数理解析研究所講究録
第 136 巻 1972 年 133-153

退化した楕円型方程式に対する境界値問題と分数巾のソボレフ空間について

立命大　理工　中岡　明

§1. 序

ここでは、次の方程式をとり扱う。

$$
(1,1)\quad \begin{cases} -p(x)A(x,D)u + \sum_{j=1}^{n} p_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u + \lambda u = f(x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{in } \Omega \\ B_j(x,D)u\Big|_{\partial\Omega} = \phi \qquad (j=1,2). \end{cases}
$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ は十分滑らかな境界をもつ領域で、その境界 $\partial\Omega$ は compact な hypersurface とする。$A(x,D)$ は Ω で定義された2階の楕円型作用素であり

$$
A(x,D) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\right) + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x).
$$

において、$a_{jk}(x) \in \mathcal{B}^1(\Omega)$ は symmetric で、$b_j(x)$, $c(x)$ は各々 $\mathcal{B}^0(\Omega)$ に属しているものとする。又、

我々は$A(x,D)$の一様楕円性

$$(1.2) \qquad \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geq {}^{\exists}C|\xi|^2$$

$$\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in \mathbb{R}^n$$

を仮定する。$p_j(x)$, $q(x)$については、各々$\mathcal{B}^0(\Omega)$に属しているものとする。

さて$\rho(x)$は、real valued functionであり、次の条件を満たしているものとする。

i) $0\leq \rho(x)\leq M$ かつ $\rho(x)\in C^0(\overline{\Omega})$.

ii) $\rho(x)$は$\partial\Omega$上でのみvanishする。

iii) $\rho(x)$は、$\partial\Omega$の適当な近傍では、$r=r(x)=$
$=\mathrm{dis}(x,\partial\Omega)$のみにdependする。

iv) 十分小なる$r=r(x)$に対して、$C_1 r^\alpha\leq \rho(x)\leq C_2 r^\alpha$となる$C_1$, C_2(定数)及びα $(0<\alpha<1)$が存在する。

v) Ωが非有界の時には、$\rho(x)\geq K>0$ $(|x|\to\infty)$となるKが存在する。

又、境界条件を与える$B_j(x,D)$ $(j=1,2)$については、
$B_1(x,D)=1$, $B_2(x,D)=\partial/\partial\nu+\sigma$ とする。ここに

$$\partial/\partial\nu=\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\nu_j\frac{\partial}{\partial x_k}$$

であり、$\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)$は$\partial\Omega$上の各点における外向単位法線ベクトルである。$\sigma$については

$\sigma \in \mathcal{B}^0(\partial\Omega)$ を仮定する。

退化した楕円型方程式を扱う場合、関数解析的方法によろうとすれば、どのような関数空間を設定するかということが一つの問題となるが、方程式(1, 1)に対しては、次の定義 1.1 及び 定義 1.2 で与えられる空間が有効である。

定義 1.1. $L^2(\Omega, \rho^{-1})$ でもって、Ω 上の関数で

$$\|u\|_{\rho^{-1}}^2 \equiv \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\rho(x)} dx < +\infty$$

であるようなもの全体を表わす。

定義 1.2. $H^m(\Omega, \rho)$ でもって、Ω 上の関数で

$$\|u\|_{m,\rho}^2 \equiv \int_\Omega \Big(\rho(x) \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 + |u|^2 \Big) dx < +\infty$$

であるようなもの全体を表わす。

$L^2(\Omega, \rho^{-1})$ 及び $H^m(\Omega, \rho)$ は内積 $(u, v)_{\rho^{-1}} =$

$\equiv \int_\Omega \frac{u(x)\overline{v(x)}}{\rho(x)} dx$, $\quad (u, v)_{m,\rho} \equiv \int_\Omega \Big(\rho(x) \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha u \overline{D^\alpha v}$

$+ u\bar{v} \Big) dx$ によって各々ヒルベルト空間になる。

我々の目的は，次の定理を示すことである。

定理 1.1　任意の $f(x) \in L^2(\Omega, \rho^{-1})$ と任意の $\phi \in H^{\beta}(\partial\Omega)$ とに対して，ある実数 λ_0 があって，$\lambda \geqq \lambda_0$ なるすべての λ に対して，方程式 (1.1) は，一意的な解 $u(x) \in H^2(\Omega, \rho)$ をもつ。ここで β は

$$\beta = \begin{cases} \dfrac{3-\alpha}{2} & (\text{境界作用素が } B_1) \\ \dfrac{1-\alpha}{2} & (\text{境界作用素が } B_2) \end{cases}$$

である。

§2　$H^m(\Omega, \rho)$ に対する imbedding theorem と若干の estimates.

この節では，$H^m(\Omega, \rho)$ の性質と，それに伴ういくつかの a priori estimates を準備する。

まず，$H^m(\Omega, \rho)$ の通常のソボレフ空間との関係，特に $\partial\Omega$ への trace に関連して，次の定理がある。

定理 2.1 (Lizorkin and Uspenskii). 次のうめ込み (連続) がなりたつ。

$$H^m(G, \rho) \longrightarrow H^{m-\alpha/2}(G) \longrightarrow H^{(m-\alpha/2-(n-k)/2)}(G_k)$$

$(m - \alpha/2 - (n-k)/2 > 0$ かつ $k < n)$.

ただし，$G \subset \mathbb{R}^n$ は十分に滑らかな領域で，G_k は十分滑らかな k 次元 manifold とする。

(我々が適用するのは，$G_k = \partial\Omega$ の場合である。)

さて，問題の局所化に備えて，$H^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ を導入しておこう。ここで，$\mathbb{R}^n_+ = \{(x, y)\,;\, x > 0,\ y \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ である。$H^m(\Omega, \rho)$ (Ω は一般領域) の特に $\partial\Omega$ の近傍での局所化に関連しては，一般性を失うことなく，ρ は x のみに depend するとしてよい。又，ここでは，$[0, 1]$ 上で，$c_1 x^\alpha \leqq \rho(x) \leqq c_2 x^\alpha$ が成りたっているものとしておく。

命題 2, 1. $\forall u(x, y) \in H^m(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ に対して次の評価がなりたつ。

$$(2, 1) \qquad \int_{\mathbb{R}^n_+} \frac{|D^\alpha u|^2}{\rho(x)}\, dx\, dy \leqq \varepsilon \|u\|^2_{m,\rho} + C_\varepsilon \|u\|^2$$

$(|\alpha| \leqq m - 1)$

ただし，$\varepsilon > 0$ は任意である。

命題 2, 1 の系として

系, 2, 1. $u(x) \in H^m(\Omega, \rho)$ とすると, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(2,2) \qquad \|D^\alpha u\|_{\rho-1} \leqq \varepsilon \|u\|_{m,\rho} + C_\varepsilon \|u\|$$

がなりたつ。

又, 定理 2, 1 によれば, 次の命題も明かである。

命題 2, 2. $u(x) \in H^m(\Omega, \rho)$ とすると, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(2,3) \qquad |\gamma D^\beta u|_{m-|\beta|-\frac{1+\alpha}{2}} \leqq \varepsilon \|u\|_{m,\rho} + C_\varepsilon \|u\|$$

$$(|\beta| \leqq m-1)$$

がなりたつ。ただし, γ は $\partial\Omega$ への trace を表わし $|\cdot|_s$ は $H^s(\partial\Omega)$ のノルムを表わす。

方程式 (1, 1) を homogeneous な境界条件の場合に帰着させる為に, 次の命題を準備しよう。

命題. 2. 3. $B(x,D)$ を その係数が適当に滑かな p 階の微分作用素 $(p < m)$ とし, $B(x,\nu)$ は決して 0 にならないとする。この時, $\forall \phi \in H^{m-p-\frac{1+\alpha}{2}}(\partial\Omega)$ に対して,

$$B(x,D)u\Big|_{\partial\Omega} = \phi$$

となるような $u(x) \in H^m(\Omega, \rho)$ が存在する。

§3. 解の a priori estimates

この節では, 解の a priori estimate を導くが, まず, 第一段階として, 半空間 $\mathbb{R}^n_+$ における次のような特別の方程式について考えよう。

$$(3,1)\begin{cases} -\rho(x)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y_j} + \sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} - u\right) = f(x,y) \\ u(x,y)\Big|_{x=0} = \phi(y) \end{cases}$$

ここで, $a_j\ (j=1,\cdots,n-1)$ と $b_{jk}\ (j,k=1,\cdots,n-1)$ は全て real constants で, $b_{jk} = b_{kj}$ とし, 又,

$$\xi^2 + 2\sum_{j=1}^{n-1} a_j \xi \eta_j + \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{jk}\eta_j \eta_k \geq c(\xi^2 + |\eta|^2)$$

が, $\forall(\xi,\eta)\in \mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^{n-1}$ に対してなりたっているものとする。

又, $f(x,y)\in L^2(\mathbb{R}^n_+,\rho^{-1})$ であり, $\phi(y)\in H^{\frac{3-\alpha}{2}}(\mathbb{R}^{n-1})$ であるとする。

補題, 3, 1, (Inakawa) $f(x)\in L^2(0,\infty)$ とする。

$$(K_\tau f)(x)=\int_0^\infty \tau e^{-\tau|x-\xi|}\left(\frac{x}{\xi}\right)^{\alpha/2} f(\xi)\,d\xi \quad (-1<\alpha<1,\ \tau>0)$$

とおくと, 次の estimate がなりたつ.

$$\|K_\tau f\|\leqq C\|f\|. \quad (C\text{ は }\tau\text{ に independent}).$$

さて, (3.1) を tangential 方向に Fourier 変換をして (その image を ^ をつけて表わす) $\hat{u}(x,\eta)$ を explicit に表わすと,

$$(3.2)\quad \hat{u}(x,\eta)=\frac{1}{2\tau(\eta)}\int_0^\infty e^{\tau(\eta)|x-\xi|}\frac{\hat{f}(\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\ +$$

$$+\,e^{\tau(\eta)x}\left(\hat{\phi}(\eta)-\frac{1}{2\tau(\eta)}\int_0^\infty e^{\tau(\eta)\xi}\frac{\hat{f}(\xi)}{\rho(\xi)}\,d\xi\right)$$

となる。ここで $\tau(\eta)$ は.

$$\tau^2-2i\left(\sum_{j=1}^{n-1}a_j\eta_j\right)\tau-\sum_{j,k=1}^{n-1}b_{jk}\eta_j\eta_k-1=0$$

の根で, real part が negative のものである。

ここで，(3, 2) の $\hat{u}(x,\eta)$ に対して，補題 3, 1, を適用すれば，次の評価をうる。

$$(3,3) \qquad \|u\|_{2,\rho} \leq \text{const.}\left(\|f\|_{0,\rho^{-1}} + |\phi|_{\frac{3-\alpha}{2}}\right).$$

全く同様にして，方程式

$$(3,4)\begin{cases} -\rho(x)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_j \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y_j} + \sum_{j,k=1}^{n-1} b_{jk} \dfrac{\partial^2 u}{\partial y_j \partial y_k} - (1+|\sigma|)^2 u\right) \\ \qquad = f(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} a_j \dfrac{\partial u}{\partial y} + \sigma u \Big|_{x=0} = \phi(y) \end{cases}$$

（σ は定数）

に対しても，次の評価をうる。

$$(3,5) \qquad \|u\|_{2,\rho} \leq \text{const.}\left(\|f\|_{0,\rho^{-1}} + |\phi|_{\frac{1-\alpha}{2}}\right).$$

評価式 (3, 3) 及び (3, 5) を考慮して，Ω に対する単位分解を用いれば，結局次の定理を得る。

定理．3．1，$^{\forall}u(x) \in H^2(\Omega, \rho)$ に対して，次の評価がなりたつ。

$$(3,6) \qquad \|u\|_{2,\rho} \leq \text{const}\left(\|f\|_{\rho^{-1}} + |\phi|_{\beta} + \|u\|\right)$$

ただし，

$$-\rho(x)A(x,D)u+\sum_{j=1}^{n}p_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+q(x)u=f(x)$$

$$B_j(x,D)u\Big|_{\partial\Omega}=\phi \qquad (j=1,2)$$

であり，

$$\beta=\begin{cases}\dfrac{3-\alpha}{2} & (j=1)\\[2mm] \dfrac{1-\alpha}{2} & (j=2)\end{cases}$$

である。

§4. Weak solutions. この節では，(1, 1) に対する weak solution を定義し，併せてその存在を示す。我々は，命題. 2, 3 を考慮して，専ら homogeneous な境界条件のもとで考える。

まず，次の補題がなりたつことに注意しよう。

補題. 4, 1, $u(x),\ v(x)\in\mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$ とすると，$\forall\varepsilon>0$ に対して

$$(4.1)\qquad \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_j},v\right)_{\rho^{-1}}\right|\leqq\varepsilon\|u\|_1\|v\|_1+C_\varepsilon\|u\|_1\|v\| \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

がなりたつ。

補題. 4, 1, に注意して，我々は，境界条件 $u(x)\big|_{\partial\Omega}=0$

に対する (1.1) の weak solution を次のように定義する。

定義 4.1, $u(x) \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ が, $u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0$ をみたす (1.1) の weak solution であるとは, すべての $v(x) \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ に対して

$$(4.2) \quad D[u,v] \equiv \sum_{j,k=1}^{n}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial v}{\partial x_k}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, v\right)$$
$$+ (c(x)u, v) + \sum_{j=1}^{n}\left(p_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}, v\right)_{\rho^{-1}} + (q(x)u, v)_{\rho^{-1}} + \lambda(u, v)_{\rho^{-1}}$$
$$= (f, v)_{\rho^{-1}}$$

をみたすときをいう。

次の補題, 及び命題に注意すれば, unique な weak solution が λ を十分大にとれば存在することがわかる。

補題 4.2, $f(x) \in L^2(\Omega, \rho^{-1})$, $v(x) \in H^1(\Omega)$ とすると

$$(4.3) \quad |(f, v)_{\rho^{-1}}| \leq \text{const.} \|f\|_{\rho^{-1}} \|v\|_1$$

がなりたつ。

補題 4.3, $u(x) \in \mathcal{D}^1_{L^2}(\Omega)$ とすれば, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$(4.4)\qquad \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, u\right)_{\rho^{-1}}\right| \leq \varepsilon \|u\|_1^2 + C_\varepsilon \|u\|^2$$
$$(j=1, 2, \cdots, n)$$

がなりたつ。

命題 4.1, $u(x), v(x) \in \mathcal{D}'_{L^2}(\Omega)$ とし, $\lambda(>0)$ を十分大きくとれば

$$(4.5)\qquad |D[u, v]| \leq \text{const}\, \|u\|_1 \|v\|_1$$

$$(4.6)\qquad \mathcal{R}e\, D[u, u] \geq \text{const}\, \|u\|_1^2$$

がなりたつ。

以上のことをまとめて，次の定理を得る。

定理 4.1, ${}^\forall f(x) \in L^2(\Omega, \rho^{-1})$ に対して，ある real number λ_0 があって，${}^\forall\lambda \geq \lambda_0$ に対して

$$\begin{cases} -\rho(x)A(x,D)u + \sum_{j=1}^{n} \rho_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x)u + \lambda u = f(x) \\ u(x)\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

は，unique な weak solution をもつ。

次に境界条件 $\partial u/\partial\nu + \sigma u|_{\partial\Omega}=0$ の場合に対する weak solution を定義したいのであるが，この場合には $p_j(x)\equiv 0$ $(j=1,\cdots,n)$ としないと困難である。従って，まず $p_j(x)\equiv 0$ $(j=1,\cdots,n)$ の時に限って weak solution を定義する。

定義．4.2，　$u(x)\in H^1(\Omega)$ が $\partial u/\partial\nu + \sigma u\big|_{\partial\Omega}=0$ をみたす (1.1)（ただし $p_j(x)\equiv 0$ $(j=1,2,\cdots,n)$）の weak solution であるとは，すべての $v(x)\in H^1(\Omega)$ に対して

$$(4.7)\quad N[u,v]\equiv\sum_{j,k=1}^{n}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j},v\right)$$
$$+(c(x)u,v)+(q(x)u,v)_{\rho-1}+\lambda(u,v)_{\rho-1}+$$
$$+\langle\sigma u,v\rangle_{\partial\Omega}=(f,v)_{\rho-1}$$

をみたすときをいう。ただし，$\langle\ ,\ \rangle_{\partial\Omega}$ は $L^2(\partial\Omega)$ の内積を表わす。

$N[u,v]$ が well-defined であることは，次の補題に注意すればよい。

補題．4.4，　$u(x)\in H^1(\Omega)$ とすると，$\forall\varepsilon>0$ に対して

$$(4.8) \quad \|u\|_{\rho^{-1}} \leqq \varepsilon\|u\|_1 + C_\varepsilon\|u\|$$

がなりたつ。

定理 4.1 の場合と同様にして、次の定理を得る。

定理 4.2. $\forall f(x) \in L^2(\Omega, \rho^{-1})$ に対して、ある real number λ_0 があって、$\forall\lambda \geqq \lambda_0$ に対して、

$$\begin{cases} -\rho(x)A(x,D)u + q(x)u + \lambda u = f(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

は、unique な weak solution をもつ。

§5. Weak solution の regularity 及び定理 1.1 の証明.　この節では、前節で得られた weak solution の regularity，即ち，weak solution が $H^2(\Omega, \rho)$ に属することを示し，かつ，定理 1.1 を完全に証明する。

regularity に関して云えば，内部 regularity については退化していない楕円型方程式の理論によって周知であるから，問題は，境界の近傍での正則性を示すことにある。

問題は局所的なものであるから，$\Omega = \mathbb{R}^n_+$ の場合に考察すれば十分である。従って，我々の方程式は，次のようなものとしよう。

$$(5,1)\quad -\rho(x)\Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(a_{00}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\big)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\big(a_{0j}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\big)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\big(a_{j0}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\big)$$
$$+\sum_{j,k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\big(a_{jk}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_k}\big)+b_0(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n-1}b_j(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_j}+cu\Big)$$
$$+q(x,y)u+\lambda u = f(x,y)$$

境界条件は

$$(5,2)\qquad u(x,y)\Big|_{x=0}=0$$

又は

$$(5,3)\qquad a_{00}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n-1}a_{0j}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_j}+\sigma(y)u\Big|_{x=0}=0 .$$

さて，weak solution が $H^1(\mathbb{R}^n_+)$ に属していることを考慮すれば，

$$-\rho(x)\Big(b_0(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+\sum_{j=1}^{n-1}b_j(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_j}+c(x,y)u\Big)+qu+\lambda u$$

は $L^2(\mathbb{R}^n_+, \rho^{-1})$ に属するから，右辺にまわすことによって，結局，次の方程式を考えればよい。

$$(5,4)\quad -\rho\Big(\frac{\partial}{\partial x}\big(a_{00}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\big)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\big(a_{0j}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_j}\big)+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\big(a_{j0}(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\big)+$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{jk}(x,y)\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)\Bigg) = f(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^n_+, \rho^{-1}).$$

ここで重要な働きをする tangential mollifier $\varphi_\varepsilon *$ を考えよう；

$$(\varphi_\varepsilon * u)(x,y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi_\varepsilon(y-\eta)\, u(x,\eta)\, d\eta.$$

（時には，$\varphi_\varepsilon * u$ を u_ε と表わすことにする。）

$\varphi_\varepsilon *$ に関して，次の補題がなりたつ。

補題 5，1，　$u(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^n_+)$ とすると

$$u_\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(\varepsilon \to 0)]{} u(x,y) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n_+).$$

補題 5，2，　$u(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^n_+, \rho^{-1})$ とすると

$$u_\varepsilon(x,y) \xrightarrow[(\varepsilon \to 0)]{} u(x,y) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbb{R}^n_+, \rho^{-1}).$$

補題 5，3 (Friedrichs)　$u(x,y) \in H^1(\mathbb{R}^n_+)$，$a(x,y) \in \mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n_+)$ とすると

$$[\varphi_\varepsilon *, aD]u \xrightarrow[(\varepsilon \to 0)]{} 0 \quad \text{in} \quad H^1(\mathbb{R}^n_+)$$

ただし，D は $\partial/\partial x$ 又は $\partial/\partial y_j$ $(j=1,\cdots,n-1)$ であり，

[,] は commutator を表わす。

さて，(5,4) において，$a_{00}(x,y)\equiv 1$ と仮定しても一般性を失わないことがわかるから以後 $a_{00}(x,y)\equiv 1$ とする。今，$u(x,y)$ を (5,3)(5,4) をみたす weak solution としよう。((5,2) をみたすものについても同様に，むしろ，より容易にできるので，(5,3) をみたす weak solution についてのみ考察する。) $u(x,y)$ は次の関係をみたしている。

$$(5,5)\quad \left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{0j}\frac{\partial u}{\partial y_j},\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{j0}\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n-1}\left(a_{jk}\frac{\partial u}{\partial y_j},\frac{\partial v}{\partial y_k}\right)-\int_{R^{n-1}}\sigma(y)\,u(0,y)\overline{v(0,y)}\,dy$$

$$=(f,v)_{p^{-1}}$$

今 v の代りに v_ε を代入して，整理すると，(5,5) は

$$(5,6)\quad \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{0j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_j},\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\sum_{j=1}^{n-1}\left(a_{j0}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)$$

$$+\sum_{j,k=1}^{n-1}\left(a_{jk}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_k},\frac{\partial v}{\partial y_j}\right)-\int_{R^{n-1}}\sigma(y)\,u_\varepsilon(0,y)\overline{v(0,y)}\,dy=$$

$$= (f_\varepsilon, v)_{\rho^{-1}} - \sum_{j=1}^{n-1}\Big\{\Big([\varphi_\varepsilon *, a_{0j}\tfrac{\partial}{\partial y_j}]u, \tfrac{\partial v}{\partial x}\Big) + \Big([\varphi_\varepsilon *, a_{j0}\tfrac{\partial}{\partial x}]u, \tfrac{\partial v}{\partial y_j}\Big)\Big\}$$

$$- \sum_{j,k=1}^{n-1}\Big([\varphi_\varepsilon *, a_{jk}\tfrac{\partial}{\partial y_k}]u, \tfrac{\partial v}{\partial y_j}\Big) + \int_{\mathbb{R}^{n-1}}([\varphi_\varepsilon *, \sigma]u)(0,y)\overline{v(0,y)}\,dy$$

となり，従って $u_\varepsilon(x,y)$ は，distribution として，

$$(5.7)\quad -\rho(x)\Big(\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\Big(a_{0j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_j}\Big) + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big(a_{j0}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\Big) +$$

$$+ \sum_{j,k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big(a_{jk}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_k}\Big)\Big) = f_\varepsilon(x,y) + \rho\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial x}\Big([\varphi_\varepsilon *, a_{0j}\tfrac{\partial}{\partial y_j}]u\Big)$$

$$+\rho\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big([\varphi_\varepsilon *, a_{j0}\tfrac{\partial}{\partial x}]u\Big) + \rho\sum_{j,k=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big([\varphi_\varepsilon *, a_{jk}\tfrac{\partial}{\partial y_k}]u\Big)$$

をみたす。$u(x,y)\in H^1(\mathbb{R}^n_+)$ であったことに注意すれば，(5.7) を考慮することによって $u_\varepsilon(x,y)\in H^2(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ であることがわかり，従って，又，$u_\varepsilon(x,y)$ は境界条件

$$(5.8)\quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1}a_{0j}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y_j} + \sigma u_\varepsilon\Big|_{x=0} = [\varphi_\varepsilon *, \sigma]u\Big|_{x=0}$$

をみたすことがわかる。

ここで，定理 3.1. を用いれば，(5.7) の右辺を $f_\varepsilon(x,y)+\rho g_\varepsilon(x,y)$ として，次の評価を得る。

$$(5.9)\quad \|u_\varepsilon\|_{2,\rho} \leq \mathrm{const}\left(\|f_\varepsilon\|_{\rho^{-1}} + \|\rho g_\varepsilon\|_{\rho^{-1}} + \|u_\varepsilon\| + \left|[\varphi_\varepsilon *, \sigma]u\big|_{x=0}\right|_{\frac{1-\alpha}{2}}\right).$$

さて，

$$(5.10)\quad \|\rho g_\varepsilon\|_{\rho^{-1}} \leq \mathrm{const}\ \|g_\varepsilon\|_1$$

であり，又，$\tilde{\sigma}(x,y)$ を $\sigma(y)$ の $\mathcal{B}^1(\mathbb{R}^n_+)$ への拡張とすれば

$$(5.11)\quad \left|[\varphi_\varepsilon *, \sigma]u\big|_{x=0}\right|_{\frac{1-\alpha}{2}} \leq \|[\varphi_\varepsilon *, \tilde{\sigma}]u\|_1$$

となり，補題 5.1 ～ 5.3 を考慮すれば，$u_\varepsilon(x,y)$ は，$\varepsilon \to 0$ の時，$H^2(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ で収束することがわかる。そして，その極限は，weak solution $u(x,y)$ に等しいから結局 $u(x,y) \in H^2(\mathbb{R}^n_+, \rho)$ が従う。以上のことを定理としてまとめておく。

定理 5.1　$f(x) \in L^2(\Omega, \rho^{-1})$ とすると，§4 で得られた weak solution は $H^2(\Omega, \rho)$ に属し，境界条件を $H^\beta(\partial\Omega)$ の意味でみたす。ただし，β は定理 1.1 で与えられたものである。

さて，定理 1.1 を完全に証明するには，$P_j(x)$ が現われる方程式を考えねばならない。ここでは，次の逐次近似

$$(5,12)\begin{cases} -p(x)A(x,D)u_n + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x)\dfrac{\partial u_{n-1}}{\partial x_j} + q u_n + \lambda u_n \\ \qquad = f(x) \\ B_j u_n \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (j=1,2) \\ \qquad (ただし.\ u_0(x)\equiv 0.) \end{cases}$$

によって考えよう。命題 2.1 によって (5,12) は. $H^2(\Omega,\rho)$ の中の列 $\{u_n(x)\}$ を作ることがわかる。$\{u_n(x)\}$ について次の補題を得る。

補題. 5.4. $\{u_n(x)\}$ について, ある定数 C が存在して, $\lambda > C$ のとき, $\forall\varepsilon>0$ に対して

$$(5,13)\quad \|u_n-u_{n-1}\|_{2,\rho} \leqq \varepsilon\|u_{n-1}-u_{n-2}\|_{2,\rho} + C_\varepsilon\|u_{n-1}-u_{n-2}\|_{\rho^{-1}}$$

$$(5,14)\quad \|u_n-u_{n-1}\|_{\rho^{-1}} \leqq \frac{\varepsilon}{\lambda-C}\|u_{n-1}-u_{n-2}\|_{2,\rho} + \frac{C_\varepsilon}{\lambda-C}\|u_{n-1}-u_{n-2}\|_{\rho^{-1}}$$

がなりたつ。

補題の証明は. 命題. 2.1 及び定理, 3.1 を使えばよい。さて, (5.14) の両辺に $C_\varepsilon/\varepsilon$ をかけて. 辺々加えれば

$$(5,15)\quad \|u_n-u_{n-1}\|_{2,\rho} + \frac{C_\varepsilon}{\varepsilon}\|u_n-u_{n-1}\|_{\rho^{-1}} \leqq \left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{\lambda-C}\right)\times$$
$$\left(\|u_{n-1}-u_{n-2}\|_{2,\rho} + \frac{C_\varepsilon}{\varepsilon}\|u_{n-1}-u_{n-2}\|_{\rho^{-1}}\right) \quad (n\geqq 2)$$

を得るから. $\left(\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{\lambda - C}\right) < 1$ となるように ε, λ をとると $\sum_{n=1}^{\infty} \| u_n - u_{n-1} \|_{2,\rho} < +\infty$ より. $\{u_n(x)\}$ は $H^2(\Omega, \rho)$ で収束することがわかる。そして，その極限 $u(x)$ は

$$\begin{cases} -\rho(x) A(x, D) u + \sum_{j=1}^{n} p_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + q(x) u + \lambda u = f(x) \\ B_j(x, D) u \Big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

をみたす。以上によって定理. 1.1 は完全に証明された。