数理解析研究所講究録
第138巻 1972年 69-85

確率微分方程式の解の一意性条件について —多次元の場合—

九大 工　山田 俊雄
京大 理　渡辺 信三

§0. 序

こゝで考察する stochastic differential equation は

(1) $$dx_t = \sigma(t, x_t)\, dB_t + b(t, x_t)\, dt.$$

$\sigma(t, x) = (\sigma^i_j(t, x))$, $i = 1, \cdots n$. $j = 1, \cdots, r$

の $(n \cdot r)$-matrix. $t \in [0, \infty)$ $x \in R^n$.

$b(t, x) = (b^i(t \cdot x))$ $i = 1, \cdots n$.

の形をしているものとする。 $b^i(t, x)$ $\sigma^i_j(t \cdot x)$ は bounded. Borel measurable functions としておく。

(1) を Componentwise に書くと.

(1′) $$dx^i_t = \sum_{j=1}^{r} \sigma^i_j(t, x_t)\, dB^j_t + b^i(t, x_t)\, dt.$$

$i = 1, \cdots, n$. である.

(1) 又は (1′) の"解"の詳しい formulation を次に与えよう。

Increasing family of Borel fields を伴った確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ i.e. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は確率空間. $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ 且つ $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$: $t < s$. を用意しておく.

Def. $\mathfrak{X} = \left(x_t = (x_t^1, \cdots x_t^n),\ B_t = (B_t^1, \cdots B_t^n) \right)$ が (1) の solution であるとは $\mathfrak{X}$ は $(\Omega, \mathcal{F}, P ; \mathcal{F}_t)$ で定義され以下の (i)〜(iv) をみたすことを意味する.

(i) x_t, B_t は t に関して 確率 1 で連続, $B_0 \equiv 0$.

(ii) x_t, B_t は $\mathcal{F}_t$-adapted, i.e. 各 t に対して, x_t. B_t は $\mathcal{F}_t$-measurable.

(iii) B_t は $\mathcal{F}_t$-Brownian motion. i.e. B_t は $\mathcal{F}_t$-martingale の system で $\langle B_t^i, B_t^j \rangle = \delta_{ij} t$ をみたす.
こゝに $\langle B_t^i, B_t^j \rangle$ は bounded variation process で $B_t^i B_t^j - \langle B_t^i, B_t^j \rangle$ が $\mathcal{F}_t$-martingale となる process として定義されているものとする。

(iv) $$x_t^i - x_0^i = \int_0^t \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^i(s, x_s)\, dB_s^j + \int_0^t b^i(s, x_s)\, ds$$

$i = 1, \cdots n$. が確率 1 でなりたつ. こゝに dB_s^j による積分は確率積分の意味 ~~する~~ である.

Def. (Path-wise uniqueness). (1) の solution に関して Pathwise uniqueness がなりたつとは, $(\Omega, \mathcal{F}, P : \mathcal{F}_t)$

上の二つの(1)の solutions $\mathfrak{X}=(x_t, B_t)$; $\mathfrak{X}'=(x_t', B_t')$ に対して，もし $x_0=x_0'$ ，$B_t \equiv B_t'$ が確率1でなりたつなら，$x_t \equiv x_t'$ が確率1でなりたつことをいう.

この他に分布の意味の Uniqueness という概念も定義出来る（[5] 参照）

○ Pathwise uniqueness がなりたつ ⇒ 分布の意味の Uniqueness がなりたつ.

○ (1) の solution が任意の初期分布に対して存在して，分布の意味の Uniqueness がなりたつとき (1) の solution は diffusion process である.

等のことがわかっている. これらについては ([5])参照

以下に於て問題とすることは，σ 及び b の modulus of continuity に条件を与えて (1) の solution の Pathwise Uniqueness を導くことである.

σ，及び b が Lipschitz の条件をみたすとき (1) の solution に関して Pathwise Uniqueness がなりたつことは伊藤清氏によって知られている.（一般の次元で）

又，$n=1$ のとき $dx_t = \sigma(t, x_t)\,dB_t$

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le K\cdot|x-y|^{\alpha} \qquad \alpha > \frac{1}{2}$$

であれば Pathwise uniqueness がなりたつことを Skorohod が示し([1]), 田中洋氏が後に鮮やかな別証明を与えた([2])

昨年の数理解析研でのマルコフ過程シンポジウムで話したことは, "Skorohod - Tanaka の結果の改良で以下のことを証明した。"$dX_t = \sigma(t,X)\,dB_t + b(t,X_t)\,dt$. $n=1$

$$|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le \rho(|x-y|), \quad |b(t,x)-b(t,y)| \le G(|x-y|)$$

$$\int_{0+}\frac{du}{\rho^2(u)} = \infty, \quad G.\ \text{concave 且つ} \int_{0+}\frac{du}{G(u)} = \infty$$

であれば Pathwise uniqueness がなりたつ."

これは Hölder continuity $|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| \le K|x-y|^{\alpha}$ $\alpha \ge \frac{1}{2}$ を含むことにより Skorohod - Tanaka の結果の改良になっている(*). 又, Girsanov ([3]) は $0<\alpha<\frac{1}{2}$ のとき Pathwise Uniqueness がなりたゝぬ例を与えているので, modulus of continuity に関する条件としては ($n=1$で) ほゞ best possible なものである。

今回の報告では一般の次元の場合, Pathwise uniqueness を保障する条件が次元によってどのように異ってくるかを中心としてのべる.

(*) H. P. McKean Jr. は ([4]) で $\sigma(t,x)=|x|^{\alpha}$ のとき $\alpha \ge \frac{1}{2}$ で $dX_t = |X_t|^{\alpha}dB_t$ は Pathwise uniqueness であることを示している

§1. 簡単のため drift の項のない場合を論じる．
以下で ρ はある interval $[0, a)$ $(a>0)$ で定義され $\rho(0)=0$
continuous increasing function としておく．

(2) $$dX_t = \sigma(t, X_t)\,dB_t. \quad \sigma(t\cdot x) = (\sigma^i_j(t\cdot x))$$
$i=1,\cdots,n.\ \ j=1,\cdots r.$

<u>Theorem 1.</u> ρ が次の条件をみたすとせよ．

(3) $$\int_{0+} \rho^{-2}(\xi)\cdot\xi\, d\xi = \infty$$

(4) $\rho^2(\xi)\cdot\xi^{-1}$ は $\xi=0$ の近傍で Concave. 且つ.
$\rho^2(\xi)\cdot\xi^{-1} \downarrow 0 \quad (\xi\downarrow 0)$

~~(5) $\|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\| \le \rho(|x-y|)$ (*)~~
~~このとき (2) の solution に関して Pathwise uniqueness がなりたつ．~~

このとき $\sigma(t,x)$ が

(5) $\|\sigma(t,x)-\sigma(t\cdot y)\| \le \rho(|x-y|)$ (*) $x, y\in R^n.$ $|x-y|\le a.$

であれば (2) の solution に関して Pathwise uniqueness がなりたつ．

(*) $\|\sigma(t\cdot x)-\sigma(t\cdot y)\| = \max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le r}} |\sigma^i_j(t\cdot x)-\sigma^i_j(t\cdot y)|$

Remark 1.

$\rho(\xi) = \xi$, $\rho(\xi) = \xi\cdot\left(\log\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\rho(\xi) = \xi\cdot\left(\log\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\log^{(2)}\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}$,

$\cdots$ 等は Theorem 1. の (3), (4) をみたす.

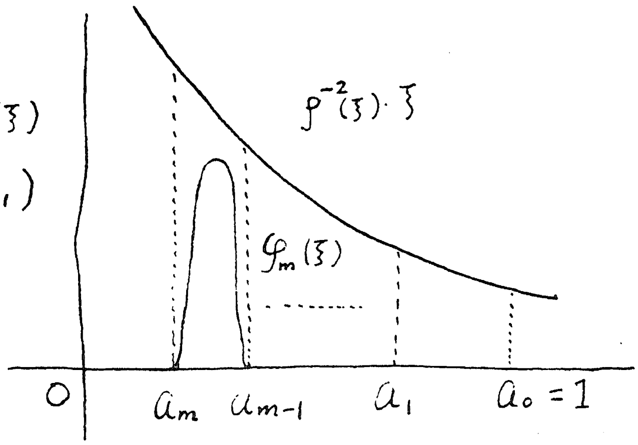
(Theorem 1. の証明)

ρ を適当に延長し, $[0, \infty)$ で定義され, $\rho^2(\xi)\cdot\xi^{-1}$ concave 且つ (5) がすべての $x, y \in R^n$ に対してなりたつようにしておく.

条件 (3) に注意して

$1 = a_0 > a_1 > \cdots\cdots > a_{m-1} > a_m > \cdots \downarrow 0$ を

$\int_{a_m}^{a_{m-1}} \rho^{-2}(\xi)\cdot\xi\, d\xi = 2$ をみたすように選ぶ.



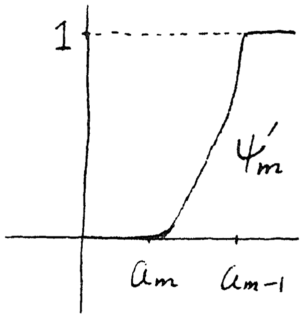
Continuous function $\varphi_m(\xi)$

を $\mathrm{Supp}(\varphi_m) \subset (a_m, a_{m-1})$

$0 \leq \varphi_m(\xi) \leq \rho^{-2}(\xi)\cdot\xi$

$\int_{a_m}^{a_{m-1}} \varphi_m(\xi)\, d\xi = 1$

をみたすように選ぶ.



$\psi_m(\eta) = \int_0^\eta d\theta \int_0^\theta \varphi_m(\xi)\, d\xi$, $\eta \in [0, \infty)$

とおくと

$\psi''_m(\xi) = \varphi_m(\xi)$. $\psi_m(\eta) \uparrow \eta \ (m \uparrow \infty)$

$f_m(x) = \psi_m(|x|)$ とおくと $f_m(x)$ は R^n で定義され且つ
$f_m(x) \uparrow |x|$ $(m \uparrow \infty)$, $f_m(x) \in C^2(R^n)$ である.

さて，今ある $(\Omega, \mathcal{F}, P; \mathcal{F}_t)$ 上に (2) の二つの solutions $\mathcal{X} = (x_t, B_t)$, $\mathcal{X}' = (x_t', B_t')$ があり，
$x_0 \equiv x_0'$, $B_t \equiv B_t'$ (a.s. P) とする.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_m(x) = \psi_m'(|x|) \cdot \frac{x_i}{|x|} \qquad x = (x_1 \cdots x_n)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x) = \psi_m''(|x|) \frac{x_i x_j}{|x|^2} + \psi_m'(|x|) \frac{|x|^2 \delta_{ij} - x_i x_j}{|x|^3}$$

$|\psi_m'(|x|)| \leq 1$ に注意すると

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x) \right| \leq K_1 \frac{1}{|x|} I_{\{x \neq 0\}} + K_2 \psi_m''(|x|)$$ を得る.

ここに K_1, K_2 はある正の定数である.

Itô の公式を用いて

$$f_m(x_t - x_t') = a \text{ martingale}$$

$$\boxed{\cancel{+\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x(s) - x'(s)) \left\{ \sum_{k=1}^r (\sigma_k^i(s, x_s) - \sigma_k^i(s, x_s')) \right.}}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f_m(x(s) - x'(s)) \left\{ \sum_{k=1}^r (\sigma_k^i(s, x_s) - \sigma_k^i(s, x_s'))(\sigma_k^j(s, x_s) - \sigma_k^j(s, x_s')) \right\} ds$$

$$\therefore \quad E[f_m(x_t - x_t')] \leq K_3 \int_0^t E[I_{\{x_s \neq x_s'\}} |x_s - x_s'|^{-1} \rho^2(|x_s - x_s'|)] ds$$

$$+ K_4 \int_0^t E(\psi_m''(|x_s - x_s'|) \cdot \rho^2(|x_s - x_s'|) ds \equiv I_1 + I_2$$

ここに K_3, K_4 は正の定数.

I_2 を評価する $\mathrm{Supp}(\varphi_m'') \subset (a_m, a_{m-1})$

$\varphi_m''(\xi) \leq \rho^{-2}(\xi)\cdot\xi$ に注意すると．

$$I_2 \leq K_4 \int_0^t E\left[\frac{|x_s - x_s'|}{\rho^2(|x_s - x_s'|)} \rho^2(|x_s - x_s'|)\cdot I_{\{a_m \leq |x_s - x_s'| \leq a_{m-1}\}}\right] ds$$

$$\leq K_4 \cdot a_{m-1}\cdot t \to 0 \quad (m \uparrow \infty)$$

よって

$$E[|x_t - x_t'|] \leq K_3 \int_0^t E[I_{\{x_s \neq x_s'\}} |x_s - x_s'|^{-1} \rho^2(|x_s - x_s'|)]\, ds$$

$\rho^2(\xi)\cdot\xi^{-1} \downarrow 0 \ (\xi \downarrow 0)$ によって

$$= K_3 \int_0^t E[|x_s - x_s'|^{-1} \rho^2(|x_s - x_s'|)]\, ds$$

$G(\xi) = \rho^2(\xi)\cdot\xi^{-1}$ とおくと $G(\xi)$ concave $\displaystyle\int_{0+} \frac{d\xi}{G(\xi)} = \infty$

$$\therefore\ E[|x_t - x_t'|] \leq K_3 \int_0^t E[G(|x_s - x_s'|)]\, ds$$

$$\leq K_3 \int_0^t G(E|x_s - x_s'|)\, ds$$

$\therefore\ E|x_t - x_t'| \equiv 0$ 　　Q. E. D.

<u>Remark 2</u>. Theorem 1 の条件 (3) は $n \geq 3$ の場合．次のような意味でほゞ best possible である．

すなわち，$\displaystyle\int_{0+} \rho^{-2}(\xi)\cdot\xi\, d\xi < \infty$，且つ ρ が subadditive i.e. $\rho(\xi_1+\xi_2) \leq \rho(\xi_1)+\rho(\xi_2)$, $\forall \xi_1, \xi_2 \in [0, \infty)$

とすると (5) をみたす $\sigma(t, x)$ で (2) の solution に関して Pathwise uniqueness がなりたたぬものが存在する.

実際 $\sigma^i_j(t, x) = \delta_{ij}\, \rho(|x|)$ $i, j = 1, \cdots, n$. $x \in R^n$

$n \geq 3$. とおくと.

$$\left|\sigma^i_j(t, x) - \sigma^i_j(t, y)\right| \leq \left|\rho(|x|) - \rho(|y|)\right| \leq \rho(|x-y|)$$

がなりたつ. そこで

$$(6) \quad \begin{cases} dx_t = \sigma(x_t)\, dB_t \\ x_0 \equiv 0 \end{cases}$$

を考える.

$(\Omega, \mathcal{F}, P : \overline{\mathcal{F}}_t)$ 上に n-dimensional Brownian motion $\{\overline{B}_t, \overline{\mathcal{F}}_t\}$ が与えられているとする.

$A_t \equiv \int_0^t \rho^{-2}(|\overline{B}_s|)\, ds$ ときめると. A_t は $\overline{B}_t$ の non-negative continuous additive functional で $n \geq 3$ なので

$$E[A_t] = \text{Const.} \int_0^\infty \rho^{-2}(\xi) \cdot \left[\int_0^t \frac{1}{(2\pi s)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\xi^2}{2s}} ds\right] \xi^{n-1} d\xi$$

$$\leq \text{Const} \int_{0+} \rho^{-2}(\xi) \cdot \xi \cdot d\xi < \infty$$

$\therefore\ P(A_t < \infty \quad \forall t > 0) = 1.$

ここで A_t^{-1} ($t \mapsto A_t$ の inverse function) を考えると

($\overline{B}_{A_t^{-1}}$, $\overline{\mathcal{F}}_{A_t^{-1}}$) は local martingale の system で

$$\langle \overline{B}^i_{A_t^{-1}}, \overline{B}^j_{A_t^{-1}} \rangle = \delta_{ij} A_t^{-1} = \delta_{ij} \int_0^t f^2(\overline{B}_{A_s^{-1}})\, ds$$

$$= \int_0^t (\sigma^t \sigma)_{ij} (\overline{B}_{A_s^{-1}})\, ds.$$

それで $\left(B_t \equiv \int_0^t \sigma^{-1}(\overline{B}_{A_s^{-1}})\, d\overline{B}_{A_s^{-1}}, \quad \mathcal{F}_t \equiv \overline{\mathcal{F}}_{A_t^{-1}} \right)$

とおくと　これは n-dim Brownian motion

さて ($X_t \equiv \overline{B}_{A_t^{-1}}$, B_t) は (6) の solution.

一方 ($X'_t \equiv 0$, B_t) も (6) の solution であるので

pathwise uniqueness は成立しない.

~~Theorem 1 要は n=1, 及び n=2 の場合 σ(t,x) の特別のクラスに対し~~

Theorem 1 は $n=1$, 及び $n=2$ のとき以下のように改良出来る.

Theorem 2.

ρ が

(7) $\displaystyle\int_{0+} \rho^{-2}(\xi)\,d\xi = \infty$ をみたすとき.

$\sigma(t \cdot x) = \left(\sigma_j^1(t \cdot x)\right)$ $j=1,\cdots,r$ $(t \cdot x) \in [0\,\infty) \times R^1$

が $\|\sigma(t \cdot x) - \sigma(t \cdot y)\| \leq \rho(|x-y|)^{*}$ $\forall x \cdot y \in R^1$

をみたすとき. つねに

$$dx_t = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j^1(t, x_t)\,dB_t^j$$

の solution に関して Pathwise uniqueness がなりたつ.

証明は昨年の Symposium (数理研 1970. 11月~12月) で与えたものと本質的には同じである. ([5]) を参照

又. 条件 (7) はほゞ best possible であることは Girsa-nov の反例によってわかる. ([3]) ([4])

(*) $\|\sigma(t \cdot x) - \sigma(t \cdot y)\| \equiv \max\limits_{1 \leq j \leq r} \left|\sigma_j^1(t \cdot x) - \sigma_j^1(t \cdot y)\right|$

$n=2$ の場合，一般に $(2, r)$ 型 matrix $\sigma(t.x)$ に関して Theorem 1. が改良出来るかどうかは，現在のところ我々にはまだわかっていない．

しかし，次のような特別の $\sigma(t.x)$ の class に対して，Theorem 1 を改良することが出来る．

Theorem 3.

ρ が次の条件をみたすとする

(8) $\int_{0+} \rho^{-2}(\xi)\cdot\xi\cdot\log\frac{1}{\xi}\,d\xi=\infty$

(9) $G(\eta)=\eta^3 e^{\frac{2}{\eta}}\rho^2(e^{-\frac{1}{\eta}})$ がある区間 $[0, a')$ で Concave.

このとき $\sigma^i_j(t\cdot x)=\delta_{ij}\,a(t.x)$ $\quad i\cdot j=1, 2$

$(t\cdot x)\in[0\cdot\infty)\times R^2.$ の形の (2.2)-matrix σ で

$\|\sigma(t.x)-\sigma(t, y)\|\leq\rho(|x-y|)$ (*) をみたす σ については $dx_t=\sigma(t, x_t)\,dB_t$ の solution に関して Pathwise uniqueness がなりたつ．

(*) $\|\sigma(t.x)-\sigma(t.y)\|=\max_{1\leq i.j\leq 2}|\sigma^i_j(t.x)-\sigma^i_j(t.y)|$

Remark. 3.

$$\rho(\xi) = \xi\cdot\left(\log\frac{1}{\xi}\right).\quad \rho(\xi) = \xi\cdot\left(\log\frac{1}{\xi}\right)\cdot\left(\log^{(2)}\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\rho(\xi) = \xi\cdot\left(\log\frac{1}{\xi}\right)\cdot\left(\log^{(2)}\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\log^{(3)}\frac{1}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}},\ \cdots$$

は (8). (9) をみたす.

(Theorem. 3 の証明)

ρ を $[0.\infty)$, G を $[0.\infty)$ に延長し, G は $[0.\infty)$ で concave になるようにしておく.

最初に

$$\int_{0+}\frac{d\eta}{G(\eta)} = \int_{0+}\rho^{-2}(e^{-\frac{1}{\eta}})e^{-\frac{2}{\eta}}\eta^{-3}\,d\eta = \int_{0+}\rho^{-2}(\xi)\cdot\xi\cdot\log\frac{1}{\xi}\,d\xi$$

$= \infty$. に注意し.

$1 = a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_{m-1} > a_m > \cdots \downarrow 0$

を $\displaystyle\int_{a_m}^{a_{m-1}}\frac{d\eta}{G(\eta)} = 2$ と選んでおく.

continuous functions φ_m を

$\mathrm{Supp}(\varphi_m) \subset (a_m, a_{m-1})$, $\quad 0 \le \varphi_m(\xi) \le G^{-1}(\xi)$

$\displaystyle\int_{a_m}^{a_{m-1}}\varphi_m(\xi)\,d\xi = 1$ をみたすように選び

$$\psi_m(\eta) = \int_0^{\eta} du \int_0^{u} \varphi_m(\xi)\, d\xi$$ とおくと．$(\eta \geq 0)$

$$\psi_m'(\eta) = \begin{cases} 0 & : \quad \eta \leq a_m \\ 0 \text{ と } 1 \text{ の間} & a_m \leq \eta \leq a_{m-1} \\ 1 & \eta \geq a_{m-1} \end{cases}$$

$$\psi_m''(\eta) = \begin{cases} 0 & \eta \leq a_m \\ 0 \text{ と } G^{-1}(\eta) \text{ の間}. & a_m \leq \eta \leq a_{m-1} \\ 0 & \eta \geq a_{m-1} \end{cases}$$

ここで $f_m(x) = \psi_m\left(\left[\log^+ \frac{1}{|x|}\right]^{-1}\right)$ (*) $x \in R^2$

とおくと $f_m(x) \in C^2(R^2)$ 且つ $f_m(x) \uparrow \left[\log^+ \frac{1}{|x|}\right]^{-1}$ $(m \uparrow \infty)$.

$\mathfrak{X} = (x_t, B_t)$. $\mathfrak{X}' = (x_t', B_t')$ を $(\Omega, \mathcal{F}, P : \mathcal{F}_t)$ 上の二つの solutions として $x_0 = x_0'$. $B_t \equiv B_t'$ とする．

Itoの公式を用いて．

$$f_m(x_t - x_t') = a \text{ martingale}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f_m(x_s - x_s') + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f_m(x_s - x_s')\right]\left[a(s, x_s) - a(s, x_s')\right]^2 ds$$

(*) $\log^+ x = (\log x) \vee 0 \quad x > 0$

一方

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f_m(x) + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f_m(x)$$

$$= \psi_m'\left(\left[\log^+\frac{1}{|x|}\right]^{-1}\right)\frac{1}{\left(\log^+\frac{1}{|x|}\right)^3}\frac{1}{|x|^2}$$

$$+ \psi_m''\left(\left[\log^+\frac{1}{|x|}\right]^{-1}\right)\cdot\frac{1}{\left(\log^+\frac{1}{|x|}\right)^4}\cdot\frac{1}{|x|^2}$$

$|\psi_m'| \leq 1$ に注意して

$$E[f_m(x_t - x_t')] \leq \cancel{K\int_0^t E[I_{\{x_s \neq x_s'\}}}$$

$$K\int_0^t E\left[I_{\{x_s \neq x_s'\}}\left(\log^+\frac{1}{|x_s - x_s'|}\right)^{-3}|x_s - x_s'|^{-2}\cdot\rho^2(|x_s - x_s'|)\right]ds$$

$$+\int_0^t E\left[\psi_m''\left(\left[\log^+\frac{1}{|x_s - x_s'|}\right]^{-1}\right)\cdot\left(\log^+\frac{1}{|x_s - x_s'|}\right)^{-4}\cdot|x_s - x_s'|^{-2}\cdot\rho^2(|x_s - x_s'|)\right]ds$$

$\equiv I_1 + I_2$ とおく. I_2 を評価する $\psi_m''(\xi) \leq G^{-1}(\xi)$ に注意して.

$$0 \leq I_2 \leq$$

$$\int_0^t E\Big[\left(\log^+\frac{1}{|x_s - x_s'|}\right)^3|x_s - x_s'|^2\rho^{-2}(|x_s - x_s'|)\left(\log^+\frac{1}{|x_s - x_s'|}\right)^{-4}|x_s - x_s'|^{-2}\cdot\rho^2(|x_s - x_s'|)\cdot$$

$$\cdot I_{\{a_m \leq [\log^+\frac{1}{|x_s - x_s'|}]^{-1} \leq a_{m-1}\}}\Big]ds$$

$$\leq \int_0^t E\left[I_{\left\{ a_m \leq \left[\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}\right]^{-1} \leq a_{m-1} \right\}} \cdot \left[\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}\right]^{-1} \right] ds$$

$$\leq t \cdot a_{m-1} \to 0. \quad (m \to \infty).$$

$$\therefore \quad E\left[\left[\log^+ \frac{1}{|x_t - x'_t|}\right]^{-1}\right] \leq K \cdot \int_0^t E\left\{ G\left(\left[\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}\right]^{-1}\right)\right\} ds.$$

$G(\xi)$ が concave に注意して Jensen の不等式を用いると.

$$\leq K \int_0^t G\left(E\left(\left[\log^+ \frac{1}{|x_s - x'_s|}\right]^{-1}\right)\right) ds.$$

$\int_{0+} \frac{d\xi}{G(\xi)} = \infty$ であるので $E\left(\left[\log^+ \frac{1}{|x_t - x'_t|}\right]^{-1}\right) = 0$

$\therefore \quad x_t \equiv x'_t$ Q.E.D.

Remark 4.

条件 (8) がほゞ best possible であることが Remark 2 と類似の方法で示される.

一般に drift term のついた場合の結果については ([6]) を参照していたゞきたい.

References

[1] Skorohod, A. V., Studies in the theory of random processes, Addison-Wisley 1965 (Originally published in Kiev. 1961).

[2] 田中洋. 長谷川実. 確率微分方程式. Seminar on Probability vol. 19. 1964.

[3] Girsanov, I. V., An example of non-uniqueness of the solution of the stochastic equation of K. Ito. Theory of Prob. and its Appl. 7. 1962 325-331 (Eng. trans.)

[4] McKean, H. P. Jr., Stochastic Integrals. Acad. Press 1969.

[5] Yamada, T and S. Watanabe, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. Jour. of Math. of Kyoto Univ. vol 11. No. 1. 1971. 155-167.

[6] Watanabe, S and T. Yamada, On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II. (to appear. Jour. of Math. of Kyoto Univ.)