数理解析研究所講究録
第 138 巻 1972 年 11-33

確率微分方程式の解の安定性.

名大 理数　　宮原 孝夫

§1、 序

次の形の確率微分方程式

(1) $$dX(t) = f(t, X(t))dt + G(t, X(t))dW(t)$$

で定められているようなシステムについて、そのシステムが global な意味で安定ということの1つの妥当と思われる定義を採用し、その定義の下で Liapunov の方法による安定性の議論がどのように可能かを見るのが目的である。

deterministic なシステムについては安定性の概念はキチッと定義され多く議論されている。ランダムネスが入るとき、それに対応した形で定義を与えようとすると、すこし工夫が必要となる。そこで、たとえば、確率1ですべての path が安定であるとか、平均の意味で安定である等の言い方をしたり、あるいは recurrence property を安定性ということの指標にしようとしたりしている。([3], [5], [6] 参照)。[3]では主に

$f(t,0)\equiv G(t,0)\equiv 0$ の仮定の下で原点での安定性を論じており、[5]では時間的に一様で退化していない場合について positive recurrent になる条件を論じている。我々としては、ノイズの入り方をあまり限定せずに、従って $G(t,0)\equiv 0$ とか、退化しないというような制限をとった広いクラスのシステムに対して適用できるような議論をしたい。そのために、ここでは Zakai[4] による ultimate boundedness を安定性の定義として採用する(定義は§2.)。そして、§3,§4 において、リャプーノスの方法による定理を示す。又、§5 では ultimately bounded ならばある種の recurrence property を持っていることを示す。この事実は、global な意味での安定性の定義として ultimate boundedness を採用することの妥当性の1つの保障を与えていると思われる。

なお、以下で述べることは[7]に含まれることであり、証明等省略した部分については[7]を参照していただきたい。

§2、定義及び Lemma、

今後考えるシステムは常に次のような確率微分方程式によって決まるものとする。

$$dX(t)=f(t,X(t))dt+G(t,X(t))W(t),\qquad t\geqq 0 \tag{2.1}$$

$X(t)$, $f(t,x)$ は n-vector , $G(t,x)$ は $n\times m$-matrix, $W(t)$

は m-dim standard Wiener process とする。そして、係数 $f(t,x)$ $G(t,x)$ は次の条件 (A_1) (A_2) を満たしているものとする。

(A_1) $\quad |f(t,x)| + |G(t,x)| \leqq c(1+|x|)$

(A_2) $\quad |f(t,x)-f(t,y)|+|G(t,x)-G(t,y)| \leqq c|x-y|$.

すなわち、時間について一様に Lipschitz condition が満たされるものとする。このとき、初期値を与えたとき、(2.1)の解が定まる。それを一般に $X(t)$, $0\leq t<\infty$ で示す。

定義 2.1. $p>0$ に対し、(2.1) によって決まる process $X(t)$ が p-th ultimately bounded であるとは、定数 K が存在して

$$\overline{\lim_{s\to\infty}} M_{t,x}|X(s)|^p \leqq K, \quad \text{for } \forall (t,x) \in [0,\infty)\times R^n$$

となることである。$M_{t,x}$ は $X(t)=x$ なる条件付平均値。

定義 2.2. 特に、exponentially p-th ultimately bounded であるとは、正の定数 K, c, α が存在して、任意の $(t,x)\in[0,\infty)\times R^n$ に対して $\quad M_{t,x}|X(s)|^p \leqq K + c|x|^p e^{-\alpha(s-t)}$ となること。

定義から次のことは明らか。

exp. p-th ult. bdd $\Longrightarrow$ p-th ult. bdd

(exp.) p-th ult. bdd $\Longrightarrow$ (exp.) p′-th ult. bdd, $(p'\leqq p)$.

定義 2.3. $X(t)$ が q-th ult. unboundd であるとは、定数 K が存在して、$|x|\geqq K$ のとき $\underline{\lim_{s\to\infty}} M_{t,x}|X(s)|^q = \infty$ となること。

定義 2.4. 特に、exponentialy q-th ult. unbdd. であ

るとは、正の定数 K, C, α, K' が存在して、$|x| \geqq K$, $s \geqq t$ のとき
$M_{t,x}|X(s)|^q \geqq C|x|^q e^{\alpha(s-t)} - K'$ となること。

$\mathcal{L}$ を、Markov process $X(t)$ の infinitesimal generator とする。このとき、次の Lemma が成り立つ。

<u>Lemma</u> 2.1. $X(t)$ を (2.1) によって決まる process とする。$V(t,x)$ を $[0,\infty)\times R^n$ 上の函数で次の条件をみたすとする。

i) $V(t,x)$ は、下に有界で、x について C^2-class t について C^1-class とする。(以下、このとき単に C^2-class と呼ぶ)

ii) $\mathcal{L}V(t,x) \leqq k_1 + k_2 V(t,x)$, k_1, k_2 は定数.

このとき次の不等式が成立する。

iii)
$$M_{t,x} V(s, X(s)) \leqq V(t,x)e^{k_2(s-t)} + \frac{|k_1|}{k_2}\left(e^{k_2(s-t)} - 1\right), \quad k_2 \neq 0,$$
$$\leqq V(t,x) + |k_1|(s-t) \qquad k_2 = 0,$$

ただし、$s \geqq t$ とする。

(証明)、$k_2 \neq 0$ の場合。 $W(s,x) \equiv V(s,x)e^{-k_2(s-t)}$ とおく。τ_n を $X(t)$ の $\{x ; |x| \leqq n\}$ からの first exit time とし $\tau_n(t) \equiv \min\{t, \tau_n\}$ とおく。$(n = 1, 2, 3, \cdots)$. $\tau_n(t)$ は Markov time となり、Dynkin-Ito formula によって

$$M_{t,x} W(\tau_n(s), X(\tau_n(s))) - W(t,x) = M_{t,x}\int_t^{\tau_n(s)} \mathcal{L} W(u, X(u))\,du$$

この右辺は、W の定義と条件 ii) によって、

$$\leqq M_{t,x}\int_t^{\tau_n(s)} k_1 e^{-k_2(u-t)}\,du \leqq M_{t,x}\int_t^{\tau_n(s)} |k_1| e^{-k_2(u-t)}\,du$$
$$\leqq \frac{|k_1|}{k_2}\left(1 - e^{-k_2(s-t)}\right).$$

一方．$W(u,x)$ は $[t,s]\times R^n$ 上で下に有界故．Fatou の Lemma により $M_{t,x}W(s,X(s)) \leqq \varliminf_{n\to\infty} M_{t,x}W(\tau_n(s),X(\tau_n(s)))$ 。上で得た結果と合せて

$$M_{t,x}W(s,X(s)) \leqq W(t,x)+\frac{|k_1|}{k_2}\left(1-e^{-k_2(s-t)}\right)$$

これを書き直せば結論の式である。

$k_2=0$ の場合は，上と同じに $M_{t,x}W(\tau_n(s),X(\tau_n(s))) \leqq W(t,x)+|k_1|(s-t)$ が言えるので．結論をうる。 (Q.E.D.)

<u>Lemma</u> 2.2．$p>0$，を fix したとき．$h(x)$ を．C^2-class の函数で．$|x|\geqq 1$ のとき $h(x)=|x|^p$ となるものとする．このとき，$|\mathcal{L}h(x)| \leqq k_3+k_4h(x)$，($k_3$，$k_4$ は正の定数）となる。

（証明）$\mathcal{L}h(x)=\sum_i f_i(t,x)\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}(x)$ の形をしており．(A_1) と $h(x)=|x|^p$ の形よりこの式の右辺の $|x|$ についての order が評価できる。それをしてみればよい。(Q.E.D.)

<u>Corollary</u> 2.1，$p>0$．を fix したとき，定数 c, k がとれて，

$$M_{t,x}|X(s)|^p \leqq c(1+|x|^p)e^{k(s-t)},\quad s\geqq t.$$

（証明）．Lemma 2.2. のような $h(x)$ をとって，それに Lemma 2.1. を適用すれば容易に得られる。 (Q.E.D.)

<u>Lemma</u> 2.3　$V(t,x)$ を Lemma 2.1. の i) と共に以下の条件をみたす函数とする．

(iv) $\mathcal{L}V(t,x) \geqq k_5+k_6V(t,x)$

(v) $M_{t,x}|V(s,X(s))|$, $M_{t,x}\left|\frac{\partial V}{\partial t}(s,X(s))\right|$, $M_{t,x}\left|f_i(s,X(s))\frac{\partial V}{\partial x_i}(s,X(s))\right|^2$,

$M_{t,x}\left|\sigma_{ij}(s,X(s))\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}(s,X(s))\right|$ がみな、(t,x)-compact-subset 上で有界。

このとき次の不等式が成立する。

$$M_{t,x}V(s,X(s)) \geqq V(t,x)e^{k_6(s-t)} + \frac{k_5}{k_6}(1-e^{k_6(s-t)}), \quad k_6 \neq 0,$$
$$\geqq V(t,x) + k_5(s-t) \qquad k_6 = 0.$$

（証明）Lemma 2.1. におけると同様に考えればよい。その際、Stopping time を取ることなしに Dynkin-Ito formula が使えることが V) で保障されていることに注意する。(Q.E.D.)

<u>Corollary 2.2.</u> $h(x)$ を Lemma 2.2. のものとすれば、適当な定数 k, C をとって、

$$M_{t,x}h(X(s)) \geqq h(x)e^{-k(s-t)} - C.$$

（証明）Corollary 2.1. 及び Lemma 2.2. により上の Lemma の条件が満たされていることが分る。 (Q.E.D.)

<u>定義</u> 2.5 $X(t)$ が <u>w-th ult. bdd.</u> とは、適当な正の定数 a, b をとって $\varphi(x) = e^{a|x|^b}$ とおいたとき、任意の (t,x) に対して $\overline{\lim_{s\to\infty}} M_{t,x}\varphi(X(s)) \leqq K$.（K は a, b に依存して決まる）となること。

$X(t)$ が <u>exp. w-th ult. bdd</u> であるとは、正の定数 a, b, c, r, α, K' が存在して $\varphi(x) = e^{a|x|^b}$ とおくとき、任意の (t,x) と $s \geqq t$ に対して、$M_{t,x}\varphi(X(s)) \leqq c\,\varphi(x)^r e^{-\alpha(s-t)} + K'$ となること。特に $r=1$ とれるとき、<u>strongly exp. w-th</u>

ult. bdd であるという。

上の定義に関して、容易に次のことが分る。

str. exp. ω-th ult. bdd ⇒ exp. ω-th. ult. bdd ⇒ ω-th ult. bdd

⇒ ∞-th ult. bdd (i.e. 任意の $p>0$ に対し p-th ult. bdd.)

しかし、exp. p-th ult. bdd との関係は一概に言えない。それについては、Ex. 3.2. と Cor. 4.2. を見ると分る。

§3、ultimate boundedness, ultimate unboundedness の判定定理、

この§では、ult. bdd. 又は ult. unbdd. なるための十分条件を、Liapunov function の存在、という形で与える。更にその定理の有用性を示す Example を説明する。

Theorem 3.1、$X(t)$ を、(2.1) により定まる process とする。$p>0$ を1つ fix する。このとき次のことが言える。

(A) $[0,\infty)\times R^n$ 上の函数 $V(t.x)$ で次の条件を満たすものが存在するとする。

(i) $V(t.x)$ は C^2-class の函数.

(ii) 正の定数 α_1, c_1 があって、 $-\alpha_1+c_1|x|^p \leqq V(t.x)$.

(iii) 正の定数 c_2, β_1 があって、 $\mathcal{L}V(t.x) \leqq -c_2V(t.x)+\beta_1$.

このとき $X(t)$ は p-th ult. bdd. である。

(B). もしも $V(t.x)$ が (i)(ii)(iii) を満たすと同時に、

(ii)′ $V(t,x) \leqq C_3 |x|^p + \alpha_2$, $C_3, \alpha_2 > 0$:

なる条件も満たすとすれば、$X(t)$ は exp. p-th ult. bdd.

(C) もしも $V(t,x)$ が (i) (ii) (iii) と同時に次の条件.

(ii)″ $V(t,x) \leqq W(x)$

を満たすような函数 $W(x)$ が存在していれば、任意の (t,x) に対して $T(t,x) \leqq C_4 \log W(x) + C_5$ なる評価式が得られる。ここで $T(t,x)$ は、K を p-th ult. bdd の定義の定数として、$T(t,x) = \inf\{\tau ; M_{t,x}|X(t+\tau+u)|^p \leqq K_1 = K+1, \forall u \geqq 0\}$。

(証明) (A.) $V(t,x)$ に Lemma 2.1 が適用できて、

$$M_{t,x} V(s, X(s)) \leqq V(t,x) e^{-C_2(s-t)} + \frac{\beta_1}{C_2}(1 - e^{-C_2(s-t)}) \longrightarrow \frac{\beta_1}{C_2} \quad (s \to \infty).$$

(ii) を使って、上式より

$$M_{t,x}|X(s)|^p \leqq \frac{1}{C_1} M_{t,x} V(s, X(s)) + \frac{\alpha_1}{C_1} \longrightarrow \frac{\beta_1}{C_1 C_2} + \frac{\alpha_1}{C_1} \quad (s \to \infty).$$

$K = \frac{\beta_1}{C_1 C_2} + \frac{\alpha_1}{C_1}$ として p-th ult. bdd が分った。

(B) 上の式に (ii)′ を使って

$$M_{t,x}|X(s)|^p \leqq \frac{C_3}{C_1}|x|^p e^{-C_2(s-t)} + (K + \frac{\alpha_2}{C_1}).$$

これで exponential type なることが分る。

(C). (A) の証明中の式と (ii)″ により

$$M_{t,x}|X(s)|^p \leqq \frac{1}{C_1} W(x) e^{-C_2(s-t)} + K.$$

T_0 を、$T_0 = \frac{1}{C_2} \log W(x) - \frac{1}{C_2} \log C_1$ とおけば、$T(t,x)$ の定義から $T(t,x) \leqq T_0$ のはず。これは、結論の形。 (Q.E.D.)

この定理の中に現われた $V(t,x)$ を、$X(t)$ の Liapunov 函数

と呼ぶ。

定理のうち(A)は、$V(t,x)$ の可積分性に注意を払う必要がない点で Zakai [4] の結果よりも良い。(C) は、収束のための時間の評価を与えており、例えば exponential type のときには $T(t,x) \leqq d_1 \log(1+|x|)+d_2$ という形である。この事実は §5 で使われる。

次に unboundedness を示す定理を述べる。今後、c_i, α_i, β_i, ···· 等は、ことわらない限り正の定数である。

定理 3.2. $X(t)$ は前と同様とし、$q>0$ を fix する。

(A). $V(t,x)$ を、次のような条件を満たす函数とする。

(i) $V(t,x)$ は C^2-class で、$|V(t,x)|$, $\left|\frac{\partial V}{\partial t}\right|$, $\left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right|$; $\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}\right|$ は x の多項式で抑えられている。

(ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty} V(t,x)=\infty$, $\quad V(t,x) \leqq c_6 |x|^q + \alpha_3$,

(iii) $\mathcal{L} V(t,x) \geqq c_7 V(t,x) - \beta_2$,

このような $V(t,x)$ が存在するとき、$X(t)$ は q-th ult. unbdd.

(B). $V(t,x)$ が (A) の条件の上に、

(ii)′ $-\alpha_4 + c_8 |x|^q \leqq V(t,x)$

をも満たしていれば、exp. q-th ult. unbdd.

（証明）Lemma 2.1 の代りに Lemma 2.3 を使って、Th. 3.1 の証明と同様に示される。詳細は略。 (Q.E.D.)

Theorem 3.3　$X(t)$ は前と同様とする。

(A). Th.3.1の条件 (i)(iii) 及び次の条件をみたす $V(t,x)$ が存在するとする。

(iv)　$$c_9 e^{a_1|x|^{b_1}} - \alpha_5 \leqq V(t,x)$$

このとき、$X(t)$ は w-th ult. bdd である。

(B). もしも $V(t,x)$ が (A) の条件の上に、更に次の条件、

(iv)′　$$V(t,x) \leqq C_{10} e^{a_2|x|^{b_2}} + \alpha_6$$

をみたするとする。$X(t)$ は exp. w-th ult. bdd,

(B)′ もしも $V(t,x)$ が (B) の条件をみたし、しかも条件 (iv)′ で、$a_2 = a_1$ にとれたとすれば、$X(t)$ は str. exp. w-th ult. bdd である。

(証明) は、Th.3.1 でと同様の方法でできるので略す。

次に Example によって上に挙げた定理がどのように役立つかを見たい。

Ex. 3.1. 次のような方程式で定まる system を考える。

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + f(t,X(t))dt + G(t,X(t))dW(t), \quad t \geqq 0$$

ここで、$A(t)$: $n\times n$-matrix. $f(t,x)$ と $G(t,x)$ は (2.1) のときの条件をみたしているとする。このとき、もしも対応する deterministic な system $\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t)$ の解 $x(t) \equiv 0$ が一様漸近安定であり、更に次の2条件

$$\overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{|f(t,x)|}{|x|} = \overline{\lim_{|x|\to\infty}} \frac{|G(t,x)|}{|x|} = 0$$

が満たされているとすると、もとの system は exp. ∞-th ult. bdd (i.e. $\forall p>0$, exp. p-th ult. bdd) である。

(証明) 常微分方程式の理論から、次の条件を満たす函数 $V(t,x)$ の存在が分っている。

a) $V(t,x)=(V(t)x,x)$, $V(t)$ は $n\times n$-matrix で $(\ ,\ )$ は内積。

b) $\mu|x|^2\leq V(t,x)\leq M|x|^2$, μ, M は正の定数。

c) $n\times n$-matrix valued function $W(t)$ が存在して、

$$\frac{dV(t,x)}{dt}=-(W(t)x,x),\qquad \lambda|x|^2\leq(W(t)x,x)\leq\Lambda|x|^2.$$

こゝで $\frac{dV}{dt}$ は解曲線にそっての微分。λ, Λ は正の定数。

この $V(t,x)$ をとると、この $V(t,x)$ が $p=2$ として Th. 3.1 の(B) を満たすことが、計算により示せる。そして $V^m(t,x)$ $m=1,2,3,\cdots$, をとると、$V^m(t,x)$ が $p=2m$ としたときの Th. 3.1. (B) の条件をみたすことが言える。従って、$X(t)$ は exp. ∞-th ult. bdd である。 (Q.E.D.)

<u>Ex.</u> 3.2 1次元の方程式、

$$dX(t)=aX(t)\,dt+bX(t)\,dW(t).$$

を考える。定数 a、b を動かしたときどうなるか見よう。

$h(x)$ を Lemma 2.2. のものとすると次式を得る

$$\mathcal{L}h(x)=\left\{a+\frac{b^2}{2}(p-1)\right\}p\,|x|^p=\left\{a+\frac{b^2}{2}(p-1)\right\}p\,h(x),\quad |x|\geq 1.$$

これより、$a+\frac{b^2}{2}(p-1)<0$ のときには $V(t,x)$ としてこの $h(x)$ をとって Th. 3.1 (B) の条件が満たされ、$a+\frac{b^2}{2}(p-1)>0$ の

ときには Th.3.2.(B) の条件が満たされることが分る。従って次のことが言えた。"$0<p_0<\infty$ を任意に与えると、a, b を適当に定めて $a+\frac{b^2}{2}(p_0-1)=0$ となるようにできる。$(b\neq 0)$。そのとき上に考えた system は、$0<p<p_0$ の p に対して、exp. p-th ult. bdd となり $q>p_0$ の q に対して、exp. q-th ult. unbdd となる。" この例は次の事実を示している。「ある $p>0$ について exp. p-th ult. bdd. であっても ω-th ult. bdd. とならないこともある。」この事実は、§4の Cor. 4.2 と比較してみるとおもしろい。

Ex. 3.3. (2.1)で与えた system を考える。その system に対して、次の条件を満たす正の定数 $\beta_1, \beta_2, \delta_3, \delta_4$ が存在することを仮定する。

a) $\displaystyle \varliminf_{|x|\to\infty} \frac{|f(t,x)|}{|x|^{\beta_1}} > 0$, $\displaystyle \varlimsup_{|x|\to\infty} \frac{|G(t,x)|}{|x|^{\beta_2}} < \infty$

b) $(f(t,x), x) \leqq -\delta_3 |x|^{\beta_1+1}$ if $|x| \geqq \delta_4$,

このとき次のことが言える。

(I). もし $1\geqq\beta_1>\beta_2$ ならば、$X(t)$ は strongly exp. ω-th ult. bdd である。(従って ω-th ult. bdd)。

(II) もし $1>\beta_1=\beta_2$ であっても、$(1-\beta_1)\delta_3 > n^2 C(1-\beta_1+\beta_1^2)$ であれば、str. exp. ω-th ult. bdd である。ここで、C は仮定(A_1), (A_2) (§2) に現われる定数。

証明は、上のような条件が満たされるときには、$\alpha>0$ を適当にえらんで $|x|\geq 1$ では $e^{|x|^\alpha}$ に等しいような C^2-class の函数を $V(t,x)$ としてとれば、その $V(t,x)$ が Th.3.3 (B)′ の条件を満たすことから分る。実際にそれを示すのはすこし計算をせねばならないが、こゝでは略す。

この例の意味は、「diffusion がないとみなしたときの(i.e. drift の項) system が安定であるとき、小さな diffusion が加わっても安定である」という主張をしていること。

§4. Liapunov 函数の存在に関する理論

Liapunov の理論によるという以上、Liapunov 函数の存在が安定性のための十分条件であるだけでなく、必要条件でもあることが望ましい。すなわち、1つの安定性を持つことと、ある性質を持つ Liapunov 函数の存在とが1対1に対応すること。これについて十分な結果は得られなかったが、たとえば Cor.4.1 Cor.4.2. 等、付随的なことでもおもしろいことがある。

<u>Theorem 4.1</u> $X(t)$ を (2.1) によるものとする。(2.1) の係数が (A_1). (A_2) ばかりでなく、$f(t,x)$, $G(t,x)$ 共に C^2-class で、f_x, f_{xx}, G_x, G_{xx} はみな有界とする。このような仮定の下で、$X(t)$ がある $p>0$ について exp. p-th ult. bdd. である

とすると、Th.3.1.(B) の条件をみたすような函数 $V(t,x)$ が存在する。

(証明). Khas'minskii が [3] の中で、同様の定理を証明しているのと同じようにしてなされる。ただ、対象としている system が少し異なるので、じゃっかんの修正を行なってゆけばよい。概略を述べる。

$$V(t,x) \equiv \int_t^{t+T} M_{t,x} h(X(u))\, du.$$

とおく。こゝで、$h(x)$ は Lemma 2.2. のときと同じものであり、T はある適当な定数でのちに述べるような条件をみたす程度に大にとればよい。そのとき、この $V(t,x)$ がおめる $V(t,x)$ の性質を持っていることを示そう。

(iii)$'$ をみたすことは、$X(t)$ が exp. p-th ult. bdd なることより容易に分る。(T は正に fix すれば何であってもよい。)

(ii) は、Cor. 2.2. により、上での逆向きの不等式が保障されるので、T を適当に大にとればよいことは容易に示される。

問題は (i) のなめらかさと (iii) の不等式である。そのために次の Lemma を用意する。

<u>Lemma</u> 4.1　(2.1) の system を考える。その係数が、Th. 4.1. に述べた仮定をみたしているとする。次に、$\varphi(x)$ を C^2-class の函数で、$\varphi(x)$, $\varphi_x(x)$, $\varphi_{xx}(x)$ がみな、ある $r>1$ について、locally uniformly r-th integrable (この意味は

下で説明する）とする。このとき、

$$u(t,x) \equiv M_{t,x}\varphi(X(s)) \qquad t<s$$

は、(t,x) の函数として C^2-class で、次の等式を満たす。

$$\mathcal{L}\, u(t,x) = 0, \qquad t<s.$$

Remark. $\varphi(x)$ が locally uniformly r-th integrable とは任意の compact set $[t_0, s]\times D \subset [0,\infty)\times R^n$ 上の点 (t,x) について、$M_{t,x}|\varphi(X(s))|^r \leqq C(t_0, s, D) < \infty$ となることである。Cor. 2.1. により、x の多項式は常にこの条件をみたしている。今必要なのは、$\varphi(x)$ が多項式の場合だけでよく、その場合だと Khas'minskii が示している方法で証明できる。（やはり多少の修正をして。）しかし後の定理のために、上のような一般化されたLemma が有用である。(Th. 4.3 に。)

（証明）は長くなるので省略する。方針だけ言うと、$\varphi(x)$, $\varphi_x(x)$, $\varphi_{xx}(x)$ が有界な場合には [1] で証明されている。その事実を使って、一般の $\varphi(x)$ に対しては、[1] の結果の使える $\varphi_n(x)$ で近似して、$\varphi(x)$ についても成立することを言う。（この方法は、Khas'minskii とは異なっており、それ故より一般化されたLemma になっている。）

このLemma を仮定すると、残った部分のうち (i) はよい。(ii) については、積分と微分の順序交換をして計算して次のような等式をうる。

$$\mathcal{L}V(t,x) = u(t,x,t+T) - u(t,x,t) + \int_t^{t+T} \mathcal{L}_{t,x} u(t,x,s)\,ds.$$

これに Lemma 4.1 を使って、 $\mathcal{L}V(t,x) = u(t,x,t+T) - u(t,x,t)$.
あとは、$u(t,x,s)$ の定義に戻ってこの右辺の評価をすれば容易に(iii)が得られる。 (Q.E.D.)

Corollary 4.1　$X(t)$ は Th.4.1 の条件をすべてみたしているとする。さらに、(2.1) の係数 $f(t,x)$, $G(t,x)$ が時間的に一様だとする。そのとき次の不等式が成立する。

$$\varliminf_{|x|\to\infty} \frac{|f(x)|+|G(x)|}{|x|} > 0.$$

(証明) 詳しい計算をせずに概略を述べる。Th.4.1 の $V(t,x) = V(x)$ (今の場合時間的に一様) は条件(iii)をみたしているはずである。その一方で、$\mathcal{L}V(x)$ を、$\sum_i f_i \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{ij} \sigma_{ij} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j}$ として、この式の $|x|$ についての order を計算してみる。(この計算は Lemma 4.1 の証明中に示される不等式等を使う。) その結果、(iii) が成立するためには、Corollary の結論が必要であることが示される。 (Q.E.D.)

Corollary 4.2.　$X(t)$ は $p=\frac{4}{3}$ として Th.4.1 のすべての仮定が満たされているとする。このとき、さらに次の条件

$$|G(t,x)| \leqq c_{11}(1+|x|^r), \qquad 0 \leq r < \frac{1}{3}$$

が成立しているとすると、$X(t)$ は str. exp. w-th ult. bdd.

(証明) $V(t,x)$ を $p=\frac{4}{3}$ に対して Th.4.1 で保障されて

いる $X(t)$ の Liapunov fn. とする。この $V(t,x)$ は Th.3.1.(B) の条件を満たしている。このとき $W(t,x)=e^{V(t,x)}$ とおくと、この $W(t,x)$ が Th.3.3.(B)′ の条件を満たしていることが示される。条件 $0\leqq r<\frac{1}{3}$ がどこで効いているかを見るためには、ちゃんと計算をしてみせないと分らないが、今は証明のための計算は省略する。 (Q.E.D.)

このCor. によって、exp. p-th ult. bdd なもののうち、どれくらいが ω-th ult. bdd になるかという問題が起る。Ex.3.2 が1つの反例を示していることは前に注意した通り。

必ずしも exponential type でない $X(t)$ に対しては、きれいな定理はえられない。が、部分的に分ることもある。

今、$X(t)$ を p-th ult. bdd とし、K をその定数とする。R^1 上の函数 $G(r)$ を $G(r)=0$, $(r\leqq K_1=K+1)$, $G(r)\equiv r+1-K_2$ $(r\geqq K_2=K+2)$, 全体でなめらかで、$0\leqq G(r)\leqq 1$. $(K_1\leq r\leq K_2)$ に定め $u(t,x,s)=M_{t,x}\,h(X(s))$ とおき、

$$V(t,x)\equiv\int_t^{\infty}G(u(t,x,s))\,e^{\lambda(\tau-t)}\,d\tau,\qquad \lambda>0.$$

とおいて、この $V(t,x)$ が Liapunov 函数となるような場合を調べてみる。その結果次の定理をうる。

<u>Theorem</u> 4.2. $X(t)$ について、次のことを仮定する。(2.1) の係数について、Th.4.1 での仮定がすべてみたされ、しかも $G(t,x)$ の x についての carrier が compact とする。そして

$X(t)$ は p-th ult. bdd とする。このとき．Th.3.1 (A) の条件を満たす函数 $V(t,x)$ が存在する。

次に、w-th ult. bdd に関連した定理を述べる。

<u>Theorem</u> 4.3 ． $X(t)$ は (2.1) によるものとし，(2.1) の係数は Th.4.1 の仮定をすべてみたすとする。このとき、もし $X(t)$ が str. exp. w-th ult. bdd ならば，Th.3.3 (B) の条件をみたす $V(t,x)$ (i.e. exp. w-th ult. bdd に対応すべき $V(t,x)$) が存在する。

(証明) は、かなり繁雑である。それに比して得られる結果がそれ程きれいでもないので，ここでの証明は省略する。

この § は省略した部分が多いが、その部分については、前に述べたごとく，[7] を見ていただくこと。

§5. Recurrence Property

Wonham が [5] で示した結果を使うと，(2.1) が時間的に一様でしかも退化していないときには，Th.4.1 の条件をみたしている $X(t)$ は positive recurrent であることが分る。それでは，もっと弱い条件の下ではどの程度の recurrence property が成立するかについて、1つの結論を与えようというのが，この § の内容である。

<u>定義</u> 5.1 process $X(t)$, $t \geqq 0$, は，ある定数 K が存在して

任意の (t,x) に対し $P_{t,x}\{\omega ; \exists s \geq 0, |X(t+s)| \leq K\} = 1$ となるとき、<u>weakly recurrent</u> という。

このとき $\{x ; |x| \leq K\}$ を、<u>recurrent region</u> という。

<u>定義</u> 5.2　$X(t)$、$t \geq 0$、は、weakly recurrent であって、recurrent region $\{x ; |x| \leq K\}$ への first hitting time $\tau(\omega)$ に対して、任意の (t,x) について $M_{t,x}\tau(\omega) < \infty$ となるとき、<u>weakly positive recurrent</u> という。

上のように定義を与えたとき、次の2定理が示せる。

<u>Theorem</u> 5.1　(2.1) によって定められる process がある $p>0$ について p-th ult. bdd であれば、weakly recurrent である。

<u>Theorem</u> 5.2　(2.1) によって定められる process $X(t)$ は、ある $p>1$ について exp. p-th ult. bdd であるならば、$X(t)$ は weakly positive recurrent である。

上の両定理はそれぞれ、次の Lemma 5.1 ないしは 5.2 の Corollary として得られる。

<u>Lemma</u> 5.1　$X(t)$, $t \geq 0$, を Markov process とし、それに対して $[0,\infty) \times R^n$ 上の Borel measurable 函数 $\rho(t,x)$ と定数 K, α とが存在して、任意の (t,x) に対し

$$P_{t,x}\{\omega ; |X(t+\rho(t,x), \omega)| \leq K\} \geq \alpha > 0.$$

となっていれば、$X(t)$ は weakly recurrent である。

Lemma 5.2　$X(t), t\geq 0$, をMarkov processとする。これに対して、$[0,\infty)$ 上の非減少函数 $W(r)$ と定数 K、P が存在して次の条件をみたしているとする。

a) 任意の (t,x) に対して、$s\geq W(|x|)$ のとき

$$M_{t,x}|X(t+s)|^p\leq K^p$$

b) 任意の $N>0$ に対し $\sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{\ell^p}W((\ell+1)N)<\infty$.

そのとき、$X(t)$ はweakly positive recurrentである。

(Lemma 5.1を使って、Th.5.1の証明).

$M_{t,x}|X(s)|^p$ は、(t,x) をfixしたとき s について連続で、s をfixしたとき (t,x) について連続。従って、次のようなBorel可測函数 $\rho(t,x)$ が定義できる。

$$M_{t,x}|X(t+\rho(t,x))|^p\leq K_1^p=(1+\varepsilon)K'.$$

ただし、K' はp-th ult. bddのときの定数 K' であり、ε は任意にfixした正の定数。$K=K_1+\varepsilon$ とおけば、Tchebychevの不等式より、$P_{t,x}\{\omega;|X(t+\rho(t,x))|>K\}\leq\frac{1}{K^p}M_{t,x}|X(t+\rho(t,x))|^p$ $\leq\frac{K_1^p}{K^p}=1-\alpha<1$、となり、Lemma 5.1の条件が満たされることが分る。　(Q.E.D.)

(Lemma 5.2を使ってTh.5.2の証明). K_1 を、$X(t)$ のult. bdd. を定めているときの定数とし、$K=K_1+1$ とおく。Th.3.1の下で注意しておいたように、$W(r)$ として、$W(r)=d_1\log(1+r)+d_2$ の形の函数を適当にとれば、条件a)が

満たされる。条件b)については、$p>1$ と logarithm 函数であることにより保障される。よって結論をうる。　(Q.E.D.)

(Lemma 5.1 の証明)　Ω_i, $i=1,2,\dots$ を、$\Omega_1=\{\omega\in\Omega, |X(t+\rho(t,x))|>K\}$
$\Omega_2=\{\omega\in\Omega_1, |X(t+\rho(t,x)+\rho(t+\rho(t,x),X(t+\rho(t,x))))|>K\}$ ----
$\Omega_\infty=\bigcap_i\Omega_i$ とおいて、$P_{t,x}(\Omega_\infty)=0$ を示せば十分。
$P_{t,x}(\Omega_1)\leqq 1-\alpha<1$, 以下、$\rho(t,x)$ の Borel 可測性があるので $X(t)$ の Markov 性を使って　$P_{t,x}(\Omega_2)=M_{t,x}\{\chi_{\Omega_1}(\omega)P_{t+\rho(t,x),X(t+\rho(t,x))}\{\omega;\ \cancel{(*)}\}\}$

(*)：$|X(t+\rho(t,x)+\rho(t+\rho(t,x),X(t+\rho(t,x))))|>K$

$\leqq(1-\alpha)^2$, ----　$P_{t,x}(\Omega_i)=(1-\alpha)^i$。これによって $P_{t,x}(\Omega_\infty)=0$ となる。　(Q.E.D.)

(Lemma 5.2 の証明).　Tchebychev により

$$P_{t,x}\{\omega;|X(t+W(|x|))|\geqq kK\}\leqq\frac{1}{k^p}.$$

$K'=(1+\varepsilon)K$ とおく。ここで ε はのちに定める定数。$E_0=\{x;|x|\leqq K'\}$；$E_l=\{x;lK'<|x|\leqq(l+1)K'\}$, $l=1,2,\dots$　とおく。
$\{x_m(\omega)\}_{m=1,2,\dots}$ を、$x_0(\omega)=x$, $x_1=X(t+W(|x|))$, $x_2=X(t+W(|x|)+W'(l+1))$　ただし、$x_1\in E_l$ のとき。　ここで $W'(l)=W(lK')$。
以下、$x_m=X(t+W(|x|)+W'(l_1+1)+\dots+W'(l_{m-1}+1))$, $x_i\in E_{l_i}$, $i=1,\dots,m-1$, として定義する。

$\Omega_m=\{\omega\in\Omega;x_1\notin E_0,\dots,x_{m-1}\notin E_0, x_m\in E_0\}$ とおくと、
$\Omega\equiv\sum_{m=1}^{\infty}\Omega_m$。(∵ Lemma 5.1 により、$E_0$ は recurrent region)
$\Omega_{m,l_1,\dots,l_{m-1}}=\{\omega;x_1\in E_{l_1},\dots,x_{m-1}\in E_{l_{m-1}},x_m\in E_0\}$　と

おく。 $\tau(\omega)$ を E_0 への hitting time とすると，

$$\tau(\omega) \leqq W(|x|) \quad \text{on } \Omega_1$$

$$\tau(\omega) \leqq W(|x|) + W'(l_1+1) + \cdots + W'(l_{m-1}+1) \quad \text{on } \Omega_{m, l_1 \cdots l_{m-1}},$$

こうして，

$$M_{t.x}[\tau(\omega)] \leqq \sum_{m, l_1, \cdots, l_{m-1} \geqq 1} P_{t.x}(\Omega_{m, l_1, \cdots, l_{m-1}})[W(|x|) + W'(l_1+1) + \cdots + W'(l_{m-1}+1)]$$

が得られる。あと，この右辺の収束を示せばよい。Markov性を使って，帰納的に，次の不等式が示せる。

$$P_{t.x}(\Omega_{m, l_1, \cdots, l_{m-1}}) < \frac{1}{(1+\varepsilon)^{p(m-1)}} \frac{1}{(l_1)^p} \cdots \frac{1}{(l_{m-1})^p}.$$

これを代入して，

$$\begin{aligned} &M_{t.x}(\tau(\omega)) \\ &\leqq W(|x|) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{p(m-1)}} \sum_{l_1, \cdots l_{m-1} \geqq 1} \frac{W(|x|) + W'(l_1+1) + \cdots + W'(l_{m-1}+1)}{(l_1)^p \cdots (l_{m-1})^p} \\ &= W(|x|) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{p(m-1)}} \Big\{ W(|x|) \cdot \sum_{l_1 \cdots l_{m-1}} \frac{1}{(l_1)^p \cdots (l_{m-1})^p} \\ &\qquad + (m-1) \sum_{l_1 \cdots l_{m-1}} \frac{W'(l_1+1)}{(l_1)^p \cdots (l_{m-1})^p} \Big\} \\ &= W(|x|) + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\varepsilon)^{p(m-1)}} \{ W(|x|) A^{m-1} + (m-1) A^{m-2} B \} \\ &\doteq W(|x|) + W(|x|) \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{A}{(1+\varepsilon)^p} \right)^{m-1} + \frac{B}{(1+\varepsilon)^p} \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{A}{(1+\varepsilon)^p} \right)^{m-2} (m-1), \end{aligned}$$

ここで，$A = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^p}$，$B = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^p} W'(l+1)$ である。これが収束して

いることはLemmaの仮定より保障されており，Bの値はε
に依存しているが，Aの値はεに依存していないことに注意
して、上式の級数がεを適当に大にすれば収束することが分
る。これで，Lemmaの結論をうる。　　　　(Q.E.D.)

引 用 文 献

[1] Gikhman-Skopokhod ; Introduction to the Theory of Random Processes, 1965.

[2] M. B. Nevel'son and P. Z. Khas'minskii ; Stability of Stochastic Systems, Problemy Peredachi Informatsii, vol. 2, No. 3, pp. 76-91, 1966.

[3] Р.Э.Хасьминский ; Чстойчивость систем дифференциальных уравнений прп случайных возмущениях их параметров, 1969.

[4] M. Zakai ; On the Ultimate Boundedness of Moments associated with Solutions of Stochastic Differential Equations, SIAM J. Central vol. 5, No. 4, 1967, pp. 588-593.

[5] W. M. Wonham ; Liapunov Criteria for Weak Stochastic Stability, J. of Diff. Eq. 2, pp. 195-207, 1966.

[6] H. J. Kushner ; Stochastic Stability and Control, A.P. 1967

[7] Y. Miyahara ; Ultimate boundedness of the systems governed by stochastic differential equations. (to appear in Nagoya M. J.)