数理解析研究所講究録
第140巻 1972年 1-9

多値論理とそのモデル

京大 数研 小野寛晰

最初に、昨年度の研究集会をふりかえって，いま一度数理論理学の対象としての“論理”とは何かということをはっきりさせたいと思う。工学の立場からの話題を眺めてみると、ある有限集合(例えば，3値)を一つ固定しそこでの論理演算を定める。そして，その立場にとって重要な研究目標は、その論理演算についての研究である。

他方、数理論理学においては、論理式の集合が“推論に関して閉じている”時にその集合のことを論理とよぶことが多い。そこでは個々の論理(例えば古典論理，直観主義論理)についての研究の他に，論理全体についての理論を作っていくことが一つの大きな目標になっている。ところで集合としての論理はそのままではあつかいにくいので，論理の問題を他の問題に帰着することを考える。その際，もっとも有用な方法は，与えられた論理に対しその論理で“推論され得る”論理式の集まりが丁度“正しい”論理式と解釈されるようなモデルを考えることである。そうすると論理の問題がモデル

の代数的構造に関する問題に帰着できることが多い。このように，題名にもある通り“論理”と“そのモデル”とは明らかに異ったものを指しているのである。

以下では，できるだけ細井[1]に沿った線で，中間論理の研究におけるモデルの方法，特に最近興味が持たれている半順序集合によるモデルについて紹介する。

なお予稿に述べた結果の一部に誤りがあることがわかったので，かなり修正を加えた。

§1 論理

ここでは命題論理に話を限っておく。論理記号としては $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\neg$ を用いる。

定義 1.1 論理式の集合が modus ponens 及び代入に関して閉じている時，<u>論理</u>とよぶ。

補題 1.2 論理の，集合としての共通部分（無限個でもよい）は又，論理となる。

いま $LK = \{$古典論理で証明可能な論理式$\}$,

$LJ = \{$直観主義論理で証明可能な論理式$\}$ とする。

そして

$\mathcal{J} = \{ L \mid L$ は論理で $LJ \subset L \subset LK \}$ とし，

$\mathcal{J}$ の元を中間論理とよぶ。

但し，直観主義論理とは，古典論理から排中律を除いたようなものである。

さて，Lを論理，$A_1, \cdots, A_n$を任意の論理式とした時 $L + A_1 + \cdots + A_n$ で，Lの元及び$A_1, \cdots, A_n$から modus ponens と代入により導かれる論理式全体の集合を表わすものとする。従って，この記法を用いると $\mathcal{J}$ の元Lが<u>有限公理化可能</u>であるとは、ある論理式 $A_1, \cdots, A_n$（実は $n=1$ で充分）が存在して $L = LJ + A_1 + \cdots + A_n$ となることである。

§. 2　束によるモデル

一般に，集合が与えられその上で論理式が“正しい”か否かを定める方法が決まっている時，その集合は（その方法により）一つのモデルを定めているという。特にそのモデルで正しい論理式の集合が与えられた論理 L と一致する時，そのモデルは <u>論理Lのモデル</u> になっているという。よく知られているように{true, false}という集合は通常の方法によって古典論理のモデルになっている。2値{true, false}の代りにかってなブール代数をとっても同じように古典論理のモデルになる。そこでこの方法を拡張して次のような 束によるモデル というものを考えてみる。

定義 2.1 束Pが次の性質(*)をみたす時，Pは<u>相対擬補束</u>であるといわれる。

(*) 任意の $x, y \in P$ に対し $\max\{z \mid x \cap z \leq y\}$ ($x \supset y$ と書く) が存在する。

容易にわかるように相対擬補束は分配束であり，又最大元 1 を持つ。更に最小元 0 を持つ時，<u>擬ブール束</u>という。$x \supset 0$ を x' と書くことにする。

擬ブール束Pが与えられた時，次のようにして"Pでvalidである"という概念を定義する。まず擬ブール束Pのassignment fとは，fが{命題変数}からPへの関数であることをいう。fを次のように拡張する。論理式Aに対するfの値$f(A)$は，Aの中の各命題変数pを$f(p)$で，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\neg$をそれぞれ$\cap$，$\cup$，$\supset$，$'$でおきかえて得られるPの元のこととする。論理式Aが擬ブール束Pの任意のassignment fに対し $f(A)=1$ となる時，AはPで<u>valid</u>であるという。Pでvalidとなるような論理式全体の集合を$L(P)$と書く。

定理 2.2 Pが擬ブール束ならば $L(P) \in \mathcal{J}$。逆に$\mathcal{J}$の任意の元Lに対し $L = L(P)$ となるような擬ブール束Pが存在する。特に $\overline{P} \leqq \aleph_0$ とすることができる。

定理 2.3 ある論理 L（例えば LJ）が存在して，$\overline{\overline{P}} < \aleph_0$ となるどんな擬ブール束 P をとってきても $L = L(P)$ となならない。

しかしながら，多くの J の元 L について次の性質がなりたつことが知られている。

ある擬ブール束の集合 $\{P_n \mid n < \omega\}$ が存在して

i) 任意の n に対し $\overline{\overline{P_n}} < \aleph_0$。

ii) $L = \bigcap_{n<\omega} L(P_n)$。

このような L は finite model property（f. m. p. と略す）を持つといわれる。L が f. m. p. を持つということは大ざっぱにいえば，$A \notin L$ ならばある有限擬ブール束で A の"反例"が見つかるということである。ところで論理式が与えられた有限擬ブール束で valid になるか否かは有限的に決定できる。従って

定理 2.4 L が有限公理化可能かつ L が f. m. p. を持つならば L は決定可能である。

§3. 半順序集合によるモデル（Kripke モデル）

束によるモデルは，いわば古典論理のブール代数によるモデルの一般化であったが，それに対し直観主義論理のモデルとして定義された Kripke による半順序集合のモデルを J

の元に対するモデルと考えてみよう。

直観主義論理のモデルとしては，普通は2節で述べたような擬ブール束のモデルが用いられる。ところがこのようなモデルにはあきたらず，もっと直観主義の立場から見て妥当なモデルを作ろうという試みが多くの人々によって研究されてきた。その一つが次にのべる，Kripkeによる半順序集合によるモデルである。

Mを，$\leqq$で順序づけられた半順序集合とする。（半順序集合を$\mathcal{J}$の元のモデルとしてみる時には，<u>Kripkeモデル</u>とよぶことにする。）$\{$命題変数$\} \times M$から$\{t, f\}$への関数Wが次の条件をみたしている時，WはMのvaluationであるという。

任意の命題変数pとMの任意の二元a, bに対し

$W(p, a) = t$ かつ $a \leqq b$ ならば $W(p, b) = t$。

さてvaluation Wのdomainを次のようにして一般の論理式に拡張する。

$W(A \wedge B, a) = t \Leftrightarrow W(A, a) = t$ かつ $W(B, a) = t$

$W(A \vee B, a) = t \Leftrightarrow W(A, a) = t$ 又は $W(B, a) = t$

$W(A \rightarrow B, a) = t \Leftrightarrow a \leqq b$ となる任意のbに対し

$W(A, b) = f$ 又は $W(B, b) = t$

$W(\neg A, a) = t \Leftrightarrow a \leqq b$ となる任意のbに対し

$$\varpi(A, b) = f \text{。}$$

定義より，任意の論理式Aに対しても $\varpi(A, a) = t$ かつ $a \leqq b$ ならば $\varpi(A, b) = t$ なることがわかる。いま論理式Aに対しすべての$a \in M$で $\varpi(A, a) = t$ となる時、Aは Mの valuation ϖ に対して valid になるといい，更に Mの任意の valuation に対して valid になる時，単に Mで valid であるという。$L^*(M)$ を Kripke モデル Mで valid な論理式全体の集合とする。

Mの部分集合Nが閉じているとは，$a \in N$ かつ $a \leq b$ ならば $b \in N$ となることをいう。Mの閉部分集合全体をP_Mとすると，P_M は集合演算に関して擬ブール束をなすことがわかる。更に

定理 3.1　$L^*(M) = L(P_M)$。 従って $L^*(M) \in \mathcal{J}$。

逆に与えられた擬ブール束Pに対し，$L^*(M) = L(P)$ となるような Kripke モデルMを作ることができるであろうか。これを，少し弱めた次の問題が未解決である。

問　任意の中間論理Lに対し $L = L^*(M)$ となる Kripke モデルMが存在するか？

（予稿には，否定的に解決されたと書いたが，その後 証明

に誤りがあることがわかった。) $\mathcal{P}$ が有限の時には次のような Kripke モデル M_P をとればよい。集合としては $\mathcal{P}$ の prime filter ([3] 参照) 全体の集合，順序は集合としての $\subseteq$ をとる。このモデルを M_P とすると

$$L(\mathcal{P}) = L^*(M_{\mathcal{P}})$$

がなりたつ。

定理 3.2 $\mathcal{F}$ を f.m.p. を持つ中間論理の族，$\mathcal{K}$ を Kripke モデルを持つ中間論理の族とする。すると

1) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathcal{I}$ (最近，$\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{K}$ なることが証明されたらしい。)

2) $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{I}$ (Jankov [4])。

細井 [2] は線型な擬ブール束の性質に着目して，中間論理の分類を行った。ここでは単に $\mathcal{S}_f$ 及び $\mathcal{S}_\omega$ という二つの族を定義する。$\mathcal{S}_f$ を有限スライスとよぶことにする。

$$L_\omega \overset{def}{=} LJ + (p \to q) \vee (q \to p)。$$

定義 3.3 $\mathcal{S}_\omega = \{ L \mid L + (p \to q) \vee (q \to p) \doteq L_\omega \}$

$$\mathcal{S}_f = \mathcal{I} - \mathcal{S}_\omega = \{ L \mid L + (p \to q) \vee (q \to p) \subsetneq L_\omega \}$$

定義 3.4 M を Kripke モデルとする。M の元の ($\leq$ に関する) 上昇列の長さのうち最大のものがあればそれを

$h(M)$ と書き，最大のものがなければ $h(M)=\omega$ とする。

定理 3.5 $h(M)<\omega \iff L^*(M)\in \mathcal{S}_f$

$\mathfrak{A}$ を $\mathcal{G}$ の任意の部分集合とする時 $\mathfrak{A}^*=\mathfrak{A}\cap\mathcal{S}_f$ と書く。

定理 3.6 (Cf. 3.2) $\mathcal{F}^*=\mathcal{K}^*$。すなわち，$L\in\mathcal{S}_f$ ならば L が f.m.p. を持つということと L が Kripke モデルを持つということは同値である。

参考文献

[1] 細井勉，多値論理について，京大数研講究録 81 (1970) p.33〜45.

[2] T. Hosoi, On intermediate logics I, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. I 14 (1967).

[3] H. Rasiowa & R. Sikorski, The mathematics of metamathematics, Warsaw 1963.

[4] V. A. Jankov, Constructing a sequence of strongly independent superintuitionistic propositional calculi, Soviet Math. Dokl., 9 (1968)

[5] H. Ono, Kripke models and Intermediate logics, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 6 (1970).