数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 63-80

抽象的微分方程式の摂動について

早大 理工 実方宣洋

§1. 序

(B)-space X における線型作用素 A について，次の X における常微分方程式の初期値問題が考えられる。

(1) $$du(t)/dt = Au(t) \qquad u(0) = u_0$$

ここで扱う問題は，(1) が適当な意味で解ける場合，線型作用素 B にどれ位の条件を与えたならば，初期値問題

(2) $$du(t)/dt = (A+B)u(t) \qquad u(0) = u_0$$

が解けるかという事になる。

問題(1)が (C_0) well posed (又は，(1A) well posed) となる場合について，R. S. Phillips ([2]) による研究があり，I. Miyadera [3] ではさらにこれらの問題が，

(I) B が有界作用素のときの perturbation

(II) semi group 列の収束性

とに分解される事を示した。問題(II)については (C_0) s.gr. に対して，H. F. Trotter [10] の研究があり，(1A) s.gr. については I. Miyadera [3]，(0A) 及び (A) s.gr. に対しては S. Oharu and H. Sunouchi [5]，さらに $(C_{(k)})$ s.gr. に対して，T. Takahashi and S. Oharu [9] により拡張された。

問題(II) が拡張されているのであるから，問題(I) がいえれば同様な形の perturbation がいえるであろうが，(1) が (0A) well posed の場合すでに否定的である事を例で示す。しかし(I) は弱い形では成立する。§2. ではこの二つの事について述べる。§3 では I. Miyadera [4] の結果の一部分を紹介する。§4 では解作用素列の収束性について調べ，perturbation の問題に適用する。§5 では §4 で得られた結果を基に幾つかの事柄について調べた。

§2. 問題(I) について

初期値問題(1) が (0A) well posed となる場合について例を考える。Differential operator

$$P(D) = \begin{pmatrix} -D^2 + iD^4 & D^4 \\ 0 & -D^2 + iD^4 \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

を $L_2 = L_2(R_1) \times L_2(R_1)$ で考える。D を通常の意味にと

ると，$P(D)$ は preclosed であるがこの closure (the minimal operator) と D を distribution の意味で考えた operator (the maximal operator) とは一致するから，$A=\overline{P(D)}$ と書けば，$D(A)=\{u\in L_2\,;\,P(\xi)\hat{u}(\xi)\in L_2\}=H_4\times H_4$ ここで $u=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$ $\hat{u}(\xi)=\int e^{-ix\cdot\xi}u(x)\,dx$

この operator A に対して，Cauchy problem (1) は (0 A) well posed となる事が知られている (H. Sunouchi [8])。

Cauchy problem (2) における operator B として次のものを考える。

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \varepsilon & 0\end{pmatrix}$$

B は L_2 の有界作用素で，(2) は Fourier 変換により，形式的に，

$$(2)' \quad \begin{aligned} d\hat{u}(t\ \xi)/dt &= P(\xi)\hat{u}(t\ \xi)+B\hat{u}(t\ \xi)\\ \hat{u}(0\ \xi) &= \hat{u}_0(\xi)\end{aligned}$$

となる。Operator $Q(D)=A+B$ の resolvent を調べるため，matrix $\lambda I-Q(\xi)$ の逆を計算すれば，

$$(i)\quad \det(\lambda-Q(\xi))=(\lambda-(\sqrt{\varepsilon}-1)\xi^2-i\xi^4)\cdot(\lambda+(\sqrt{\varepsilon}+1)\xi^2-i\xi^4)$$

$$(ii)\quad (\lambda-Q(\xi))^{-1}=1/\det(\lambda-Q(\xi))\cdot\begin{pmatrix}\lambda+\xi^2-i\xi^4 & \xi^4\\ \varepsilon & \lambda+\xi^2-i\xi^4\end{pmatrix}$$

となり，もしも $\varepsilon>1$ ならば $Q(\xi)$ の固有値 $\lambda(\xi)=(\sqrt{\varepsilon}-1)\xi^2$

$+i\xi^4$ は Petrowsky の条件（[11] p.101）を満たさず s. gr. well posed ではない（H. Sunouchi [8]）。しかし作用素 $Q(D)$ は，最近発表された J. Chazarain [1] による Gevery class の distribution の意味では well posed となる。実際 $Q(D)$ の resolvent set $\rho(Q)$ は，(ii) より $\lambda \in \Lambda = \{\lambda ; Re\lambda \geq a|\lambda|^{1/d} + b\}$，$1 < d \leq 2$，$a = \sqrt{\varepsilon} - 1$，$b$：十分大，ならば，$\sup_\xi |(\lambda - Q(\xi))^{-1}| < \infty$ となる事から $\rho(Q) \supset \Lambda$。又 (ii) より容易に $\sup_\xi |(\lambda - Q(\xi))^{-1}| \leq Const. (1+|\lambda|)^2$，$\lambda \in \Lambda$ を示す事も出来，[1] THÉORÈME 4.4. を適用できる。一方 [1] の摂動に関する定理，THÉORÈME 6.2.，は作用素 $A = \overline{P(D)}$ が被摂動作用素に対する仮定，(DÉFINITION 6.1.)，$\rho(A) \supset \{\lambda ; Re\lambda > \omega\}$ & $\|R(\lambda : A)\| \leq M / Re\lambda$，を満たさないため，適用できない。

上記の例により問題 (I) は否定的であるが，(1) における作用素 A を class $G_2(\omega, k)$ に属すると仮定して，問題 (I) を弱い形で試みる。

定義 2.1. (B)-space X における closed linear operator A が，条件

(I ω) $\rho(A) \supset \{\xi \in K ; \xi > \omega\}$

$$(\mathrm{II}\, k) \quad \|R(\xi:A)^m x\| \leq M/(\xi-\omega)^m \cdot \sum_{j=0}^{k} \|A^j x\|$$

$$x \in D(A^k),\ \xi > \omega,\quad m = 1, 2, \cdots$$

を満たすとき A は $G_2(\omega\ k)$ に属すという。

$A \in G_2(\omega\ k)$ ならば，これから解作用素 $\{T(t;A)\}_{t>0}$ が構成される。詳細は [6] に示されている。又 $D(A^k)$ は norm $\|\cdot\|_k = \|\cdot\|_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} \|A^j \cdot\|$ により (B) space $[D(A^k)]$ となる。

命題 2.2. $A \in G_2(\omega, k)$，$B \in \mathcal{B}(X:[D(A^k)])$ ならば，ある実数 ω_1 が存在して，$A+B \in G_2(\omega_1\ k)$。さらに $D(A)$ が X で dense ならば $A+B$ により構成される解作用素 $\{T(t;A+B)\}_{t>0} \subset \mathcal{B}([D(A^k)]\ X)$ は，

$$T(t;A+B)x = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(t)x \qquad x \in D(A^k)$$

$$S_0(t)x = T(t;A)x \qquad (A\text{の解作用素})$$

$$S_{\nu+1}(t)x = \int_0^t T(t-s:A)BS_\nu(s)x\, ds$$

$$= \int_0^t S_\nu(t-s)BT(s:A)x\, ds$$

と表現できる。

命題 2.2. を示すため，$\xi - A - B = (\xi - A)(I - R(\xi A)B) = (I - BR(\xi A))(\xi - A)$ と書くと，

$$\|R(\xi A)Bx\| \leq M / \xi - \omega \, \|B\|_{(k)} \|x\| \qquad x \in X$$

$\|\cdot\|_{(k)}$ は，$\mathcal{B}(X\ D(A^k))$ の operator norm

より (B) space X で $(I - R(\xi A)B)^{-1}$ を Neumann 展開する事により $A+B$ に対して $(I\ \omega_1)$，$\omega_1 = \omega + M\|B\|_{(k)}$ が示される。(II k) を示すためには，

$$\|BR(\xi A)x\|_{D(A^k)} \leq M / \xi - \omega \, \|B\|_{(k)} \|x\|_{D(A^k)}$$

$$x \in D(A^k)$$

より (B) space $[D(A^k)]$ 上で $(I - BR(\xi A))^{-1}$ を Neumann 展開すれば，

$$R(\xi A+B)x = R(\xi A) \sum_{\nu=0}^{\infty} (BR(\xi A))^{\nu} x \qquad x \in D(A^k)$$

このべキを [2] に従って計算すると，

$$\|R(\xi A+B)^m x\| \leq M / (\xi - \omega_1)^m \, \|x\|_{D(A^k)}$$

$$x \in D(A^k) \qquad \xi > \omega_1 \qquad m = 1, 2, \cdots$$

ところで (II k) を示すためには上の評価式の右辺は $\|\cdot\|_{D(A^k)}$ ではなく $\|\cdot\|_{D(A+B)^k}$ でなければならない。そこで次の補題が必要である。

補題 2.3. A を $D(A)$ で定義された線型作用素，B を X から normed space $[D(A^k)]$ への有界作用素とすると，

$$D(A^j)=D((A+B)^j) \qquad j=1,2,\cdots,k+1$$

$$C^{-1}\|x\|_{D(A^j)} \le \|x\|_{D(A+B)^j} \le C\|x\|_{D(A^j)}$$

$$x\in D(A^j),\ C>0\ 定数,\qquad j=1,2,\cdots,k$$

が成立する。

この補題は帰納法で証明される。以上の事により命題 2.2 は証明される。

§3. 解作用素の構成について

この節では I. Miyadera [4] による一般的な解作用素の構成定理を紹介する。

X を(B)-space としてその norm を $\|\cdot\|$, Y を X の subspace で, $\|\cdot\|$ よりも強い norm $|||\cdot|||$ により(B)-space となるものとする。A を X の中の linear operator とするとき, Y の subspaces $Y_A, Y_{A^2}, \cdots Y_{A^n}\cdots$ を次の様に定める。

$$Y_A=\{x\in D(A)\cap Y\ ;\ Ax\in Y\}$$

$$Y_{A^2}=\{x\in Y_A\ ;\ Ax\in Y_A\}$$

$$\cdots$$

$$Y_{A^n}=\{x\in Y_{A^{n-1}}\ ;\ Ax\in Y_{A^{n-1}}\}$$

$$\cdots$$

A を Y_A へ制限したものを A_0 と書けば, $Y_A=D(A_0)$, $Y_{A^2}=D(A_0^2)$, $\cdots$ $Y_{A^n}=D(A_0^n)$ $\cdots$ 。

A に次の仮定を置く。

(a_1) Y の中の作用素として, A_0 は resolvent set, $\rho(A_0)$ を持ち,

$$\rho(A_0)\supset\{\xi\ ;\ \xi>\omega\}$$

(a_2) Y の中の作用素 A_0 の resolvent $R(\lambda)=R(\lambda,A_0)$ は,

$$\|R(\lambda)^m x\|\leq M/(\lambda-\omega)^m\ |||x|||$$

$$x\in Y,\quad \lambda>\omega,\quad m=1,2,\cdots$$

を満たす。

(a_1), (a_2) を満たす作用素 A に対して,

$$T_\lambda(t)x=e^{-\lambda t}\sum_{\nu=0}^{\infty}(\lambda t)^\nu(\lambda R(\lambda))^\nu x\,/\nu!$$

$$\lambda>\omega\qquad t\geq 0\qquad x\in Y$$

と置く。級数は $\|\cdot\|$ norm により収束する。又収束は $\lambda>\omega$ $t\geq 0$ に対して compact 一様収束。

命題 3.1. 作用素 A に条件 (a_1) (a_2) を仮定すると次の事が成立する。

(b_1) $T(t)x=\lim\limits_{\lambda\to\infty}T_\lambda(t)x$, $x\in Y_{A^2}$

が存在する。収束は $t\geq 0$ に対して compact 一様収束。

(b_2) $\|T(t)x\|\leq M\,e^{\omega t}\,|||x|||$ $\quad x\in Y_{A^2}\quad t\geq 0$

(b_3) $\|T(t)x - T(s)x\| \leq M/\omega \cdot |e^{t\omega} - e^{s\omega}| \cdot \|Ax\|$

$$x \in Y_{A^2} \qquad t, s \geq 0$$

$(b_4)'$ $T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_\lambda(s) Ax\, ds$

$$x \in Y_{A^2} \qquad t \geq 0$$

(b_4) $T(t)x - x = \int_0^t T(s) Ax\, ds$

$$x \in Y_{A^3} \qquad t \geq 0$$

(b_5) $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt$

$$\lambda > \omega \qquad x \in Y_{A^2}$$

ここでさらに条件

(a_3) A は X の中の閉作用素

を付け加えると。

$(b_6)'$ $A T_\lambda(t)x = T_\lambda(t)Ax \qquad x \in Y_A$

(b_6) $A T(t)x = T(t)Ax \qquad x \in Y_{A^3}$

［(b_1) の証明の概略］ $T_\lambda(t)x$ を λ について微分すれば，

$$\partial/\partial\lambda\ T_\lambda(t)x = -te^{-\lambda t} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\lambda t)^\nu (\lambda R(\lambda))^\nu R(\lambda)^2 A^2 x/\nu!$$

$$x \in Y_{A^2}$$

これより

$$\|T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x\| \leq \int_\mu^\lambda \|\partial/\partial\nu\ T_\nu(t)x\|\, d\nu$$

$$\leq t \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mu}^{\lambda} e^{-\nu t} \|(\nu t)^k (\nu R(\nu))^k R(\nu)^2 A^2 x\| / k! \, d\nu$$

$$\leq Mt \int_{\mu}^{\lambda} 1/(\lambda-\omega)^2 \ \exp(\nu t \omega / \nu - \omega) \, d\nu \ \|A^2 x\|$$

$$\longrightarrow 0 \qquad \text{as} \qquad \lambda, \mu \longrightarrow \infty$$

ここで $Y = [D(A^k)]$ と置けば，$G_2(\omega\, k)$ に属する作用素に対する解作用素が $D(A^{k+2}) = Y_{A^2}$ の上で構成される事に注意しておく（[6] では $D(A^{2k+1})$ の上で構成された）。尚 [4] ではさらに鋭く，$D(A^{k+1})$ の上で構成されている。

次に subspace Y_{A^j} へ norm $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_j = \sum_{i=0}^{j} \|A^i \cdot\|$ を導入して (B) space としよう。次の補題が成立する。

補題 3.2.　　A が Y の中の作用素として resolvent set を持つとする。もしも Y_A が $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$-dense in Y ならば，Y_{A^n} は $|\!|\!|\cdot|\!|\!|_k$-dense in Y_{A^k}, $n \geq k \geq 0$ 。

この補題から，

命題 3.3.　　仮定 (a_1), (a_2) にさらに仮定

(a_4)　Y_A は $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$-dense in Y

を加えると次の事が成立する。

(b_1), (b_2) は $x \in Y$ で成立。

$(b_3)'$　$T(t)x$ は $\|\cdot\|$-continuous in $t \geq 0$。$x \in Y$

(b_4) は $x \in Y_A$, 又 (b_5) は $x \in Y$ で成立。

ここでさらに条件 (a_3) を仮定すると

(b_6) は $x \in Y_A$ で成立。

以上の結果を基に，命題 2.2. と同様な結果が成立する。ここでは補題 2.3. は必要としない。

[命題 2.2]′　作用素 A が条件 $(a_1)(a_2)$ を満たすとする。$B \in \mathcal{B}(X;Y)$ ならば $A+B$ も条件 $(a_1)(a_2)$ を満たす。さらに A が条件 (a_4) を満たせば，$A+B$ も (a_4) を満たし，$A+B$ により構成された解作用素は命題 2.2 の表示で書ける。又 A が (a_3) を満たせば $A+B$ も (a_3) を満足する。

§4. Perturbing operator の近似

§3. の結果を基に，解作用素列の収束性の問題について考える。次の命題が成立する。

命題 4.1.　線型作用素の列 $\{A_n\}$ を一定の実数 ω により条件 (a_1) を満たすものとする，$\rho(A_n|_0) \supset \{\xi > \omega\}$。さらに条件

(C_1)　ある $\xi_0 > \omega$ とある $R(\xi_0) \in \mathcal{B}(Y)$ が存在して，

$$\lim_{n\to\infty} \| R(\xi_0 : A_n)x - R(\xi_0)x \| = 0 \qquad x \in Y$$

$$\mathcal{N}(R(\xi_0)) = \{0\}$$

(C_2) $\sup_n |||R(\xi;A_n)||| < \infty \qquad \xi>\omega$

(C_3) ある正数 M が存在して,

$$\|R(\xi;A_n)^m x\| \leq M/(\xi-\omega)^m \|x\|$$

$$\xi>\omega, \quad x\in Y, \quad n,m=1,2,\cdots$$

を仮定する。条件 $(a_1)(a_2)$ を満足する次の様な作用素 A が存在する。

(d_1) $\lim_{n\to\infty} |||R(\xi;A_n)x - R(\xi;A)x||| = 0$

$$\xi>\omega \qquad x\in Y$$

(d_2) $\{T(t;A)\}_{t>0}$, $\{T(t;A_n)\}_{t>0}$ をそれぞれ A, A_n より構成された解作用素とすると,

$$\lim_{n\to\infty} \|T(t;A_n)R(\xi;A_n)^2x - T(t;A)R(\xi;A)^2x\| = 0$$

$$\xi>\omega, \quad x\in Y$$

さらに条件

(C_4) 各 Y_{A_n} は $|||\cdot|||$-dense in Y, 又 $R(R(\xi_0))$ も $|||\cdot|||$-dense in Y。

を仮定すると, A は条件 (a_4) を満たし,

(d_3) $\lim_{n\to\infty} \|T(t\,A_n)x - T(t\,A)x\| = 0 \qquad x\in Y$

ここで perturbation の問題にもどり, 初期値問題 (1) を $(C_{(k)})$ well posed とする。作用素 A は $(C_{(k)})$ s.gr. $\{T(t,A)\}$ の c.i.g. である。([6], [9]) §3.に習って $Y=D(A^k)$

$\|\cdot\|_{D(A^k)} = |\!|\!|\cdot|\!|\!|$ と書く。次の条件を満足する作用素 B を考える。

(p₁) $D(B) \supset D(A^\infty) = \bigcap_{n\ge 1} D(A^n)$, $B(D(A^\infty)) \subset Y$

(p₂) 作用素の列 $\{B_n\} \subset \mathcal{B}(X;Y)$ が存在して,

$$\lim_{n\to\infty} |\!|\!| B_n x - Bx |\!|\!| = 0 \qquad x \in D(A^\infty)$$

(p₃) $$\sup_n \int_0^1 |\!|\!| B_n T(t;A)x |\!|\!| dt < \infty \qquad x \in Y$$

命題 4.2.　初期値問題 (1) を $(C_{(k)})$ *well posed* とする。作用素 B を条件(p₁),(p₂),(p₃) を満たすものとするとき, $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, $\forall \varepsilon$; $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ に対して, $A+\varepsilon B$ は (B)-space Y の中で閉包, $\overline{A+\varepsilon B}$, を持ち, $\overline{A+\varepsilon B}$ は条件 (a_1) (a_2), (a_4) を満たす。又

$$\lim_{n\to\infty} T(t; A+\varepsilon B_n)x = T(t; \overline{A+\varepsilon B})x \qquad x \in Y$$

が成立する。

§5. *Miscellanies*

命題 4.2. における $A+\varepsilon B$ が仮定 (a_3) を満たすための条件を求める。

命題 5.1.　命題 4.2. の仮定の基にさらに仮定

　ある $\xi_0 \in \rho(A)$ が存在して, $BR(\xi_0, A) \in \mathcal{B}(X)$

を加えると, $\varepsilon_1 > 0$ が存在して, $\forall \varepsilon$; $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ に対して, $D(A)$

上で定義されたXの中の作用素 $A+\varepsilon B$は ξ_0 を resolvent set の中にふくみ，条件 $(a_1),(a_2),(a_3),(a_4)$ を満たす。

次に $\overline{A+\varepsilon B}$ が resolvent set $=\phi$ の場合の $G_2(\omega,1)$ ([7]) に属するための条件を調べる。補題2.3.と類似な結論が成立すればよい。

[補題 2.3]′ Aを$D(A)$で定義された作用素として，Bを条件

$$D(B)\supset D(A),\quad \|Bx\|\leq a\|x\|+b\|Ax\| \qquad x\in D(A),\ a\geq 0,\ 1>b\geq 0$$

を満足する作用素とすると，正数$C>0$が存在して，

$$C^{-1}\|x\|_{D(A)}\leq\|x\|_{D(A+B)}\leq C\|x\|_{D(A)}$$

が成立する。

最後に作用素 B が $(p_1),(p_2),(p_3)$ を満たすための条件を調べる。

命題 5.2. 初期値問題 (1) を (A) well posed と仮定する。作用素Aは(A) s.gr. $\{T(t;A)\}_{t>0}$ の c.i.g. である。作用素Bに次の仮定

(g_1) $D(B)\supset D(A^{\infty})$, $B[D(A^{\infty})]\subset D(A^2)$

(g_2) ある $k_0\geq 0$, $\lambda_0\in\rho(A)$, $K>0$ が存在して，

$$\|BR(\lambda_0;A)^{k_0}x\|_{D(A^2)}\leq K\|x\| \qquad x\in D(A^{\infty})$$

(g_3) $\quad \int_0^1 \|BT(t;A)x\|_{D(A^2)}dt \leq K\|x\|_{D(A^2)} \qquad x \in D(A^\infty)$

を置くと，Bは条件 $(p_1)(p_2)(p_3)$ を満足する。又(1)が(OA) well posed と仮定した場合，仮定 (g_1)，(g_2)，(g_3) において，$D(A^2) \longrightarrow D(A)$，$\|\cdot\|_{D(A^2)} \dashrightarrow \|\cdot\|_{D(A)}$，と置き換えれば同様な結論が成立する。

系5.3. (1)を(OA) well posed と仮定して，閉作用素Bを，$D(B) \supset D(A)$，$B[D(A)] \subset D(A)$ を満足するものとすると，Bは条件 $(p_1)(p_2)(p_3)$ を満足する。

文献

[1] J. Chazarain, Problèmes de Cauchy Abstraits et Applications à Quelques Problèmes Mixtes, J. Funct. Analysis 7, 386-446 1971.

[2] E. Hille & R.S. Phillips, Functional Analysis and Semi Groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 1957

[3] I. Miyadera, Perturbation theory for semi groups of linear operators, 数学 20 (1968) 14-25

[4] I. Miyadera, Generation theorems of semi groups of linear operators, to appear

[5] S. Oharu and H. Sunouchi, On the Convergence of semi groups of linear operators, J. Funct. Analysis, vol 6,

No 2, October 1970.

[6] S. Oharu, Semi groups of linear operators in a Banach space, to appear.

[7] N. Okazawa and S. Oharu, Abstract Cauchy problems and semi groups of linear operators, to appear.

[8] H. Sunouchi, Convergence of semi discrete difference schemes of abstract Cauchy problems, Tôhoku Mat. Journ, vol. 22, 394-408 1970

[9] T. Takahashi and S. Oharu, Approximation of operator semi groups, to appear.

[10] H. F. Trotter, Approximation of semi groups of operators, Pacific J. Math., 8 (1958) 887-919

[11] 山口昌哉, 野木達夫, 数値解析の基礎, 共立出版