数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 81-93

作用素半群の近似

航空宇宙技研　高橋臣康

本稿は、Banach空間における線形作用素の族の列の収束について論じる。その作用素の族が有界線形作用素の半群(以下,簡単に半群)である場合には,H.F.Trotter [10]以来,最近の S.Oharu-H.Sunouchi [7]まで,多くの人により研究され,そして興味ある多くの結果が得られている。本稿で述べられる結果の一つは,これらの結果の拡張を与えている。

最近,[8]において,(抽象的)Cauchy問題の近似と収束の問題に対して,(A)-classの半群の収束定理[7]が応用されている。当然,この問題への本稿の結果の応用もまた考えられるが,ここでは,それについてはふれない。応用に対する詳しい結果は[9]を参照されたい。

本稿を通して,XはBanach空間,$\mathcal{B}(X)$はXからそれ自身への有界線形作用素の全体とする。さらに,扱う作用素は,常に線形とする。

§1. Convergence of solution operators.

<u>定義.</u> ωを実数. $k\geqq 0$を整数とする。$G_1(\omega,k)$, $G_2(\omega,k)$ はそれぞれ、次の $(\mathrm{I};\omega)$, $(\mathrm{II};k)$, そして $(\mathrm{I};\omega)$, $(\mathrm{II}_{exp};k)$ をみたす閉作用素 A の全体を表わす：

$(\mathrm{I};\omega)$ $\{\xi;\xi>\omega\}\subset\rho(A)=$（$A$の resolvent set）;

$(\mathrm{II};k)$ $^{\forall}T>0$, $^{\exists}M(T)>0$;

$$\|\xi^n R(\xi;A)^n x\|\leqq M(T)\sum_{i=0}^{k}\|A^i x\|,\quad x\in D(A^k),\ \xi>\omega,\ n\geqq 1,\ 0\leqq n/\xi\leqq T;$$

$(\mathrm{II}_{exp};k)$ $^{\exists}\omega_1\geqq\omega$, $^{\exists}M>0$;

$$\|R(\xi;A)^n x\|\leqq M(\xi-\omega_1)^{-n}\sum_{i=0}^{k}\|A^i x\|,\quad x\in D(A^k),\ \xi>\omega_1,\ n\geqq 1.$$

ここで. $R(\xi;A)$は点ξでのAの resolventで, $A^0=I$（恒等写像）である。

この定義から明らかなように. $G_2(\omega,k)\subset G_1(\gamma,k)$, 但し, $\gamma>\max\{0,\omega_1\}$。このことから. 本節では, 主に$G_1(\omega,k)$について論じる。$G_2(\omega,k)$に対する詳しい議論は[5]を参照されたい。

始めに. [6]において得られている次の定理を述べよう。

<u>定理 I.</u> $A\in G_1(\omega,k)$, $m=2k+1$ とすると、次の性質をもつ one-parameter family $\{U(t);t\geqq 0\}\subset\mathcal{B}([D(A^m)];X)$ 注1) が存在する：

(a). $U(t)x=\lim_{n\to\infty}(I-\frac{t}{n}A)^{-n}x$, $x\in D(A^m)$, $t\geqq 0$,

ここで, この収束は各有界区間$[0,\tau]$上一様に成り立つ。従

って，$U(t)x$ は $t \geqq 0$ に関して連続で，$t \to +0$ の時 $U(t)x \to x$；

(b)，$\| U(t)x \| \leqq M(T) \| x \|_k$，注1)　$x \in D(A^m)$，$t \in [0, T]$；

(c)，各整数 $p \geqq 1$ に対して，$U(t)[D(A^{m+p})] \subset D(A^p)$，そして $A^p U(t) x = U(t) A^p x$，$x \in D(A^{m+p})$，$t \geqq 0$；

(d)，$U(t+s)x = U(t)U(s)x$，　$x \in D(A^{2m})$，$t, s \geqq 0$；

(e)，各整数 $p \geqq 0$，各 $x \in D(A^{m+1+p})$ そして各 $T > 0$ に対して $\beta = \beta(x, p, T) > 0$ が存在して．

$$\| U(t)x - U(s)x \|_p \leqq \beta |t-s|,\quad t, s \in [0, T];$$

(f)．$U(t)x - x = \int_0^t U(s)Ax\,ds = \int_0^t AU(s)x\,ds$，$x \in D(A^{m+1})$，$t \geqq 0$。

さらにもし，$D(A)$ が X で稠密であるならば，上の命題(a)−(f)は，すべて $m = k$ でもって成り立つ。

注1)．A を閉作用素とすると，各整数 $k \geqq 0$ に対して，A^k の定義域 $D(A^k)$ は，ノルム $\| \cdot \|_k$：$\| x \|_k = \sum_{i=0}^{k} \| A^i x \|$，$x \in D(A^k)$，に関して Banach 空間となる。それを $[D(A^k)]$ と表わす。

この時，$\mathcal{B}([D(A^k)], X)$ は，$[D(A^k)]$ から X への有界作用素の全体を表わすものである。

注意．　最近，I. Miyadera [5] により，$G_2(\omega, k)$ に対応する定理は，$m = k+1$ で成り立つということが証明されている。

上の定理から容易にわかるように，各 $x \in D(A^{m+1})$ に対して，$u(t) \equiv U(t)x$ は次の方程式を満足する，一意な連続的微分可

能な X-値函数である：

$$\begin{cases} (d/dt)u(t) = Au(t), & t>0. \\ u(0) = x. \end{cases}$$

従って、以下では $U(t)$ を A から生成された解作用素と呼ぶことにする。

この節の目的は、次の定理を示すことである。

<u>定理 1.1.</u> 作用素の列 $\{A_n\} \subset G_1(\omega, k)$ が次の条件を満足しているものとする。

(I). 各 $\xi > \omega$ に対して $\sup_n \|R(\xi; A_n)\| < +\infty$;

(II). 各 $T>0$ に対して n に無関係な $M(T)>0$ があって

$\|\xi^m R(\xi; A_n)^m x\| \leqq M(T) \sum_{i=0}^{k} \|A_n^i x\|$, $x \in D(A_n^k)$, $\xi > \omega$, $m \geq 1$, $0 \leqq m/\xi \leqq T$;

(III). ある $\xi_0 > \omega$ に対して、次の性質をもつ $R(\xi_0) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する。

(i) $R(\xi_0) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} R(\xi_0; A_n)$, すなわち、各 $x \in X$ に対して $R(\xi_0)x = \lim_{n\to\infty} R(\xi_0; A_n)x$,

(ii) $R(\xi_0)$ は inverse $[R(\xi_0)]^{-1}$ をもつ。

この時、作用素 $A \in G_1(\omega, k)$ と A から生成される解作用素 $\{U(t);\, t \geqq 0\} \subset \mathcal{B}([D(A^{2k+1})], X)$ が存在して、

(a). $R(\xi; A) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} R(\xi; A_n)$, $\xi > \omega$,

(b). 任意の $x \in X$, $\xi > \omega$, そして $t \geqq 0$ に対して、各有界区間 $[0, \tau]$ 上一様に

$$\lim_{n\to\infty} U_n(t) R(\xi; A_n)^{2k+1} x = U(t) R(\xi; A)^{2k+1} x ,$$

ここに，$\{U_n(t); t \geqq 0\}$ は A_n から生成される解作用素の族である。

さらに，もし各 A_n の定義域 $D(A_n)$ が X で稠密で，(III)-(i), (ii) に加えて，$R(\xi_0)$ の値域 $R(\xi_0)[X]$ が X で稠密であるならば，上の結論は $2k+1$ の代わり k でもって成り立つ。

<u>証明の概略.</u>　まず始めに，(I) と (III)-(i) から，各 $\xi > \omega$ に対して，$s\text{-}\lim_{n\to\infty} R(\xi; A_n)$ の存在が示される（cf. T. Kato [3 ; Th. IX, 2.17]）。次に，(III)-(ii) を用いて $A \equiv I - [R(\xi_0)]^{-1}$ と定義すると，この A が求めるものである。

(b) の収束に関しては，次の二つの不等式が重要で，最初の不等式は，本質的には，M. Crandall - T. Liggett [1] によって得られているものである。

<u>補題 1.2.</u>　$\xi > \omega$ とする。この時，定理 1.1 の条件のもとで，各 $x \in X$ と $T > 0$ に対して，n に無関係な $K(x, T) > 0$ が存在して，$t \in [0, T]$ と十分大きな m に対して

$$\| U_n(t) R(\xi; A_n)^{2k+1} x - (I - \tfrac{t}{m} A_n)^{-m} R(\xi; A_n)^{2k+1} x \| \leqq t K(x, T)/\sqrt{m} ,$$

さらに，$t \in [0, T]$ に対して

$$\| U_n(t) R(\xi; A_n)^{2k+1} x - R(\xi; A_n)^{2k+1} x \| \leqq t K(x, T) .$$

<u>注意.</u>　$G_2(\omega, k)$ に対応する定理も同じように証明できる

が，[5]で与えられた結果（定理Iの下の注意）から，その結論は $k+1$ に改善できる。

§2. Convergence of semigroups.

本節では，前節で得られた結果を用いて，X上の半群の収束に関する一つの結果が与えられる。

定義. 作用素の族 $\{T(t)\,;\,t \geq 0\} \subset \mathcal{B}(X)$ がX上の半群であるとは，次の(2.1)，(2.2)が満足されていることである。

(2.1) $T(0)=I$, $\quad T(t+s)=T(t)T(s)$, $t, s \geq 0$.

(2.2) 各 $x \in X$ に対し，$T(t)x$ は $(0,\infty)$ 上で強連続．

通常のように，半群 $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ の生成作用素（i.g.）A_0 は，$\lim_{h\to+0} h^{-1}[T(h)x-x]$ が存在するような $x\in X$ に対して，

$$A_0 x \equiv \lim_{h\to+0} h^{-1}[T(h)x-x]$$

によって定義される。A_0 が閉包 $A=\overline{A_0}$ をもつならば，Aはこの半群の complete infinitesimal generator (c.i.g.) と呼ばれる。$\omega_0=\lim_{t\to\infty} t^{-1}\log\|T(t)\|$ $(<+\infty)$ をこの半群の type と呼び，$\Sigma=\{x\in X\,;\,\lim_{t\to+0} T(t)x=x\}$ をこの半群の continuity set という。作用素 $R_0(\lambda)$ は，次の積分が存在するような複素数 λ と $x\in X$ に対して

$$R_0(\lambda)x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$$

によって定義される。明らかに，$\mathrm{Re}(\lambda)>\omega_0$ ならば $\Sigma\subset D(R_0(\lambda))$．

<u>定義.</u> 半群 $\{T(t);\ t\geq 0\}$ が $(C_{(k)})$-class の半群であるとは，次の条件が満足されることである，

$(C;\mathrm{I})$ $X_0=\bigcup_{t>0}T(t)[X]$ は X で稠密．

$(C;\mathrm{II})$ ある $\omega_1>\omega_0$ があって，各 λ，$\mathrm{Re}(\lambda)>\omega_1$，に対し，次の性質をもつ $R(\lambda)\in\mathcal{B}(X)$ が存在する，

(i) $R(\lambda)x=R_0(\lambda)x$，$x\in X_0$，

(ii) $R(\lambda)x=0$，$x\in X$，ならば $x=0$．

$(C;k)$ $R(\lambda_0)^k[X]\subset\Sigma$ となるような整数 $k\geq 0$ と複素数 λ_0，$\mathrm{Re}(\lambda_0)>\omega_1$，が存在する。

<u>注意.</u> 条件 $(C;\mathrm{I})$，$(C;\mathrm{II})$ のもとでは，この半群の生成作用素 A_0 は，その定義域 $D(A)$ が稠密であるような閉包 $A=\overline{A_0}$ をもち，$R(\lambda)=R(\lambda;A)$，$\mathrm{Re}(\lambda)>\omega_1$，であることが知られている。従って，条件 $(C;k)$ は，次のように書き直すことができる；

$(C;k)$ $D(A^k)\subset\Sigma$ となるような整数 $k\geq 0$ が存在する．

。

この注意と，(C_0)-，$(1,A)$-，$(0,A)$-，そして (A)-class の半群のよく知られた事実から，$(C_0)=(C_{(0)})$，$(1,A)$，$(0,A)\subset(C_{(1)})$，そして $(A)\subset(C_{(2)})$ は明らかである。これら

の class の定義や性質に関しては，E. Hille-R. Phillips [2] を参照されたい。

次に，[6]で得られている $(C_{(k)})$-class の半群の生成定理を述べておこう．

<u>定理II.</u> A を X における作用素とする。このとき，A がある $(C_{(k)})$-class の半群の c.i.g. であるための必要十分条件は，$D(A)$ が X で稠密で，$A\in G_2(\omega,k)$，さらに次の条件が満足されることである：

(F; k) 各 $\varepsilon>0$ と $x\in D(A^k)$ に対し，次のような $M_\varepsilon>0$ と実数 $\xi_0=\xi_0(\varepsilon,x)$ が存在する；

$$\|\xi^n R(\xi;A)^n x\| \leqq M_\varepsilon\|x\|,\quad \xi>\xi_0,\ n\geqq 1,\ \varepsilon\leqq n/\xi\leqq 1/\varepsilon.$$

<u>注意.</u> 定理IIからわかるように，$(C_{(k)})$-class の半群 $\{T(t); t\geqq 0\}$ に対して，$T(t)|D(A^k)$，（$T(t)$ の $D(A^k)$ 上への制限），はその c.i.g. A によって生成された解作用素である。

この注意と定理1.1から次の定理の証明は容易である。

<u>定理2.1.</u> $\{T_n(t); t\geqq 0\}$ を $(C_{(k)})$-class の半群の列，$\{A_n\}$ をそれに対応する c.i.g. の列とし，次の条件が満足されているとする；

(I). $\{\xi;\xi>\omega\}\subset\rho(A_n)$ となるような実数 ω が存在し，

各 $\xi > \omega$ に対して $\sup_n \|R(\xi; A_n)\| < +\infty$,

(II exp). $\omega_1 \geqq \omega$ と, n に無関係な $M > 0$ があって

$$\|T_n(t)x\| \leqq M e^{\omega_1 t} \sum_{i=0}^{k} \|A_n^i x\|, \quad x \in D(A_n^k), \ t \geqq 0.$$

(III) ある $\xi_0 > \omega$ に対して, 次の性質をもつ $R(\xi_0) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する.

(i). $R(\xi_0) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} R(\xi_0; A_n)$.

(ii). $R(\xi_0)$ は inverse $[R(\xi_0)]^{-1}$ をもつ.

(iii). $R(\xi_0)[X]$ は X で稠密.

(IV). 各 $x \in X$ と $t > 0$ に対して, $\sup_n \|T_n(t)x\| < +\infty$.

この時.

(a). 作用素 A が存在し, A は $(C_{(k)})$-class の半群 $\{T(t); t \geqq 0\}$ を生成し, また $R(\xi_0) = R(\xi_0; A)$ である.

(b). 任意の $t > 0$ に対して, 各 $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ 上一様に

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n(t) = T(t).$$

<u>系 2.2.</u> 半群の列 $\{T_n(t); t \geqq 0\}$ が, 定理 2.1 の条件 (III), (IV) そして (I), (II exp) の代わりに

(I′). $\{\lambda; \mathrm{Re}(\lambda) > \omega\} \subset \rho(A_n)$ となるような実数 ω, そして, $\sup_n \|R(\lambda; A_n)\| \leqq p(|\lambda|)$, $\mathrm{Re}(\lambda) > \omega$, となるような次数 $l \geqq 0$ の非負係数をもつ多項式 P が存在する.

を満足しているとすると, 定理 2.1 の結論は, k の代わり

$l+2$ でもって成り立つ。

この系は、(I′) を満足すれば、$\gamma > \max\{0, \omega\}$ に対して $A_n \in G_2(\gamma, l+2)$ であるという事実([6]) から証明される。

次に、系 2.2 を用いて (A)-class の半群の列の収束定理([7]) を証明しよう。

系 2.3. (A)-class の半群の列 $\{T_n(t); t \geqq 0\}$ が次の条件を満足しているとする：

(A; I): $\sup_n \|R(\lambda; A_n)\| \leqq L$, $Re(\lambda) > \gamma$, となるような実数 γ と正数 L が存在する.

(A; II). ある λ_0, $Re(\lambda_0) > \gamma$, に対して

$$R(\lambda_0) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} R(\lambda_0; A_n)$$

となる $R(\lambda_0) \in \mathcal{B}(X)$ が存在する.

(A; III). n に関して一様に, $s\text{-}\lim_{n\to\infty} \lambda R(\lambda; A_n) = I$.

(A; IV). 各 $x \in X$ と $t > 0$ に対して, $\sup_n \|T_n(t)x\| < +\infty$.

この時,

(a). 作用素 A が存在して, A は (A)-class の半群 $\{T(t); t \geqq 0\}$ を生成し, また $R(\lambda_0) = R(\lambda_0; A)$ をみたす.

(b). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 各 $[\varepsilon, 1/\varepsilon]$ 上一様に

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n(t) = T(t) \quad .$$

この系は，次の事実，すなわち，条件(A;I)〜(A;IV)は，系2.2の $l=0$ に対する条件を示しているという事実から証明される。

この系から，定理2.1は，今までに得られている半群の列の収束定理（cf. [3]，[4]，[7]，[10]）の一つの拡張を与えていることがわかる。

§3. Variations.

最後に，応用上使いよい収束定理を示しておく。

いま，$\{A_n\} \subset G_1(\omega, k)$ を稠密な定義域 $D(A_n)$ をもつ作用素の列として，次の二つの条件を考える；

(III′)．次のような稠密な定義域 $D(A)$ をもつ閉作用素 A と集合 $D \subset X$ が存在する．

(i) $\rho(A) \cap \{\xi ; \xi > \omega\} \neq \phi$

(ii) D は A の core である．すなわち，$A|D$ の閉包は A に一致する．

(iii) $\lim_{n\to\infty} A_n x = Ax$, $x \in D$.

(IV′)．$D \subset D(A^k)$ で，$\lim_{n\to\infty} A_n^i x = A^i x$, $x \in D$，$2 \leq i \leq k$．

この時，条件(I)のもとで，条件(III)は(III′)から導かれる．(cf. [3])。従って，上で得られた二つの定理の variations

として，次の二つの定理を得る。

定理3.1. $\{A_n\} \subset G_1(\omega, k)$ が条件(I)，(II)そして(III')を満足しているとすると，定理1.1の後半の結論が成り立つ。

さらに，これらの条件に加えて，(IV')を満足すれば，各 $x \in D$ と $t \geqq 0$ に対して，各 $[0, T]$ 上一様に

$$\lim_{n \to \infty} U_n(t)x = U(t)x .$$

定理3.2. $(C_{(k)})$-class の半群の列 $\{T_n(t); t \geqq 0\}$ が条件(I)，(II_{exp})，(III')そして(IV)を満足しているとすると，定理2.1と同じ結論が成り立つ。

この定理3.1と定理3.2は，Cauchy問題のsemi-discrete difference schemeの収束に対して適用できる。しかし，「序」でも述べたように，その詳しい結果については，[8]と[9]を参照されたい。

文献

[1]. M. Crandall and T. Liggett, Generation of semigroups of nonlinear transformations on general Banach spaces, (to appear).

[2]. E. Hille and R. Phillips, Functional Analysis and Semi-Groups, Amer. Math. Soc. Collog. Publ., 31 (1957).

[3]. T. Kato, Perturbation theory for linear operators,

Springer, (1966).
[4]. I. Miyadera, Perturbation theory for semi-groups of operators, (Japanese) Sûgaku, 20(1), (1968), 14-25.
[5]. I. Miyadera, Generation theorems of semi-groups of linear operators, (to appear).
[6]. S. Oharu, Semigroups of linear operators in a Banach space, (to appear).
[7]. S. Oharu and H. Sunouchi, On the convergence of semigroups of linear operators, J. Func. Anal., 6 (1970), 292-304.
[8]. H. Sunouchi, Convergence of semi-discrete difference schemes of Cauchy problems, Tôhoku Math. J., 22 (1970), 394-408.
[9]. T. Takahashi and S. Oharu, Approximation of operator semigroups, (to appear).
[10]. H. F. Trotter, Approximation of semigroups of operators, Pacific J. Math., 8 (1958), 887-919.
[11]. K. Yoshida, Functional Analysis, Springer, Berlin, (1965).