数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 37-50



# Banach空間におけるAccretive作用素について

広大理　剱持信幸

## 1. 序

この小論において，Banach空間における（一般に多価）accretive作用素のlocal boundedness，m-accretiveness，及びmaximal accretivenessについて論ずる。

Hilbert空間におけるaccretive作用素はその定義域の内点においてlocally boundedであることが知られている（Pazy [6]，Rockafellar [7]を参照）。この事実は，連続かつ逆連続なduality作用素をもつBanach空間においても正しいということを示そう。

次に，抽象的Cauchy問題

$$(E)\qquad \frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0 \quad , \qquad u(0) = a$$

を考える。ここで，未知関数$u(t)$は実数区間$[0, +\infty)$上定義され，Banach空間Xの中に値をもつような関数であり，

Aは$X$における accretive 作用素である。T. Kato [5] の結果によると，$X^*$（$X$ の dual 空間）が uniformly convex でありAが$X$全体を定義域にもつような一価の hemicontinuous accretive 作用素であるならば，(E) は任意に与えられた $a \in X$ に対し解をもち，さらにAは m-accretive である。このT. Kato の結果を，Aが多価の locally bounded かつ maximal accretive 作用素である場合に拡張し，さらに$X$に対するいくらかの制限のもとで，定義域が開集合であるような maximal accretive 作用素は m-accretive であるということを示そう。

## 2. 記号の説明と定義

小論を通じ$X$を実 Banach 空間，$X^*$をその dual 空間とする。$X$及び$X^*$における norm は $\|\cdot\|$ で表わし，$x^* \in X^*$ の $x \in X$ における値を $\langle x, x^* \rangle$ で表わす。

$X$の各点 $x$ に対し$X$の部分集合 $Tx$ を対応させる作用素 T に対し，集合 $D(T) = \{x \in X \,;\, Tx \neq \phi\}$ をその定義域という。T が $x_0 \in X$ において locally bounded であるとは，$x_0$ のある近傍 $U$ で，$T(U) = \bigcup\{Tx \,;\, x \in U\}$ が$X$の有界集合となるものが存在することをいう。

$X$から$X^*$の中への作用素 $J : x \longrightarrow Jx = \{x^* \in X^* \;;$

$\langle x, x^* \rangle = \|x\|^2 = \|x^*\|^2 \}$ をduality作用素という。$X^*$がstrictly convexならば，Jは一価の作用素であり，さらにuniformly convexならば，JはXの各有界集合上で一様連続であることが知られている（T. Kato [4]を参照）。

Xにおける作用素Tがaccretiveであるとは，D(T)の任意の二点$x, y$と，任意の$x' \in Tx$, $y' \in Ty$に対し$\langle x'-y', f \rangle \geqq 0$となるような$f \in J(x-y)$が存在することをいう。accretive作用素Tがmaximal accretiveであるとは，Tの真のaccretiveな拡張が存在しないことをいい，m-accretiveであるとは，$R(I+T) = \{ x+x' ;\ x' \in Tx,\ x \in X \} = X$となることをいう。

$B(x, r)$（resp. $B^*(x^*, r)$）によって$X$（resp. $X^*$）における中心$x$（resp. $x^*$）半径$r$のclosed ballを表わす。

## 3. accretive作用素のlocal boundedness

この節を通して，X及び$X^*$はstrictly convexとし，duality作用素Jは連続かつ逆連続（従ってJはXから$X^*$上への位相写像）であるとする。このとき次の結果を得る。

［定理1］ TをXにおける（一般に多価の）accretive作用素とする。このとき$\mathring{D}(T)$（D(T)の内点全体）の各点におい

て，Tは locally bounded である．

この定理を示すには，次の二つの補題を用いる。証明の方針は Rockafellar [7] による。

[補題1]　SをXの部分集合で，$(-S)\cap\mathring{S}\neq\phi$ とする。このとき，二正数 $\varepsilon$，$\delta$ で

$$B^*(0,\varepsilon)\subset\bigcap_{x\in B(0,\delta)}\mathrm{conv}(J(S-x))$$

となるものが存在する。ただし，$\mathrm{conv}(J(S-x))$ によって $J(S-x)$ の convex hull を表わす。

[補題2]　TをXにおける多価作用素，$0\in\mathring{D}(T)$ とする。このとき，次のような性質をもつ有界集合 $S$，$S'$，$C$ が存在する：(1) $(-S)\cap\mathring{S}\neq\phi$　(2) $\overline{S'}=S$（$\overline{S'}$ は $S'$ の閉包を示す）(3) $Tx\cap C\neq\phi$　$\forall x\in S'$．

定理1の証明：　$0\in\mathring{D}(T)$ として，Tが0で locally bounded であることを示せば十分である。従って $0\in\mathring{D}(T)$ とする。補題2によって，(1)，(2)，(3) を満たす有界集合 $S$，$S'$，$C$ が存在する。$\rho=\sup\{\|x\|\,;\,x\in S\}$，$\rho'=\sup\{\|x\|\,;\,x\in C\}$

とおく。補題1によって，二正数 $\varepsilon$, $\delta$ が存在して

$$(4) \qquad B^*(0,\varepsilon) \subset \bigcap_{x \in B(0,\delta)} \operatorname{conv}(J(S-x))$$

とできる。このとき，$T(B(0,\delta))$ は $X$ の有界集合であることを示せばよい。そのため，$B(0,\delta)$ の点 $x$，$Tx$ の点 $x'$ を任意にとる。$T$ の accretiveness より，任意の $u \in S'$ と $u' \in Tu \cap C$ に対し，

$$\begin{aligned} \langle x', J(u-x)\rangle &\leqq \langle u', J(u-x)\rangle \\ &\leqq (\|u\| + \|x\|)\|u'\| \\ &\leqq (\rho+\delta)\rho' \end{aligned}$$

が成立。即ち

$$J(S'-x) \subset \{ x^* \in X^* ; \ \langle x', x^*\rangle \leqq (\rho+\delta)\rho' \} \equiv F.$$

$J$ は位相写像だから，$J(S-x) = J(\overline{(S'-x)}) = \overline{J(S'-x)}$ に注意すると，$\operatorname{conv}(J(S-x)) \subset F$ を得る。(4)を用いると，$B^*(0,\varepsilon) \subset F$ となり，よって $\|x'\| \leqq (\rho+\delta)\rho'/\varepsilon$ となる。これは

$$T(B(0,\delta)) \subset B\left(0, \frac{(\rho+\delta)\rho'}{\varepsilon}\right)$$

なることを示している。 (終)

注意1：Jが連続かつ逆連続であるという仮定は補題1を示すときのみ必要である。

注意2：定理1の証明方法を用いると次のことを示すことができる。Tは $\overline{D(T)} = X$ なるaccretive作用素であるとする。このとき，locally boundedとなるような点が一点でも存在するなら，実はTはXのすべての点でlocally boundedとなり更にXがreflexiveかつTがmaximal accretiveなら $D(T)=X$ となる。

注意3：定理1によると，Crandall－Pazy [3] の定理2.5はbicontinuousなduality作用素をもつBanach空間においても成立することが分かる。

4．非線型発展方程式

Xにおける多価作用素Aに対し微分方程式

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) \ni 0 \tag{5}$$

を考える。X-値関数 $u(t)$ が実数区間 $\Omega$ 上(5)の解であるとは，$u(t)$ が $\Omega$ 上連続であって，$\Omega$ のほとんどすべての点で $u(t)$ は強微分可能で(5)を満たすことをいう。この節を通じ，$X^*$ はuniformly convexとする。

〔定理2〕 $A$ を $X$ における accretive 作用素で，その定義域 $D(A)$ は開集合とし，次の条件(a), (b), (c)を満たすとする： (a) 各 $x \in D(A)$ に対し，$Ax$ は $X$ の閉凸集合である。(b) $A$ は demiclosed である（i.e $x_n' \in Ax_n$, $x_n \in D(A)$ $x_n \longrightarrow x$ strongly in $X$, $x_n' \longrightarrow x'$ weakly in $X$ ならば，$x \in D(A)$ かつ $x' \in Ax$ である。）。(c) 各 $x \in D(A)$ に対し $x$ の近傍 $U_x$ と $X$ の有界集合 $V_x$ が存在して，すべての $y \in U_x$ に対し $Ay \cap V_x \neq \phi$ とできる。このとき，任意に与えられた $a \in D(A)$ に対し $[0, +\infty)$ 上(5)の解で $u(0) = a$ を満たすものが存在する。しかも，存在は $a$ に対し一意的である。

この定理の証明には少々の準備が必要である。次の補題3は T. Kato [5] による。

〔補題3〕 $\{u_n\}$ を区間 $(a, b)$ 上の strongly measurable $X$-値関数の列とし，ある定数 $K$ に対し

$$\| u_n(t) \| \leqq K \qquad a.e.\ t \in (a, b)$$

とする。$V(t)$ を $X$ の点列 $\{u_n(t)\}$ の弱集積点の全体とするとき，$1 < p < \infty$ なるある $p$ に対し $u_n \longrightarrow u$ weakly in $L^p(a, b; X)$ ならば

$$u(t) \in \overline{\mathrm{conv}\, V(t)} \qquad \text{a. e. } t \in (a, b)$$

が成立する。

この補題3を用いて次の補題を得る。

〔補題4〕 $A$を定理2におけると同じものとする。$u(t)$ : $(a, b) \longrightarrow X$を連続関数，$K$を正数とし；すべての$t \in (a, b)$に対し $u(t) \in D(A)$，$Au(t) \cap B(0, K) \neq \phi$とする。このとき，$(a, b)$上 strongly measurable な関数$v(t)$で

$$v(t) \in Au(t) \cap B(0, K) \qquad \text{a.a. } t \in (a, b)$$

となるものが存在する。

次に，局所解の存在及び一意性に関する補題を述べる。

〔補題5〕 $A$を定理2におけると同じものとする。このとき，任意に与えられた$a \in D(A)$に対し，正数$r$と$[0, r)$上(5)の解$u(t)$で$u(0) = a$を満たすものが存在する。しかも存在は$a$に対し一意的である。

（証明） $A$に対する仮定(C)によると，適当な正数$R$,

$K$で，$B(a,R)\subset D(A)$，すべての $x\in B(a,R)$ に対し $Ax \cap B(0,K)\neq\phi$ となるものが存在する。 $r=R/K$，各自然数 $n$ に対し $\varepsilon_n=r/n$ とおく。関数 $u_n$ を次のように定義する。$[0,\varepsilon_n]$ 上 $u_n(t)=a$ とする。$u_n$ に対し $(0,\varepsilon_n)$ 上 strongly measurable な関数 $v_n^{(1)}$ で

$$v_n^{(1)}(t)\in Au_n(t)\cap B(0,K) \qquad a.a.\ t\in(0,\varepsilon_n)$$

となるものをとる（このような関数は補題4により存在する）。次に $[\varepsilon_n, 2\varepsilon_n]$ 上

$$u_n(t)=a-\int_{\varepsilon_n}^{t} v_n^{(1)}(s-\varepsilon_n)\,ds$$

とおく。 帰納的に，$t\in[(k-1)\varepsilon_n, k\varepsilon_n]$ に対し

$$u_n(t)=a-\sum_{i=1}^{k-2}\int_{i\varepsilon_n}^{(i+1)\varepsilon_n} v_n^{(i)}(s-\varepsilon_n)\,ds$$
$$-\int_{(k-1)\varepsilon_n}^{t} v_n^{(k-1)}(s-\varepsilon_n)\,ds$$

とおく（ただし，$v_n^{(k-1)}$ は $((k-2)\varepsilon_n, (k-1)\varepsilon_n)$ 上 strongly measurable な関数で，$v_n^{(k-1)}(t)\in Au_n(t)\cap B(0,K)$ a.a. $t\in((k-2)\varepsilon_n, (k-1)\varepsilon_n)$ となるようなものである）。$v_n(t)=v_n^{(i)}(t)$ if $t\in((i-1)\varepsilon_n, i\varepsilon_n)$ とおく。$u_n$は $[0,r]$ から $B(a,R)$ の中への連続関数で，ほとんどすべての $t\in(\varepsilon_n,r)$

に対し

$$(6)\quad \frac{du_n(t)}{dt} = -U_n(t-\varepsilon_n) \in -Au_n(t-\varepsilon_n)$$

が成立している。この様にしてつくられた列 $\{u_n\}$ は $[0, r]$ 上一様収束することを示そう。$n$, $m$ を $n \geq m$ なる二つの自然数とする。このとき，ほとんどすべての $t \in (\varepsilon_m, r)$ に対し

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\|u_n(t) - u_m(t)\|^2\right) \\
&= 2 < \frac{d}{dt}(u_n(t) - u_m(t)), J(u_n(t) - u_m(t)) > \\
&= -2 < U_n(t-\varepsilon_n) - U_m(t-\varepsilon_m), J(u_n(t) - u_m(t)) > \\
&\leq -2 < U_n(t-\varepsilon_n) - U_m(t-\varepsilon_m), J(u_n(t) - u_m(t)) \\
&\quad - J(u_n(t-\varepsilon_n) - u_m(t-\varepsilon_m)) >
\end{aligned}$$

が成立。この不等式は(6)と A の accretiveness より得られる。上の不等式を $(\varepsilon_m, t)$ 上で積分すると，

$$\begin{aligned}
(7)\qquad &\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 \\
&\leq \|u_n(\varepsilon_m) - a\|^2 + 4K\int_{\varepsilon_n}^{r} \|J(u_n(s) - u_m(s)) - J(u_n(s-\varepsilon_n) \\
&\quad - u_m(s-\varepsilon_m))\| ds
\end{aligned}$$

がすべての $t \in [0, r]$ に対し成立する。一方，全ての $t \in [\varepsilon_m, r]$ に対し，

$$\|(u_n(t)-u_m(t))-(u_n(t-\varepsilon_n)-u_m(t-\varepsilon_m))\|$$
$$\leqq \|u_n(t)-u_n(t-\varepsilon_n)\|+\|u_m(t)-u_m(t-\varepsilon_m)\|$$
$$\leqq K(\varepsilon_n+\varepsilon_m).$$

よって，$J$が$B(a, R)$上一様連続なることに注意すると，(7)の右辺は，$n, m \longrightarrow \infty$のとき，$0$に収束する。即ち，$\{u_n\}$はある$[0, r]$上連続関数$u$に一様収束する。明らかに$u(0)=a$をみたす。(6)によると，$\|du_n(t)/dt\| \leqq K$ a. a. $t \in (0, r)$。従って，$1<p<\infty$なる$p$に対し，適当な部分列$\{u_{n_j}\}$をとると，$du_{n_j}/dt \longrightarrow v$ weakly in $L^p(0, r; X)$となる様にできる。このとき，$du/dt = v$である。補題3及びAに対する仮定(a)，(b)を用いると，

$$\frac{du(t)}{dt} = v(t) \in -Au(t) \quad \text{a. a. } t \in (0, r)$$

を得る。即ち$u$は$u(0)=a$をみたす$[0, r]$上(5)の解である。存在の一意性はAの accretiveness より明らかである　(終)

定理2の証明：局所解の存在が補題5により示されたが，この解が無限に延長され得ることは，Brezis - Pazy [1] の Lemma 2.2，Aについての仮定(b),(c)及び$D(A)$が開集合であることより容易にわかる。　(終)

## 5. accretive 作用素の m-accretiveness

Hilbert 空間においては，maximal accretiveness と m-accretiveness は同一の概念であるが，一般 Banach 空間においては異なる。一般に m-accretive ならば常に maximal accretive であるが，逆は成立しない。（反例については，Calvert [2] を参照）

［定理3］ $X^*$ を uniformly convex，A を定理2におけると同じものとする。このとき，A は m-accretive である。

（証明） Cauchy 問題

$$\frac{du(t)}{dt} + (I+A)u(t) \ni b \quad , \quad u(0) = a$$

は，定理2によると，任意に与えられた $b \in X$ と $a \in D(A)$ に対し，$[0, +\infty)$ 上で解 $u(t)$ をもつ。T. Kato [5] の Lemma 8.2 によると，$t_n \to +\infty$ なる数列 $\{t_n\}$ で $n \to \infty$ のとき $u(t_n) \longrightarrow u_0$ strongly in $X$，$du(t_n)/dt \longrightarrow 0$ strongly in $X$ となる様なものが存在する。A は demiclosed だから $(I+A)u_0 \ni b$ である。 即ち $R(I+A) = X$.　（終）

最後に定理3より得られる系を述べよう。

〔系1〕$X^*$, $A$を定理3におけると同じもの，$B$を$X$における m-accretive 作用素で，$D(B)\subset D(A)$とする。このとき，$A+B$は m-accretive である。

〔系2〕$X^*$を uniformly convex，$J$を連続かつ逆連続，$A$を$D(A)$が開集合であるような accretive 作用素とする。このとき，$A$が m-accretive であるための必要十分条件は$A$が maximal accretive となることである。

## References


[1] H. Brezis and A. Pazy, Accretive sets and differential equations in Banach spaces, Israel J. Math., 8 (1970), 367～383.

[2] B. Calvert, Maximal accretive is not m-accretive, Boll. Un. Mat. Italiana, S.4, 3 (1970), 1042～1044.

[3] M. Crandall and A. Pazy, Semi-group of nonlinear contractions and dissipative sets, J. Functional Anal., 3(1969), 376～418.

[4] T. Kato, Nonlinear semigroups and evolution equations, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 508~520.

[5] T. Kato, Accretive operators and evolution equations in Banach spaces, Proc. Symp. Nonlinear Functional Anal., Chicago, Amer. Math. Soc., 1 (1970) 138~161.

[6] A. Pazy, Semi-groups of nonlinear contractions in Hilbert spaces, C. I. M. E., Problems in non-linear analysis, (1971), 343~430.

[7] R. T. Rockafellar, Local boundedness of nonlinear monotone operators, Michigan Math. J., 16 (1969), 397~407.