\cdots*\Omega B}^{k}*F$ である。但し $PB\to B$

は B 上の可縮な path fibration で, ΩB の fibre ΩB への作用は $(\alpha, \beta) \to \beta\alpha^{-1}$ で与えられる。自然な包含 $j_k : E_{k-1} \to E_k$ より $c_k : C_{p_{k-1}} \to C_{p_k}$ が誘起される。E_k は $F_{k-1} \to E_{k-1}$ の写像錐として得られることから j_k の写像錐は SF_{k-1} と同一のホモトピー型をもつ。可換図式

$$\begin{tikzcd}
E_{k-1} \arrow[r, "j_k"] \arrow[d, "p_{k-1}"] & E_k \arrow[d, "p_k"] \\
B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd}$$

に 3×3 補題を用いると c_k の写像錐は S^2F_{k-1} とホモトピー同値となる。Künneth の定理より

<u>補題 2</u>
$$H_q(F_{k-1}) = \begin{cases} 0 & 0 < q < m+k-1,\ m+k-1 < q < n+k-1 \\ \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{k-1} \otimes H_m(F) & q = m+k-1 \end{cases}$$

ただし $I = \tilde{H}_0(\Omega B)$ は $Z\pi_1(B) = H_0(\Omega B) \to Z$ の augmentation ideal である。

これより容易に

<u>補題 3</u> $c_{k*} : H_q(C_{p_{k-1}}) \to H_q(C_{p_k})$ は

$q < m+k$, $m+k+1 < q < n+k$ のとき同型

<u>補題 4</u>. (Schmid [14]) $\tau_k : \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{k} \otimes M \to \overbrace{I \otimes \cdots \otimes I}^{k-1} \otimes M$

(ただし M は Q 加群) を

$$\tau_k((\alpha_1 - 1) \otimes \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes m) = \alpha_2\alpha_1^{-1} \otimes \cdots \otimes \alpha_k\alpha_1^{-1} \otimes \alpha_1 m - \alpha_2 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \otimes m$$

$$(d_1 \in Q,\ d_2, \cdots, d_k \in I,\ m \in M)$$

と定義するとき零列 $\xrightarrow{T_{k+1}} \xrightarrow{T_k}$ のホモロジーは $Tor_k^Q(Z, M) = H_k(Q, M)$ である。

可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & \\
0 \arrow[r] & H_{m+k+1}(C_{p_{k-1}}) \arrow[r] & H_{m+k+1}(C_{p_k}) \arrow[u] \arrow[r] & H_{m+k-1}(F_{k-1}) \\
 & & H_{m+k}(F_k) \arrow[u, "\sigma_*"] \arrow[ur, "\tilde{\mu}"'] & \\
 & & I \otimes H_{m+k}(F_k) \arrow[u, "\tilde{\mu}"] &
\end{tikzcd}$$

に補題 $\overbrace{1}^{及び4}$ を用いれば

<u>補題 5</u> $\quad H_{m+k+1}(C_{p_{k-1}}) \cong Tor_k^Q(Z, H_m(F))$.

さて $p: E \to B$ の Puppe 列にホモロジー函手を施し，$H_*(C_p)$ に補題 3 と補題 5 を用いると

$m+1 < q < n+1$ のとき $\quad H_q(C_p) \cong Tor_{q-m-1}^Q(Z, H_m(F))$

$$H_{m+1}(C_p) \cong H_m(F) \otimes_Q Z$$

また $\quad H_{n+1}(C_{p_1}) \cong Tor_{n-m}^Q(Z, H_m(F))$

となることを考慮すれば定理の完全列が得られる。

文　献

1. B. Eckmann - P. J. Hilton, Operators and cooperators in homotopy theory, Math. Ann. 141 (1960), 1–21.
2. B. Eckmann - U. Stammbach, On exact sequences in the homology of groups and algebras, Illinois J. Math. 14 (1970), 205–215 (See also C.R. Acad. Sci. Paris 265, 11-13, 46–48)
3. T. Ganea, A generalization of the homology and homotopy suspension, Comment. Math. Helv. 39 (1965), 295–322.
4. ——, On the homotopy suspension, ibid. 43 (1968), 225–234.
5. ——, Homologie et extensions centrales de groupes, C. R. Acad. Sci. Paris 266 (1968), 556 – 558.
6. G. Hochschild - J. P. Serre, Cohomology of groups extensions, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 110 – 134.
7. N. Iwahori - H. Matsumoto, Several remarks on projective representations of finite groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 10 (1963-64), 129 – 146
8. I. M. Hall, The generalized Whitney sums, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 16 (1965), 360 – 384.
9. M. A. Knus, Homology and homomorphisms of rings, J. Algebra 9 (1968), 274 – 284.

10. M.A. Kervaire, Multiplicateurs de Schur et K-théorie, Essays on topology and related topics, Springer (1970).

11. Y. Nomura, The Whitney join and its dual, Osaka J. Math. 7 (1970), 353–373.

12. Y. Nomura, Homology of a group extension.

13. Y. Nomura, Homology of a fibration over an aspherical space.

14. J. Schmid, Zu den Reduktionssatzen in der homologischen Theorie der Gruppen, Arch. der Math. 15 (1964), 28–32.

15. J. Stallings, Homology and central series of groups, J. Algebra, 2 (1965), 170–181.

16. U. Stammbach, Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Invarianten von Präsentierungen, Math. Z. 94 (1966), 157–177.

17. A.S. Svarc, The genus of a fiber space, Amer. Math. Soc. Translation 55 (1966), 49–140.