数理解析研究所講究録
第138巻 1972年 86-98

境界条件を持つ確率微分方程式の解の一意性について

京大理　志賀徳造
神大理　中尾慎太郎

§0. Introduction

最近 Markov process の境界問題の定式化として二つの方法が示された。D.W. Stroock and S.R.S. Varadhan [8] による submartingale problem による定式化と、S. Watanabe [9], [10] による境界条件を持つ確率微分方程式による定式化である。[8] では Lipschitz 連続な oblique derivative を境界条件に持つ non-degenerate な連続係数の diffusion process を取り扱っている。[9], [10] では係数がすべて Lipschitz 連続な場合を取り扱っている。N.E. Karoui [3] は submartingale problem と境界条件を持つ確率微分方程式の同値性を議論している。

ここでは境界条件が uniformly elliptic な2階微分作用素で、infinitesimal generator も uniformly elliptic である場合に境界条件を持つ確率微分方程式について一意性が成り立つことを述べる。

§1、解の存在について

$n \geqq 2$, $\overline{D}=\{x \in R^n ; x^1 \geqq 0\}$, $D=\{x \in R^n ; x^1>0\}$, $\partial D=\{x \in R^n ; x^1=0\}$, $x \in R^n$ に対して、$\tilde{x}=(0, x^2, \cdots, x^n)$ とする。

non-sticky case $(\rho \equiv 0)$ の境界条件を持つ確率微分方程式とは

$$
(1.1) \quad \begin{cases} dx_t^1 = \sigma^1(t, x_t)dB_t + b^1(t, x_t)dt + d\varphi_t \\ dx_t^i = \sigma^i(t, x_t)dB_t + b^i(t, x_t)dt + \tau^i(t, \tilde{x}_t)dM_t \\ \qquad + \beta^i(t, \tilde{x}_t)d\varphi_t \qquad\qquad i = 2, \cdots, n \end{cases}
$$

である。

sticky case $(\rho \not\equiv 0)$ の境界条件を持つ確率微分方程式とは

$$
(1.2) \quad \begin{cases} dx_t^1 = \sigma^1(t, x_t)I_D(x_t)dB_t + b^1(t, x_t)I_D(x_t)dt + d\varphi_t \\ dx_t^i = \sigma^i(t, x_t)I_D(x_t)dB_t + b^i(t, x_t)I_D(x_t)dt \\ \qquad + \tau^i(t, \tilde{x}_t)dM_t + \beta^i(t, \tilde{x}_t)d\varphi_t \qquad i = 2, \cdots, n \\ I_{\partial D}(x_t)dt = \rho(t, \tilde{x}_t)d\varphi_t \end{cases}
$$

である。

記号は [6] と同じで、解の定義については [6], [9], [10] を参照のこと。解の存在について [6] に次の結果がある。

<u>Theorem 1.1.</u> $\sigma(t, x)$, $b(t, x)$, $\tau(t, x)$, $\beta(t, x)$ が有界連続ならば、(1.1) の解が存在する。

Theorem 1.2.

(i) $\sigma(x)$, $b(x)$, $\tau(x)$, $\beta(x)$ が有界連続、$\rho(x)$ が有界ボレル可測とする。もし $|\sigma^1(x)| = \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^1(x)^2\right)^{1/2} > 0$ for all $x \in \bar{D}$ ならば、(1.2) の解が存在する。

(ii) $\sigma(t,x)$, $b(t,x)$, $\tau(t,x)$, $\beta(t,x)$, $\rho(t,x)$ が有界連続とする。もし $|\sigma^1(t,x)| = \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^1(t,x)^2\right)^{1/2} > 0$ for all $(t,x) \in [0,\infty) \times \bar{D}$ ならば、(1.2) の解が存在する。

明らかに drift の変換により、$\sigma(x)$ が uniformly elliptic ならば $b(x)$ は有界ボレル可測に、$\tau(x)$ が uniformly elliptic ならば $\beta(x)$ は有界ボレル可測に出来る。

§2. 解の一意性について

解の一意性の定義は [9], [10] を参照のこと。即ち、分布の意味での一意性である。

Condition (C-I)

$\sigma(t,x)$ と $\tau(t,x)$ は有界連続で、uniformly elliptic である。

即ち

(i) $M_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} [\sigma\sigma^*]_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq M_2|\xi|^2$ for $\xi \in R^n$

(ii) $M_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=2}^{n} [\tau\tau^*]_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leq M_2|\xi|^2$ for $\xi \in R^{n-1}$

をみたす正定数 M_1, M_2 が存在する。

Theorem A. もし σ と τ が time independent で (C-I) をみたし、b と β が time independent で有界ボレル可測ならば、(1.1) の解について一意性が成り立つ。

Theorem B. もし σ と τ が time independent で (C-I) をみたし、b, β, ρ が time independent で有界ボレル可測ならば、(1.2) の解について一意性が成り立つ。

証明の概略について述べる。$M_2 > 1$, $1 > M_1 > 0$ に対して $\mathfrak{M}[M_1, M_2]$ を (n, n)-matrix $(\sigma^i_j)_{i,j=1}^n$ で次の条件をみたすもの全体とする。

(i) $\sigma^1_1 = 1$, $\sigma^1_j = 0$ $(j \neq 1)$

(ii) $M_1|\xi|^2 \leq \langle [\sigma\sigma^*]\xi, \xi \rangle \leq M_2|\xi|^2$ for $\xi \in R^n$

$\tilde{\mathfrak{M}}[M_1, M_2]$ を $(n-1, n-1)$-matrix $(\tau^i_j)_{i,j=2}^n$ で次の条件をみたすもの全体とする。

(ii′) $M_1|\xi|^2 \leq \langle [\tau\tau^*]\xi, \xi \rangle \leq M_2|\xi|^2$ for $\xi \in R^{n-1}$

今後 $p > n+2$ とする。$\sigma \in \mathfrak{M}[M_1, M_2]$, $\tau \in \tilde{\mathfrak{M}}[M_1, M_2]$ に対して、$H^{[\sigma]}$ を $D_t + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n [\sigma\sigma^*]_{ij} D_{ij}$ に対応する space time harmonic extension operator、$V_\lambda^{[\sigma,\tau]}$ を $D_t +$

$\frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n}[\tau\tau^*]_{ij}D_{ij}+D_1H^{[\sigma]}$ に対応する resolvent operator とする。特に、σ と τ が単位行列の時 $H^{(0)}$, $V_\lambda^{(0)}$ と表わすことにする。$\|\ \|_p$ を $[0,\infty)\times\overline{D}$ 上の L^p-norm、$\|\ \|_{\sim p}$ を $[0,\infty)\times\partial D$ 上の L^p-norm とする。

Theorem 2.1. $\{V_\lambda^{[\sigma,\tau]}\}$ は $L^p([0,\infty)\times\partial D)$ 上の resolvent operator で

(2.1) $$\|D_t V_\lambda^{[\sigma,\tau]}f\|_{\sim p}\leqq C_1\|f\|_{\sim p}$$

(2.2) $$\sum_{i,j=2}^{n}\|D_{ij}V_\lambda^{[\sigma,\tau]}f\|_{\sim p}\leqq C_1\|f\|_{\sim p}$$

(2.3) $$\sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\partial D}|V_\lambda^{[\sigma,\tau]}f(t,x)|\leqq C_1\|f\|_{\sim p}$$

for $\lambda\geqq 1$, $\sigma\in\mathfrak{M}[M_1,M_2]$, $\tau\in\widetilde{\mathfrak{M}}[M_1,M_2]$

(2.4) $$\sum_{i,j=1}^{n}\|D_{ij}H^{(0)}V_\lambda^{(0)}f\|_p\leqq C_1\|f\|_{\sim p}\quad \text{for } \lambda\geqq 1$$

をみたす定数 $C_1>0$ が存在する。

$\sigma\in\mathfrak{M}[M_1,M_2]$, $0<T<\infty$ とする。$f\in C_0^\infty([0,T)\times\overline{D})$ に対して

$$\begin{cases}-\left(D_t+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}[\sigma\sigma^*]_{ij}D_{ij}\right)u=f\\ u|_{\partial D}=0\end{cases}$$

をみたす解が一意的に $C_0^\infty([0,T)\times\overline{D})$ 上に存在して、それを $G_0^{[\sigma]}f$ とする。特に σ が単位行列の時、$G_0^{(0)}f$ とする。

Theorem 2.2. $0<T<\infty$ に対して

$$(2.5)\qquad \sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\partial D} |G_0^{[\sigma]} f(t,x)| \leqq C_2(T)\|f\|_{p,T}$$

$$(2.6)\qquad \sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\partial D} |D_1 G_0^{[\sigma]} f(t,x)| \leqq C_2(T)\|f\|_{p,T}$$

$$(2.7)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} \| D_{ij}\ G_0^{(\sigma)} f\|_{p,T} \leqq C_2(T)\|f\|_{p,T}$$

$$\text{for } \lambda \geqq 1,\ \sigma \in \mathfrak{M}[M_1, M_2]$$

をみたす定数 $C_2(T)>0$ が存在する。但し、$\|\ \ \|_{p,T}$ は $[0,T]\times\overline{D}$ 上の L^p-norm である。

$$p(t,y) = I_{\{t\geqq 0\}} \frac{1}{(2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|y|^2}{2t}}$$

$[0,\infty)\times\overline{D}$ 上の関数 f に対して、f^* を

$$f^*(t,-x^1,x^2,\cdots,x^n) = -f(t,x^1,\cdots,x^n) \qquad x^1\geqq 0$$

なる $[0,\infty)\times R^n$ 上への拡張とする。

$$G_0 f(t,x) = \int_{-\infty}^{\infty} ds \int_{R^n} dy\ p(s-t,x-y) f^*(s,y)$$

$$\varepsilon_{ij}(t,x) = [\sigma\sigma^*]_{ij}(t,x) - \delta_{ij}\ ,\ \tilde{\varepsilon}_{ij}(t,x) = [\tau\tau^*]_{ij}(t,x) - \delta_{ij}$$

$$A = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} [\sigma\sigma^*]_{ij}(t,x) D_{ij}$$

$$T_\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(t,x) D_{ij} G_0$$

$$D_\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_{ij}(t,x) D_{ij}$$

$$H_A = H^{(0)} + G_0 (I - T_\varepsilon)^{-1} D_\varepsilon H^{(0)}$$

$$L = D_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^{n} [\tau \tau^*]_{ij}(t,x) D_{ij} + D_1 H_A$$

$$L^{(0)} = D_t + \frac{1}{2} \sum_{i,j=2}^{n} \delta_{ij} D_{ij} + D_1 H^{(0)}$$

とした時、次の定理が成り立つ。

<u>*Theorem 2.3.*</u> $\sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times \bar{D}} \sum_{i,j=1}^{n} |\varepsilon_{ij}(t,x)| < \varepsilon_1$ で $\sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\partial D} \sum_{i,j=2}^{n} |\tilde{\varepsilon}_{ij}(t,x)| < \varepsilon_1$ ならば

$$V_\lambda^{[\sigma(t,x),\tau(t,x)]} = (\lambda - L^{(0)})^{-1} \left[I + (L^{(0)} - L)(\lambda - L^{(0)})^{-1} \right]^{-1}$$

が $L^p([0,\infty)\times\partial D)$ 上の *resolvent operator* として定義可能である定数 $\varepsilon_1 > 0$ が存在する。更にこの時

(2.8) $$\sup_{(t,x)\in[0,\infty)\times\partial D} \left| V_\lambda^{[\sigma(t,x),\tau(t,x)]} f(t,x) \right| \leq C_3 \| f \|_{\sim p} \quad \text{for } \lambda \geq 1$$

をみたす定数 $C_3 > 0$ が存在する。但し、ε_1, C_3 は M_1, M_2 にしか depend しない。

Condition (C-II)

i) $\sigma(t,x)$, $\tau(t,x)$ は (C-I) をみたす.

ii) $\varepsilon < \varepsilon_1$, $\varepsilon C_1 < 1$, $\varepsilon C_2(T_0) < 1$ である $\varepsilon > 0$, $T_0 > 0$ が存在して $\sigma^1_1(t,x) \equiv 1$, $\sigma^1_i(t,x) \equiv 0$ $(i \neq 1)$,

$\sigma^i_j(t,x) = \delta_{ij}$ for $t \geqq T_0$, $\tau^i_j(t,x) = \delta_{ij}$ for $t \geqq T_0$,

$\sum_{i,j=1}^{n} |[\sigma\sigma^*]_{ij}(t,x) - \delta_{ij}| < \varepsilon$, $\sum_{i,j=2}^{n} |[\tau\tau^*]_{ij}(t,x) - \delta_{ij}| < \varepsilon$

(iii) $b(t,x) = \beta(t,x) = 0$ and $\rho(t,x) \equiv 1$.

(C-II)をみたす$(\sigma, b, \tau, \beta, \rho)$について証明が出来れば、Brownian motion の変換、drift の変換、time change 等により、Theorem A. と Theorem B. の証明は終わる。従って今後は$(\sigma, b, \tau, \beta, \rho)$は(C-II)をみたし、この場合の Theorem B. の証明を行う。

$$\mu_\lambda[h] = E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda\varphi_t} h(t, \tilde{x}_t)\, d\varphi_t\right]$$

$$\nu_{\lambda,T}[u] = E\left[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_t} I_{(0,\infty)}(x^1_t)\, u(t,x_t)\, dt\right]$$

とする。

<u>*Theorem 2.4.*</u> 係数が(C-II)をみたせば

(2.9) $|\mu_\lambda[h]| \leqq C_4 \|h\|_{\sim p}$ for $\lambda \geqq 1$, $h \in L^p([0,\infty)\times\partial D)$

をみたす定数 $C_4 > 0$ が存在する。

(Proof) 証明中 $\lambda \geqq 1$ とする。$m \in \mathbb{N}$ について

$$\pi_m(s) = \begin{cases} \dfrac{k}{m} & \text{for } \dfrac{k}{m} \leqq s < \dfrac{k+1}{m} \quad k = 0, 1, \cdots, m^2-1 \\ m & \text{for } s \geqq m^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_t^{(m),1} = x_t^1 \\ x_t^{(m),i} = x_0^i + \int_0^t I_{(0,\infty)}(x_s^1)\, \sigma^i(\pi_m(s), x_{\pi_m(s)})\, dB_s \\ \qquad\qquad + \int_0^t \tau^i(\pi_m(s), \tilde{x}_{\pi_m(s)})\, dM_s \end{cases}$$

とする。明らかに

$$\int_0^t I_{\{0\}}(x_s^{(m),1})\, ds = \varphi_t$$

をみたす。任意の $\varepsilon > 0$, $t > 0$ に対して

(2.10) $$\lim_{m\to\infty} P\left\{ \max_{0\leqq s\leqq t} |x_s^{(m)} - x_s| > \varepsilon \right\} = 0$$

である。$m \in \mathbb{N}$, $T > 0$ に対して

$$\mu_\lambda^{(m)}[h] = E\left[\int_0^\infty e^{-\lambda\varphi_t} h(t, \tilde{x}_t^{(m)})\, d\varphi_t\right]$$

$$\nu_{\lambda,T}^{(m)}[u] = E\left[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_t} I_{(0,\infty)}(x_t^1)\, u(t, x_t^{(m)})\, dt\right]$$

とおく。Theorem 2.1, Theorem 2.2 と regular conditional probability を考えることにより

$$|\mu_\lambda^{(m)}[h]| \leqq C_m \|h\|_{\sim p}$$

$$|\nu_{\lambda,T}^{(m)}[u]| \leqq B_{m,T} \|u\|_{p,T}$$

をみたす m だけに depend する正定数 C_m と、m と T だけに depend する正定数 $B_{m,T}$ が存在する。$\|\mu_\lambda^{(m)}\|_T$ ($\|\nu_{\lambda,T}^{(m)}\|$) を $L^p([0,T)\times\partial D)$ ($L^p([0,T)\times\bar{D})$) 上の functional norm とする。$H^{(0)} V_\lambda^{(0)} h$ ($h \in C_0^\infty([0,T)\times\partial D)$) について Itô's formulaを適用することにより

$$H^{(0)}V_{\lambda}^{-(0)}h(0,x_0)$$

$$= -\frac{1}{2}E\Big[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_s}\sum_{i,j=2}^{n}\tilde{\varepsilon}_{ij}(\pi_m(s),\tilde{x}_{\pi_m(s)})D_{ij}V_{\lambda}^{(0)}h(s,\tilde{x}_s^{(m)})d\varphi_s\Big]$$

$$+E\Big[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_s}h(s,\tilde{x}_s^{(m)})d\varphi_s\Big]$$

$$-\frac{1}{2}E\Big[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_s}I_{(0,\infty)}(x_s^1)\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(\pi_m(s),x_{\pi_m(s)})D_{ij}H^{(0)}V_{\lambda}^{-(0)}h(s,x_s^{(m)})ds\Big]$$

を得る。Theorem 2.1 により次の不等式

(2.11) $\|M_{\lambda}^{(m)}\|_T \leqq \frac{\varepsilon}{2}C_1\|M_{\lambda}^{(m)}\|_T + \frac{\varepsilon}{2}C_1\|V_{\lambda,T}^{(m)}\| + C_1$

を得る。$G_0^{(0)}f$ $(f\in C_0^{\infty}([0,T)\times\bar{D}))$ について Ito's formula を適用することにより

$$G_0^{(0)}f(0,x_0)$$

$$= E\Big[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_s}I_{(0,\infty)}(x_s^1)f(s,x_s^{(m)})ds\Big]$$

$$-\frac{1}{2}E\Big[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_s}I_{(0,\infty)}(x_s^1)\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_{ij}(\pi_m(s),x_{\pi_m(s)})D_{ij}G_0^{(0)}f(s,x_s^{(m)})ds\Big]$$

$$-E\Big[\int_0^T e^{-\lambda\varphi_s}D_1G_0^{(0)}f(s,\tilde{x}_s^{(m)})d\varphi_s\Big]$$

を得る。Theorem 2.2 により

(2.12) $\|V_{\lambda,T}^{(m)}\| \leqq \frac{\varepsilon}{2}C_2(T)\|V_{\lambda,T}^{(m)}\| + 2C_2(T)$

を得る。(C−II)，(2.11)，(2.12) より

$$\|V_{\lambda,T_0}^{(m)}\| \leqq 4C_2(T_0)$$

$$(2.13) \qquad \| M_\lambda^{(m)} \|_{T_0} \leqq 6 C_1$$

である。又 (C-II) より

$$\left| E \left[\int_{T_0}^{\infty} e^{-\lambda \varphi_s} f(s, \tilde{x}_s^{(m)}) d\varphi_s \right] \right| \leqq C_5 \| f \|_{\sim p}$$

をみたす定数 $C_5 > 0$ が存在するので、(2.13) とあわせることにより

$$\| M_\lambda^{(m)} \| \leqq 6 C_1 + C_5$$

である。これと (2.10) により (2.9) を得る。

Q.E.D.

<u>Theorem 2.5.</u> 係数が (C-II) をみたせば

$$M_\lambda [f] = V_\lambda^{[\sigma(t,x), \tau(t,x)]} f \qquad \text{for } \lambda \geqq 1$$

である。

(Proof) Theorem 2.3 と Theorem 2.4 より明らかである。

Theorem 2.5 により、係数が (C-II) をみたせば境界上の process の分布の意味の一意性がいえるので、全体の process の一意性が従う。

<u>Remark.</u> この unique solution は $\bar{D}$ 上の diffusion で

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} [\sigma\sigma^*]_{ij}(x) D_{ij} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x) D_i$$

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=2}^{n}[\tau\tau^*]_{ij}(x)D_{ij} + \sum_{i=2}^{n}\beta^i(x)D_i + D_1$$

とすると、粗く言えば、この diffusion の infinitesimal generator は、$Lf = \rho \cdot Af$ on ∂D で特徴づけられる domain を持つ微分作用素Aである。

References

[1] K. Ito, Canonical measurable random functions, Proc. International Conference on Functional Analysis and Related Topics, Univ. Tokyo Press (1970), 369-377.

[2] K. Ito and H. P. McKean, Jr., Diffusion processes and their sample paths, Springer-verlag (1965).

[3] N. E. Karoui, Diffusions avec condition frontière associées à un opérateur elliptique dégénré, C. R. Acad Sc. t. 273 (1971), 311-314.

[4] H. Kunita and S. Watanabe, On square integrable martingales, Nagoya Math. J. Vol. 30 (1967), 209-245.

[5] O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonikov and N. N. Ural'ceva, Linear and quasi-linear equations with parabolic type, A. M. S. Transl. of Math. Monograph No. 23 (1968).

[6] S. Nakao, On the existence of solutions of stochastic

differential equations with boundary conditions, (to appear).

[7] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, Diffusion processes with continuous coefficients I. II, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 22 (1969), 345-400 & 479-530.

[8] D. W. Stroock and S. R. S. Varadhan, Diffusion processes with boundary conditions, Comm. Pure Appl. Math. Vol. 24 (1971), 147-225.

[9] S. Watanabe, On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions, J. Math. of Kyoto Univ. Vol. 11 (1971). 169-180.

[10] S. Watanabe, On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions II, (to appear).