数理解析研究所講究録
第 136 巻 1972 年 119-132

Stokes 作用素等の分数巾の定義域について

東大理　森本浩子
藤田　宏

§1. 記号と結果

Ω は R^3 の有界領域で、その境界 $\partial\Omega$ は滑らかとする。$L_p(\Omega)$ は、Ω 上で定義された p 乗可積分な実函数を成分とするベクトル全体、$W_p^l(\Omega)$ は、l 階までの微分が $L_p(\Omega)$ に属するようなベクトル函数全体とする。$D_\sigma(\Omega)$ は Ω にコンパクトな台を持つ無限回微分可能な実ベクトル函数 φ で、$\operatorname{div}\varphi = 0$ をみたすもの全体とする。さらに、$H_\sigma(\Omega)$ は、$D_\sigma(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ での閉包、$H_\sigma^1(\Omega)$ は $D_\sigma(\Omega)$ の $W_2^1(\Omega)$ での閉包とする。$L_2(\Omega)$ から $H_\sigma(\Omega)$ への正射影を P であらわす。$D_\sigma(\Omega)$ で定義された作用素 $-P\Delta$ は、ヒルベルト空間 $H_\sigma(\Omega)$ で正定値対称作用素である。$-P\Delta$ の Friedrichs 拡張を A であらわし、Stokes 作用素と呼ぶ。A は正定値自己共役作用素である。$f \in L_2(\Omega)$ としよう。$Au = Pf$ は、次に同値である。

$$\begin{cases} \Delta u - \nabla p = -f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

但し、pはあるスカラー函数である。作用素Sの定義域を$D(S)$であらわすことにすれば、$D(A) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}_\sigma^1(\Omega)$が知られている。(Agmon-Douglis-Nirenberg [1]、Cattabriga [2]、Ladyzhenskaya [8])

本稿では、Aの分数巾A^α ($0<\alpha<1$) の定義域$D(A^\alpha)$の特徴付けを、Dirichlet境界条件のもとでの$B = -\Delta$のそれに関連して与える(定理1.2)。但し、$D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$、ここに$\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$は$C_0^\infty(\Omega)$(ベクトル函数)の$W_2^1(\Omega)$における閉包である。定理1.2の結果は、§4で示すように、ナビエ-ストークス方程式の研究に有用である。定理1.2は、すでにFujita-Morimoto [3]で証明されているが、今回は問題を一般化した形での証明を試みる(補題2.3)。この補題は、$D(B^\alpha)$の特徴付けに関する既知の結果(Fujiwara [5], Grisvard [6]等による)の一部を証明するのにも役立つ。読者の便宜のために、定理の形でのべておこう。

<u>定理1.1</u>

$$D(B^\alpha) = W_2^{2\alpha}(\Omega), \qquad \tfrac{1}{4} > \alpha > 0,$$
$$D(B^\alpha) = \{ u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\Omega);\ \rho^{-\frac{1}{2}} u \in L_2(\Omega) \}, \qquad \alpha = \tfrac{1}{4},$$

$$D(B^\alpha)=\{u\in W_2^{2\alpha}(\Omega)\ ;\ u|_{\partial\Omega}=0\},\quad 1>\alpha>\frac{1}{4},$$

但し、$\rho(x)$は点xの$\partial\Omega$からの距離をあらわす。

我々の主要な結果は、次の定理である。

<u>定理 1.2</u>

$$D(A^\alpha)=D(B^\alpha)\cap H_\sigma,\qquad 1>\alpha>0.$$

<u>注意 1.3</u>

次の不等式をみたす正定数C_αが存在する。

$$\frac{1}{C_\alpha}\|B^\alpha u\|\leq\|A^\alpha u\|\leq C_\alpha\|B^\alpha u\|$$

$$(u\in D(A^\alpha)=D(B^\alpha)\cap H_\sigma).$$

上の二つの定理とソボレフの埋蔵定理を用いて、

<u>系 1.4</u>

$$D(A^\gamma)\subset C(\bar\Omega),\qquad \gamma>\frac{3}{4},$$

$$D(A^\theta)\subset W_p^1(\Omega),\qquad 1>\theta>\frac{1}{2},\quad \frac{1}{p}=\frac{5}{6}-\frac{2\theta}{3},$$

特に $D(A^{\frac{5}{8}})\subset W^1_{\frac{12}{5}}(\Omega)$。

§2. 部分空間の補間空間に関する一補題.

我々は実補間法を用いる。たとえば、Lions-Peetre [11]を参照されたい。X, Y, Zはバナッハ空間とし、分離公理をみたす線型位相空間$\mathfrak{X}$が存在して、X, Y, Zは$\mathfrak{X}$に含まれ、かつ埋込みは連続であるとする。これを$X\subsetneq\mathfrak{X}$などと書くことがある。

定義によれば、$a \in S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ は $u : (0, \infty) \to \mathcal{X}$ で $\int_0^\infty \| t^{1-\alpha} u(t) \|_X^2 \frac{dt}{t} < +\infty$, $\int_0^\infty \| t^{-\alpha} u(t) \|_Y^2 \frac{dt}{t} < +\infty$ をみたす u によって $a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$ とあらわされる。平均空間 $S(2, 1-\alpha, X; 2, -\alpha, Y)$ を $[X, Y]_{1-\alpha}$ と書くことにしよう。$X \cap Y$, $X + Y$ には次のノルムを入れて、バナッハ空間とみなす。

$$\| u \|_{X \cap Y} = \max (\| u \|_X , \| u \|_Y)$$

$$\| u \|_{X+Y} = \inf_{u = x + y} (\| x \|_X + \| y \|_Y)$$

$\mathcal{L}(X, Y)$ は、X から Y への有界線型作用素全体とする。
平均空間に対して、次の補間定理が成立つ。

<u>定理 2.1</u> (Lions-Peetre [11])

X_i, Y_i ($i = 0, 1$) は、バナッハ空間で $X_i \subsetneq \mathcal{X}$, かつ $Y_i \subsetneq \mathcal{Y}$ とする。このとき $T \in \mathcal{L}(X_0, Y_0) \cap \mathcal{L}(X_1, Y_1)$ ならば $T \in \mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)$ でかつ作用素ノルムは次の不等式をみたす。

$$\| T \|_{\mathcal{L}([X_0, Y_0]_\theta, [X_1, Y_1]_\theta)} \leq \| T \|_{\mathcal{L}(X_0, Y_0)}^{1-\theta} \| T \|_{\mathcal{L}(X_1, Y_1)}^{\theta}$$
$$(1 > \theta > 0).$$

<u>定理 2.2</u> (Lions-Peetre [11])

X, Y は上にのべたバナッハ空間の組とする。この時

$$\left[[X, Y]_{\theta_0} , [X, Y]_{\theta_1} \right]_\theta = [X, Y]_{(1-\theta)\theta_0 + \theta\theta_1}$$

但し $0<\theta<1$ 。

部分空間の補間空間に関して、次の補題が成立つ。

補題 2.3

Kは $\mathcal{H}$ で定義された線型作用素で　次の性質を持つとする。

i) $K \in \mathcal{L}(X, X\cap Z) \cap \mathcal{L}(Y, Y\cap Z)$

ii) $K\varphi=\varphi$ for $\varphi \in (X+Y)\cap Z$.

このとき

$$[X,Y]_\theta \cap Z = [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta$$

証明

$[X,Y]_\theta \cap Z \supsetneqq [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta$ は明らかである。従って逆むきの包含関係を導けばよい。仮定 i) と定理2.1 により、$K \in \mathcal{L}([X,Y]_\theta, [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta)$ である。ところが ii) より $\varphi \in [X,Y]_\theta \cap Z$ に対しては $K\varphi=\varphi$ が成立つ。故に $[X,Y]_\theta \cap Z \subsetneqq [X\cap Z, Y\cap Z]_\theta$.

証明終り

注意 2.4

この補題は他の補間法による補間空間についても成立つことは明らかである。

問題 2.5

補題 2.3 に関連して、次の等号が成立つ条件を調べよ。

$$[X, Z]_\theta \cap [Y, Z]_\theta = [X \cap Y, Z]_\theta .$$

たとえば X, Y が、ヒルベルト空間 Z で定義された正定値自己共役作用素 A, B の定義域で、かつ A, B が可換であれば等号が成立つ（Lions-Magenes [10] Chap 1）。バナッハ空間の場合，閉作用素 A, B にある種の可換性を仮定すれば等号が成立つことも知られている（Muramatsu [12]）。

補題 2.3 の応用として $D(B^\alpha)$ $(1 > \alpha > \frac{1}{2})$ の特徴付けをおこなうことが出来る。まず、次の補題をのべておこう。これは Lions [9] の定理の特別な場合である。

補題 2.6

H はヒルベルト空間，S は H における正定値自己共役作用素とする。このとき $D(S^\alpha) = [D(S), H]_{1-\alpha}$ が成立つ。

この補題と定理 2.2 によれば $D(B^{1-\theta}) = [D(B), D(B^{1/2})]_{2\theta}$, 但し $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$。$D(B) = W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $D(B^{1/2}) = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ は既知である。$u \in W_2^1(\Omega)$ の境界値 γu に対して、次の境界値問題を考えよう。

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } \Omega , \\ \gamma v = \gamma u & \text{on } \partial\Omega . \end{cases}$$

この解を v とする。楕円型方程式の一般論（たとえば Lions-Magenes [10] Chap. 2）より、評価

$$\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c\,\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$
$$\|v\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c\,\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)},$$

が成立つ。又トレース作用素に関して、次の評価が成立つ。

$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)},$$
$$\|\gamma u\|_{W_2^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

$Ku \equiv u - v$ で定義される作用素 K は、$X = W_2^2(\Omega)$, $Y = W_2^1(\Omega)$, $Z = \mathring{W}_2^1(\Omega)$ として補題2.3の仮定をみたすことは容易にたしかめられる。従って、$[W_2^2(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega), \mathring{W}_2^1(\Omega)]_{2\theta} = [W_2^2(\Omega), W_2^1(\Omega)]_{2\theta} \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$、故に、
$D(B^{1-\theta}) = W_2^{2-2\theta}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^1(\Omega)$, $1 > 1-\theta > \frac{1}{2}$。

§3. 定理1.2の証明

Cattabriga [2], Ladyzhenskaya [8] によって、次の事実が証明されている。

<u>補題 3.1</u>

定数 c_1, c_2 が存在して、すべての $\psi \in H_\sigma(\Omega)$ に対して、次の不等式が成立つ。

$$\|\Delta A^{-1}\psi\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|A^{-1}\psi\|_{W_2^2(\Omega)} \leq c_2 \|\psi\|_{L_2(\Omega)}.$$

さて、補題2.6により、$D(A^\alpha) = [D(A), H_\sigma]_{1-\alpha}$, $D(B^\alpha) = [D(B), L_2]_{1-\alpha}$ である。$D(A) = D(B) \cap H_\sigma$ であることと

に注意しよう。 $D(B)$ の元 φ に対し、$\mathring{K}\varphi = -A^{-1}PB\varphi$ で作用素 $\mathring{K}$ を定義する。 $\mathring{K}$ は、$D(B)$ の元を $D(A)$ にうつす。補題 3.1 により、$\mathring{K}$ は、$K \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), H_\sigma(\Omega))$ に拡張される。 φ を $D_\sigma(\Omega)$ の任意の元としよう。 定義により、$-PB\varphi = A\varphi$, 故に $\mathring{K}\varphi = \varphi$ である。 $D_\sigma(\Omega)$ は $H_\sigma(\Omega)$ で dense だから、任意の $\varphi \in H_\sigma(\Omega)$ に対して $K\varphi = \varphi$ が成立つ。 $D(A^\alpha)$ (resp. $D(B^\alpha)$) に ノルム $\|A^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$ (resp. $\|B^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}$) を入れてヒルベルト空間とみなすと、$K$ は $D(B)$ を $D(A)$ にうつす有界作用素で 任意の $\varphi \in D(B)$ に対し、$\|K\varphi\|_{D(A)} \leq \|\varphi\|_{D(B)}$ が成立つ。 $X = D(B)$, $Y = L_2(\Omega)$, $Z = H_\sigma(\Omega)$ として補題 2.3 を用いることが出来て、$[D(B), L_2]_{1-\alpha} \cap H_\sigma = [D(B) \cap H_\sigma, L_2 \cap H_\sigma]_{1-\alpha}$ 。故に定理は証明された。

注意 3.2

定理 2.1 により、特に $K \in \mathcal{L}(D(B^\alpha), D(A^\alpha))$ である。さらに、任意の $\varphi \in D(B^\alpha)$ に対して次が成立つ。

$$\|A^\alpha K\varphi\| \leq \|K\|^{\alpha}_{\mathcal{L}(D(B), D(A))} \|K\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(L_2, H_\sigma)} \|B^\alpha\varphi\|$$

故に $\quad \|A^\alpha K\varphi\| \leq \|K\|^{1-\alpha}_{\mathcal{L}(L_2, H_\sigma)} \|B^\alpha\varphi\|$.

この不等式は、一般化された Heinz の不等式 (Kato [7]) からも導びかれる。

§4. ナビエ・ストークス方程式（Fujita-Morimoto [4]）

次の初期値問題を考察しよう。

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = -Au + Fu + Pf \\ u(0) = a \end{cases}$$

但し，$Fu = -P(u\cdot\nabla)u$ である。

次の補題から始めよう。

補題 4.1

正定数 c_0 が存在して，$D(A^{\frac{5}{8}})$ の任意の元 u, v に対して，次の不等式が成立つ。

$$\|Fu\| \leq c_0 \|A^{\frac{5}{8}}u\|^2.$$

$$\|Fu - Fv\| \leq c_0\left(\|A^{\frac{5}{8}}u\| + \|A^{\frac{5}{8}}v\|\right)\|A^{\frac{5}{8}}(u-v)\|.$$

証明

Hölder の不等式により

$$\|Fu\| = \|-P(u\cdot\nabla)u\| \leq \|u\|_{L_{12}} \|\nabla u\|_{L_{\frac{12}{5}}}.$$

Sobolev の埋蔵定理によれば $W^1_{\frac{12}{5}} \subset L_{12}$ であるから

$$\|Fu\| \leq C\|\nabla u\|^2_{L_{\frac{12}{5}}}$$

系 1.4 によれば $D(A^{\frac{5}{8}}) \subset W^1_{\frac{12}{5}}$，故に ある正定数 c_0 が存在して

$$\|Fu\| \leq c_0 \|A^{\frac{5}{8}}u\|^2.$$

二番目の不等式も同様にして導かれる。　　　証明終り．

方程式 (E) の解を，函数空間 $\mathcal{S}_T$ $(T \geq 0)$ で求める。

$\mathcal{S}_T$ は、次のように定義される。

$$\mathcal{S}_T \equiv \{ u : (0, T] \to D(A^{\frac{5}{8}}) \text{ 連続 } ;$$
$$|||u|||_T \equiv \sup_{0<t\leq T} t^{\frac{3}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} u(t) \|_{L_2(\Omega)} < +\infty \}$$

$\mathcal{S}_T$ は、ノルム $|||u|||_T$ で、バナッハ空間となる。

簡単のために、外力 $Pf = 0$ の場合を扱う。積分作用素 Φ を次のように定義しよう。

$$u_0(t) = e^{-tA} a$$

$$\Phi u(t) = u_0(t) + \int_0^t e^{-(t-s)A} F u(s) ds .$$

$u_0 \in \mathcal{S}_T$ ならば Φ は $\mathcal{S}_T$ の元を $\mathcal{S}_T$ にうつす。なぜならば、補題4.1 により、

$$\int_0^t \| A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A} F u(s) \| ds$$
$$\leq c_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} \| A^{\frac{5}{8}} u(s) \|^2 ds$$
$$\leq c_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds \sup_{0<s\leq t} \| s^{\frac{3}{8}} A^{\frac{5}{8}} u(s) \|^2 .$$

しかるに、積分 $\int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} s^{-\frac{6}{8}} ds = t^{-\frac{3}{8}} \beta_1$ （$\beta_1 = B(\frac{3}{8}, \frac{1}{4})$, $B(\cdot, \cdot)$ はベータ函数）であるから、不等式

$$(*) \qquad |||\Phi u|||_T \leq |||u_0|||_T + c_0 \beta_1 |||u|||_T^2 .$$

を得る。ここで定数 r と、$\mathcal{S}_T$ の閉球 $\mathcal{B}_T$ を次のように定めよう。

$$r \equiv |||u_0|||_T \cdot 4 c_0 \beta_1$$

$$\mathcal{B}_T \equiv \{ u \in \mathcal{S}_T ; |||u|||_T \leq 2 |||u_0|||_T \}$$

この時、Φ に関して次の命題が成立つ。

命題 4.2

i) Φは $\mathcal{B}_T$上 係数 rの Lipschitz 連続である。 すなわち、$u, v \in \mathcal{B}_T$ ならば

$$|||\Phi u - \Phi v|||_T \leqslant r\, |||u - v|||_T .$$

ii) $r \leqslant 1$ ならば $\mathcal{B}_T$は Φで不変である。

証明

i) 補題 4.1 を用いれば

$$\|A^{\frac{5}{8}}(\Phi u - \Phi v)\|$$

$$\leqslant \int_0^t \|A^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A}(Fu(s) - Fv(s))\|\, ds$$

$$\leqslant C_0 \int_0^t (t-s)^{-\frac{5}{8}} \left(\|A^{\frac{5}{8}}u(s)\| + \|A^{\frac{5}{8}}v(s)\|\right) \|A^{\frac{5}{8}}(u(s) - v(s))\|\, ds$$

故に $|||\Phi u - \Phi v|||_T \leqslant c_0\beta_1 \left(|||u|||_T + |||v|||_T\right) |||u - v|||_T .$

$u, v \in \mathcal{B}_T$ であるから、

$$|||\Phi u - \Phi v|||_T \leqslant 4c_0\beta_1 |||u_0|||_T\, |||u - v|||_T$$

$$= r\, |||u - v|||_T$$

ii) 不等式 $(*)$ を $u \in \mathcal{B}_T$ に対して用いれば

$$|||\Phi u|||_T \leqslant |||u_0|||_T + 4c_0\beta_1 |||u_0|||_T^2$$

$$\leqslant (1 + r)\, |||u_0|||_T .$$

従って $r \leqslant 1$ ならば $\Phi u \in \mathcal{B}_T$ である。 証明終り。

命題 4.3

$r \equiv 4c_0\beta_1 |||u_0|||_T < 1$ となる正数 Tが存在すれば、作用素 Φは contraction である。 従って不動点がたゞ1つ存

在する。

証明

命題4.2より直ちに従う。

<u>注意4.4</u>

条件 $\gamma<1$ は、どのような場合にみたされるかを調べよう。

(イ) $a\in D(A^{\frac14})$ の時.

$$t^{\frac38}\|A^{\frac58}e^{-tA}a\| = t^{\frac38}\|A^{\frac38}e^{-tA}A^{\frac14}a\| \leq \|A^{\frac14}a\|$$

であるから、$4c_0\beta_1\|A^{\frac14}a\|<1$ が成立つほどに $\|A^{\frac14}a\|$ が小さければ、$T=\infty$ ととれる。又、任意の $a\in D(A^{\frac14})$ に対して、$\|t^{\frac38}A^{\frac58}u_0(t)\|\longrightarrow 0$ ($t\to 0$) であるから、$\gamma<1$ となるような $T=T(a)$ 存在する。

(ロ) $a\in D(A^{\frac14+\varepsilon})$ ($\varepsilon>0$) の時.

$$\begin{aligned} t^{\frac38}\|A^{\frac58}u_0(t)\| &= t^{\varepsilon}\cdot t^{\frac38-\varepsilon}\|A^{\frac38-\varepsilon}e^{-tA}A^{\frac14+\varepsilon}a\| \\ &\leq T^{\varepsilon}\|A^{\frac14+\varepsilon}a\| \end{aligned}$$

故に、$T^{\varepsilon}<\left(4c_0\beta_1\|A^{\frac14+\varepsilon}a\|\right)^{-1}$ なる T に対して $\gamma<1$ となる。

Φの不動点は、実は方程式(E)をみたすことが証明出来るが、ここでは省略する。

<u>定理 4.5</u>

$\gamma<1$ となる $T>0$ が存在するとき、(E)の解が $\mathcal{B}_T$

のうちにただ1つ存在する。

文献

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic differential equations satisfying general boundary conditions.
I : Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), 623-727;
II : Comm. Pure Appl. Math., 17 (1964), 35-92.

[2] L. Cattabriga, Su un problema al contorno relativo al sistema di equazioni di Stokes, Rend. Semi. Mat. Univ. Padova, 31 (1961), 308-340.

[3] H. Fujita and H. Morimoto, On fractional powers of the Stokes operator, Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1141-1143.

[4] H. Fujita and H. Morimoto, Fractional powers of operators and intepolation of spaces applied to the Navier-Stokes equation (to appear)

[5] D. Fujiwara, L^p theory for characterizing the domain of the fractional powers of $-\Delta$ in the half space, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 15 (1968), 169-177.

[6] P. Grisvard, Caractérisatión de quelques espaces d'interpolation, Arch. Rat. Mech. Anal, 25 (1967), 40-63.

[7] T. Kato, A generalizatión of the Heinz inequality, Proc. Japan Acad., 37 (1961), 305-308.

[8] O. A. Ladyzhenskaya, The mathematical theory of viscous incompressible flow, Gordon-Breach, New York, 1963.

[9] J.L. Lions, Espaces d'interpolatión et domaines de puissances fractiónnaires d'opérateurs, J. Math. Soc. Japan, 14 (1962), 233-241.

[10] J.L. Lions and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes Vol I, Dunod, Paris, 1968.

[11] J.L. Lions and J. Peetre, Sur une classe d'espaces d'interpolatión, Publ. Math. de l'I. H. E. S., Paris, No 19, 1964.

[12] T. Muramatsu, Products of fractiónal powers of operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), 581-590.