数理解析研究所講究録
第134巻 1972年 94-98

Cauchy 問題の hyperfunction 解について

東京都立大学　理学部
大内　忠

Banach space X における abstract Cauchy 問題

$$(A.C.P)\qquad \begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(+0) = a \qquad a \in X \end{cases}$$

の一般化された解，ここでは Sato の hyperfunction 解についての一連の結果を述べる。

Distribution 解については J. L. Lions [4] が最初にこの問題をとりあげ，J. Chazarain [1]，G. Da Prato and U. Mosco [2]，D. Fujiwara [3]，T. Ushijima [6] 等の研究がある。

Banach space に値をとる一変数 hyperfunction の定義，Cauchy 問題の hyperfunction の意味での well-posedness の定義は S. Ōuchi [5] を見られたい。なお，そこには主として定義と結果が述べてあるが，定理 1 については証明の概略も述べてある。

さて結果を述べよう。

定理 1

閉作用素 A が hyperfunction の意味で well-posed であるための必要十分条件は，A の resolvent が次の条件を満たすことである。

任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある k_ε があり

$$\Sigma_\varepsilon = \{\lambda ; \operatorname{Re}\lambda \geq \varepsilon |\operatorname{Im}\lambda| + k_\varepsilon\} \subset \rho(A)^{*} \text{ でかつ}$$

$$\|(\lambda-A)^{-1}\| \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|\lambda|) \quad (\lambda\in\Sigma_\varepsilon) \text{ が成り立つ}$$

上述の定理 1 より，distribution の意味で well-posed な閉作用素 A は，hyperfunction の意味で well-posed となることが，J. Chazarain [1] と比較することによりわかる。

定理 1 の条件のもとで，(A. C. P)** に対して基本解が hyperfunction の中に存在する。もし，A が C_0 半群の生成作用素の時は基本解は Hille-Yosida の定理にいうところの C_0 半群であり，A が distribution の意味で適切(well-posed)である時は，基本解は distribution semi group である。

以下において，regularity に関する結果を述べる。

定理 2

閉作用素 A が hyperfunction の意味で well-posed であり

* A の resolvent set　　** (A. C. P) は Abstract Cauchy Problem の略

かつ，基本解が $t>0$ で実解析的であるための必要十分条件は，A の resolvent が次の条件を満たすことである．

任意の $\varepsilon>0$ に対して，k_ε と $0<\delta_\varepsilon\leq\varepsilon$ があり

$\Sigma_\varepsilon=\{\lambda;\ \varepsilon\,\mathrm{Re}\,\lambda\geq-\delta_\varepsilon|\mathrm{Im}\,\lambda|+k_\varepsilon\}\subset\rho(A)$ でかつ

$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leq C_\varepsilon\exp(\varepsilon|\mathrm{Re}\,\lambda|+\delta_\varepsilon|\mathrm{Im}\,\lambda|)\quad(\lambda\in\Sigma_\varepsilon)$ が

成りたつ．

定理３

閉作用素 A が hyperfunction の意味で well-posed であり，かつ基本解が sector $\Sigma=\{z;\ |\arg z|<\alpha,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\}$ に正則に拡張されるための必要十分条件は，A の resolvent が次の条件を満たすことである．

任意の $\varepsilon>0$ に対して，実数 ω_ε があり

$\Sigma_\varepsilon=\{\lambda;\ |\arg(\lambda-\omega_\varepsilon)|<\frac{\pi}{2}+\alpha-\varepsilon\}\subset\rho(A)$ でかつ

$\|(\lambda-A)^{-1}\|\leq C_\varepsilon\exp(\varepsilon|\lambda|)$ が成りたつ。
$(\lambda\in\Sigma_\varepsilon)$

定理２，３は解の解析性 (analyticity) に関する定理であるが，解の解析性については hyperfunction 的考え，即ち正則函数の境界値としてとらえることが極めて有用であることを注意しておく。　実際，定理２，３はそのような考え方を用

いて証明がなされる。これはまたおもしろい証明法であると思われる

以上，結果の羅列と簡単な remarks ばかりであるが，前にも述べたように，定義等は S. Ōuchi [5] を見て欲しい。なお，詳細は別に発表する予定である。

References

[1]. J. Chazarain : Problème de Cauchy et applications à quelques problèmes mixtes. (to appear in J. Funct. Analysis).

[2] G. Da Prato and U. Mosco : Semi gruppi distribuzioni analitici. Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19. (367~396) (1965)

[3]. D. Fujiwara : A characterization of exponential distribution semi-groups. J. Math. Soc. Japan. 18 (3), (267 ~ 274) (1966)

[4] J. L. Lions : Les semi groupes distributions. Portug. Math., 19, (141~164) (1960)

[5] S. Ōuchi : Hyperfunction Solutions of the Abstract Cauchy problem. Proc. Japan Acad. 47 (541~544) (1971)

[6] T. Ushijima: Some properties of regular distribution semi-groups. Proc. Japan Acad. 45 (224-227) (1969).