数理解析研究所講究録
第139巻 1972年 90-95

Navier-Stokesの方程式の数値解について

鉄道技研 川口 光年

§1.

流体の運動は，流れが層流である限り，Navier-Stokesの方程式で記述できると信じられてきた．しかしこの方程式は，流れの函数を未知数とした場合，四階の非線型微分方程式であって，極めて小数の簡単な場合を除いては厳密解が得られていない。レイノルズ数$R(=UL/\nu$；L，Uは代表的な長さ，速度，νは流体の動粘性率)が小さい時には，粘性項に対して慣性項を無視したり，簡単な形に置き換えるStokes近似やOseen近似が成立し，解析解が得られる．またレイノルズ数が大きい時にはいわゆる境界層近似を利用できる．しかし中間のレイノルズ数領域ではNavier-Stokes方程式を解析的に解く手段が開発されておらず，数値的に微分方程式を解くのが現在では唯一の解法といって過言ではない。

Navier-Stokesの方程式を数値的に解く試みは，円柱を過ぎる定常流($R=10$)について，Thom(1928)によってなされ，

1933年にはR=20の場合の数値解がだされ，実験との比較から，Navier-Stokesの方程式がこの領域でも正しい方程式であることが確認された．その後この領域はカルマン渦列が生じるレイノルズ数40まで川口(1953)によって拡張された．これらの計算は始めから定常として方程式を差分化して逐次近似は手廻し計算器によってなされた．

1958年にPayneは同じ問題を，速度を渦度分布から積分(領域が格子点に分けられているので，実は和)によって求め，その値を使って次々に△t後の渦度を求めてゆく方法で，R=40，100の場合を解くことを試みた．使用した電子計算機の能力の関係もあり，定常流になったと思われる程十分大きな時間までは計算は続けられなかった．この頃から電子計算機の急速な発達とあいまって，これを利用してNavier-Stokesの方程式の数値解を求めようとする試みが段々多くなされる様になった．川口(1961)は小型電子計算機を用いて箱の中の定常流の数値解を求めるのに成功し，Fromm-Harlow(1963)は二つの壁の間の物体を過ぎる流れについて非定常のNavier-Stokes方程式を数値的に解き，カルマン渦列を生ぜしめた．一方，円柱を過ぎる粘性流についてはKeller－高見(1966)が始めから定常流として，川口－Jain(1966)が非定常流の極限として，精度の高い数値解をだしている．また

Greenspan (1968) は，レイノルズ数が大きくなった時にも発散しにくい定常の Navier-Stokes の方程式の数値解法を発表した．その他毎年数多くの数値解が発表されている．

§2.

定常な粘性流体の流れの数値解を求めるのに，始めから定常の方程式を解いてゆく方法と，非定常の方程式を解いてその極限として定常流を求める方法とがある．この両者の得失を論ぜよというのが編集者から与えられた課題である．思いつくまゝに列記してみると次の様である．

a. 定常法では当然のこととして，流れの安定性やカルマン渦列の様な周期解を取り扱えない．

b. 非定常法では静止の状態からの変化が意味を持つが，定常法では数値計算の過程は意味を持たない．Δt が大きいと，$\partial/\partial t$ に対して中心階差がとれない影響を考える必要があるが，極限の定常流では関係がない．

c. 非定常法では時間だけ次元が増えるので面倒であり，計算時間もかゝる．

d. 物体を過ぎる流れの場合，無限遠における流れの漸近形が，定常流では今井 (1951) によって与えられているが，非定常流では現在のところ与えられていない．しかしこの点は

非定常流の数値計算を困難に導かなり。流れが始まってからある時刻までは物体の存在の影響は有限領域に限られるであろうし，非常に大きな時間後の流れを取り扱う場合には流れは定常流に近づくはずだから，無限遠の流れとして時々刻々の定常解の漸近形をとればよいと思う。

e. レイノルズ数が小さい時には，定常法では収束も速く容易であるが，非定常法では Δt を非常に小さくする必要があり困難になってくる。

f. レイノルズ数が大きい場合，定常法で普通のやり方で解くと少しレイノルズ数が大きくなってくると under-relaxation 係数をかなり小さくしないと発散がおこる。(円柱の場合に無理をして $R=50$ ぐらいまで)。非定常法では収束のことを気にしないで高レイノルズ数の流れを取り扱える。この違いは逐次近似を行なう時の補正項に R がかかった項(定常法)が入るか，R で割った項(非定常法)が入るかによるものと思われる。しかし非定常法であっても，後流のある流れでは時刻 t を非常に大きくしないと定常流にならないし，計算領域も大きくしなければならない。また壁の近くでは境界層流の様になっているので網目も細かくしなければならない。精度の高い高レイノルズ数の流れの数値解を求めるには，極めて容量の大きい計算機が必要であり，時間もたっぷりかかるので，実際

術には極めて困難である。

g. Greenspanは定常法の高レイノルズ数領域の発散の困難を救う為に，一次微分を階差に置きかえる際中心階差をとらないで，場所毎に適当に前方階差または後方階差をとる方法を導入し，箱の中の流れ等で100,000程度のレイノルズ数領域まで一応計算している。しかしこの様な高いレイノルズ数領域では境界層が生じているはずであるので，壁面の近くでは網目をうんと細かくしなければならない。

h. Fromm-Harlowは無限領域を取り扱う代りに，二つの壁の間の流れを取り扱い，帯部の後方端と前方端との流れの状態を等しくした条件で，物体の廻りの流れを非定常法で解いている。これは壁の間の周期的な流れとして，数学的には明瞭な境界条件のとらえ方ではあるが，無限領域の中に置かれた物体の廻りの流れとは明らかに異なるものと思われる。

参考文献

Fromm, J. E. & F. H. Harlow: Phys. of Fluids. 7 (1963) 975.

Greenspan, D.: in "Lectures on the Numerical Solution of Linear, Singular and Nonlinear Differential Equations" (Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey), 1968, Chap. 10.

Imai, I.: Proc. Roy. Soc. A 208 (1951) 487.

Kawaguti, M.: J. Phys. Soc. of Japan, 8 (1953) 747.

Kawaguti, M.: J. Phys. Soc. of Japan, 16 (1961) 2307.

Kawaguti, M. & P. Jain: J. Phys. Soc. of Japan, 21 (1966) 2055.

Keller, H. B. & H. Takami; in "Numerical Solutions of Non-linear Differential Equations" (Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey) 1966.

Payne, R. B.: J. of Fluid Mech. 4 (1958) 81.

Thom, A.: Aero. Res. Counc., R&M no 1194 (1928).

Thom, A.: Proc. Roy. Soc. A 141 (1933) 651.