数理解析研究所講究録
第140巻 1972年 61-88

B－3値論理関数とその応用

明治大学 工学部
向殿 政男

§0. あらまし

この報告は，B－3値論理代数，B－3値論理関数の理論的研究について述べたものである。B－3値論理代数の定義と諸性質に続いてB－3値論理関数の必要十分条件，および標準形について述べる。また，Fail-Safe論理，Fuzzy論理との関係についても言及する。応用例として，ハザードの検出と除去及び素項展開を求める手順などについて考察する。

KEYWORDS； 論理代数，B－3値論理，Fail-Safe論理，Fuzzy論理，ハザード，素項展開，

§1. まえがき

3値論理代数，3値論理関数の研究はかなり古くから行なわれている。理論的な研究の主な興味の焦点は，

各真理値に論理的意味を与えてそれに都合のよいような演算を決めて一つの代数系を構成した場合，その代数系はいかなる性質を有するか

という点と

関数的に完全である（functionally completeness）ーすなわち，定義された演算を用いてすべての3値論理関数が表現できるーためには，いかなる条件を満せば良いかという点に向けられているようである。

本論文で述べる3値論理代数は，2値論理代数を含むように拡張された代数系である。すなわち，2値論理代数で用いられる真理値0，1の他に真理値$\frac{1}{2}$を加えて3値とし，演算AND（・），OR（∨），NOT（～）に関する2値論理代数での定義

$$x\cdot y = \min(x, y)$$
$$x \vee y = \max(x, y)$$
$$\sim x = 1 - x$$

をそのまゝ形式的に3値まで拡張定義する。このような3値論理代数をB－3値論理代数（Binarithic－ternary logic）と呼ぶが，この論理体系は意味を持ったモデルを有している。従来の2値論理代数では，真理値1に"真"を，0に"偽"を対応させ，すべての命題を真か偽かいずれかであるとして論理を展開して行く。そこでは真でも偽でもない"はい色"的なものの存在を認めていない。このB－3値論理代数でも同じく，1に"真"，0に"偽"を対応させ，$\frac{1}{2}$には真か偽

か決定できないもの，不確定という意味づけをすることができる。その他，$\frac{1}{2}$に故障状態とか過渡状態とかの意味づけをすることも可能で，その他にも多くのモデルを有している。この論理体系は，最も古くから研究されている3値論理代数で，また，2値論理代数を最も自然に拡張した3値論理代数と思われる。しかし，B－3値論理代数は関数的な完全性の条件を満さない。B－3値論理代数で定義されている演算・，∨，～と各変数との結合で表現される3値論理関数をB－3値論理関数というが，3値論理関数の中でB－3値論理関数が占める割合は非常に少ない。本論文では，B－3値論理代数の定義につづいて，3値論理関数の定義域にある半順序関係を定義することにより，この半順序関係に関して単調性を満すことがB－3値論理関数であるための必要十分条件であることを述べる．次に，B－3値論理関数の標準形およびB－3値論理関数の拡張について考察し，最後にこれらのB－3値論理関数の理論を用いたいくつかの応用例について報告する。

なお，このB－3値論理代数は，2値論理を含むように拡張されているので，2値論理を高い立場から眺めることができて，2値論理をすっきりと見通し良く眺められるという利点を有する。

§2. B−3値論理代数

真理値0，$\frac{1}{2}$，1よりなる集合をV_3としたとき，B−3値論理代数を次のように定義する。

定義1；集合V_3に，2項演算・，∨，単項演算〜が定義されている代数系　　　$\langle V_3, \cdot, \vee, \sim \rangle$
をB−3値論理代数という。

ただし，

$$x \cdot y = \min(x, y) \text{ --------- } (1)$$

$$x \vee y = \max(x, y) \text{ --------- } (2)$$

$$\sim x = 1 - x \text{ ------------ } (3)$$

$$x, y \in V_3 \qquad //$$

真理値を0，1に限れば，上に定義した演算・，∨，〜は2値論理代数で定義されているAND，OR，NOTそのものであり，このとき，上の代数系は2値論理代数すなわちブール代数を満す。B−3値論理代数は，2値論理代数の形式的な3値への拡張となっているが，意味のあるモデルを有している。例えば，1を"真"に，0を"偽"に，$\frac{1}{2}$を"不確定"に対応させると，あいまいさを認めた論理を表現していることになる。

B−3値論理代数においても2値論理代数と同様に，上で定義した演算・，∨，〜をそれぞれAND，OR，NOTと呼ぶことにする。AND，OR，NOTの真理値表は表1〜

表3のようになる。

$y \backslash x$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{2}$	1

表1. $x \cdot y$

$y \backslash x$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
1	1	1	1

表2. $x \vee y$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$\sim x$	1	$\frac{1}{2}$	0

表3. $\sim x$

B－3値論理代数では，演算・，∨，～に関して次のような公式が成立する。

(I) 可換法則：$x \vee y = y \vee x$，　$x \cdot y = y \cdot x$

(II) 結合法則：$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$，　$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

(III) 吸収法則：$x \vee (y \cdot x) = (x \vee y) \cdot x = x$

(IV) 分配法則：$x \cdot (y \vee z) = (x \cdot y) \vee (x \cdot z)$

$x \vee (y \cdot z) = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$

(V) ド・モルガンの法則：$\sim(x \cdot y) = (\sim x) \vee (\sim y)$，　$\sim(x \vee y) = (\sim x) \cdot (\sim y)$

(VI) $\sim(\sim x) = x$

(VII) 最大元，最小元の存在：　$A \cdot 1 = A$，　$A \cdot 0 = 0$

$A \vee 1 = 1$，　$A \vee 0 = A$

なお，(I)，(II)，(III)より

(VIII) べき等法則：　$x \cdot x = x$，　$x \vee x = x$

が導かれる。

ここで，B－3値論理代数では2値論理代数で成立する

(Ⅶ) 相補法則：　$x \vee \sim x = 1$，　$x \cdot \sim x = 0$

は成立しないのが特徴的である。

(Ⅰ)〜(Ⅳ) は束の公理であり，(Ⅰ)〜(Ⅳ) は分配束の公理である。最大元，最小元を持つ分配束で，単項演算〜に関して (Ⅴ)，(Ⅵ) を満す代数系をド・モルガン束 または準ブール代数と呼ぶが[1]，B−3値論理代数はこの公理系を満している。なお，B−3値論理代数は，S. C. Kleene の体系と同じである。また，3値における NAND (|)，NOR (↓) を

$$x \mid y = \sim(x \cdot y)$$

$$x \downarrow y = \sim(x \vee y)$$

で定義すれば，演算は | のみまたは ↓ のみでもまったく同様な体系ができる。本論文では，・，∨，〜を中心に考察するが，本論文で述べることはすべて，| のみ，↓ のみと限っても同様に成立する。

次に，B−3値論理代数の式を次のように帰納的に定義する。

定義2；(1)　0と1は式である。

(2) $x_1, \cdots, x_n$ は式である。

(3) ψ_1，ψ_2 が式ならば，$\psi_1 \cdot \psi_2$，$\psi_1 \vee \psi_2$，$\sim \psi_1$ も式である。

(4) 上で与えられるもののみが式である。　‖

B−3値論理代数の式は，$x_1, \cdots, x_n$ を $V_3 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$ の

値をとる変数とするとき，各変数と演算・，∨，〜の結合で表わされるn変数の3値論理関数とみなすことができる。

§3. B−3値論理関数

写像 $F: V_3^n \to V_3$

はn変数の3値論理関数である（以後すべてn変数の関数についてのみ考察するのでいちいち断わらない）が，B−3値論理代数の式ではすべての3値論理関数を表現することはできない。B−3値論理代数の式が表現している3値論理関数をB−3値論理関数~~をB−3値論理関数~~というが，これは3値論理関数の定義域にある半順序関係を定義し，この半順序関係に関して単調であることが必要十分であることを前回報告[2]した。こちらの方をB−3値論理関数の定義として採用する。まず，集合V_3の各元の間に次のような半順序関係$\succ$を定義する。

定義3； $\frac{1}{2} \succ 0$, $\frac{1}{2} \succ 1$, $a \succ a$, $a \in V_3$ ∥

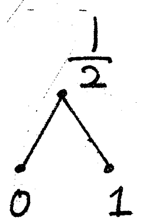

図1. 半順序関係$\succ$

これを3値論理関数の定義域V_3^nまで拡張定義する。

定義4； $(a=(a_1,\cdots,a_n)$, $b=(b_1,\cdots,b_n) \in V_3^n$

において，すべてのiについて　$a_i \succ b_i$　なるとき

$\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$　　　とする。‖

$\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ なるとき元 $\mathbf{a}$ は元 $\mathbf{b}$ を含む，または $\mathbf{b}$ は $\mathbf{a}$ に含まれるという。

<u>定義5</u>；3値論理関数Fが

(i) $\mathbf{a} \in \mathbb{V}_2^n$ ならば $F(\mathbf{a}) \in \mathbb{V}_2$，

(ii) $\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ ならば $F(\mathbf{a}) \succ F(\mathbf{b})$

なるとき，Fを<u>B−3値論理関数</u>という。‖

（上記の条件(i),(ii)を満す関数と，B−3値論理代数の式が表現する関数とが等しいことは前回の報告(2)または文献(3)参照）

3値論理関数Fに対して，1，$\frac{1}{2}$，0に写像される定義域 $\mathbb{V}_3^n$ の元の集合をそれぞれ

$$F^{-1}(1),\quad F^{-1}(\tfrac{1}{2}),\quad F^{-1}(0)$$

で表わし，1-set，$\frac{1}{2}$-set，0-setと呼ぶことにする。

<u>定理1</u>；FをB−3値論理関数とするとき

(i) $\mathbf{a} \in F^{-1}(1)$ ならば，$\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ なるすべての $\mathbf{b}$ について $\mathbf{b} \in F^{-1}(1)$，

(ii) $\mathbf{a} \in F^{-1}(0)$ ならば，$\mathbf{a} \succ \mathbf{b}$ なるすべての $\mathbf{b}$ について $\mathbf{b} \in F^{-1}(0)$，

(iii) $\mathbf{a} \in F^{-1}(\frac{1}{2})$ ならば，$\mathbf{b} \succ \mathbf{a}$ なるすべての $\mathbf{b}$ について $\mathbf{b} \in F^{-1}(\frac{1}{2})$．‖

証明）Fが定義5の(ii)を満すから明らか ∎

B−3値論理関数Fの1-set，$\frac{1}{2}$-set，0-setはそれぞれ半順序関係 $\succ$ に関して半順序集合をなしている。集合 $F^{-1}(1)$，$F^{-1}(0)$ における半順序関係 $\succ$ に関する，すべての極大元の集合

を $\partial F^{-1}(1)$, $\partial F^{-1}(0)$で，$F^{-1}(\frac{1}{2})$におけるすべての極小元の集合を$\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$で表わすとき，次の定理が成立する

<u>定理2</u>；B－3値論理関数Fは，集合$\partial F^{-1}(1)$, $\partial F^{-1}(0)$, $\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$により一意的に定まる。‖

証明）任意の元$\mathbb{a} \in V_3^n$について，$F(\mathbb{a}) \in V_3^n$より$\mathbb{a}$は$F^{-1}(1)$, $F^{-1}(0)$, $F^{-1}(\frac{1}{2})$の要素である。よって，関係$\succ$に関して

(1) $\mathbb{a}$を含むような元が$\partial F^{-1}(1)$に存在するか，

(2) $\mathbb{a}$を含むような元が$\partial F^{-1}(0)$に存在するか，

(3) $\mathbb{a}$に含まれるような元が$\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$に存在するか

のいずれかが必ず成立する。しかも，一つの場合しか成立しない。なぜならば，(1), (2)が同時に成立した，すなわち，

$$\mathbb{a}_1 \succ \mathbb{a}, \quad \mathbb{a}_0 \succ \mathbb{a}, \quad \mathbb{a}_1 \in \partial F^{-1}(1), \quad \mathbb{a}_0 \in \partial F^{-1}(0)$$

なる$\mathbb{a}_1$, $\mathbb{a}_0$が同時に存在したとすると，定義5の(ii)より

$\mathbb{a}_1 \succ \mathbb{a}$ ならば $F(\mathbb{a}_1) = 1 \succ F(\mathbb{a})$

$\mathbb{a}_0 \succ \mathbb{a}$ ならば $F(\mathbb{a}_0) = 0 \succ F(\mathbb{a})$

となり，$F(\mathbb{a}) = 1$と$F(\mathbb{a}) = 0$が同時に導かれて矛盾する。

(1)と(3), (2)と(3)が同時に成立するとしても同様に矛盾する。

以上により，関係$\succ$に関して(1)が成立すれば$F(\mathbb{a}) = 1$, (2)が成立すれば$F(\mathbb{a}) = 0$, (3)が成立すれば$F(\mathbb{a}) = \frac{1}{2}$となり，$F(\mathbb{a})$の値は，$\partial F^{-1}(1)$, $\partial F^{-1}(0)$, $\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$が与えられれば，一意的に定まる。∎

系1; B−3値論理関数Fは，集合 $\partial F(1)$，$\partial F(0)$，$\partial F(\frac{1}{2})$ のいずれか二つの集合が与えられれば，一意的に定まる。‖

証明）定理2の証明で，(1)，(2)，(3) のいずれか一つが必ず成立し，しかも必ず一つしか成立しないことから明らか。∎

§4. B−3値論理関数の標準形[3]

B−3値論理代数の式 ψ が与えられたとき，B−3値論理関数としてこれと等値な，一意的に定まるB−3値論理代数の式を求めよう。

B−3値論理代数では，分配法則（Ⅳ），べき等法則（Ⅷ）が成立するから，これを用いて加法形式（積和形式）*1に展開することができる。たゞし，相補法則（*）が成立しないから，ある変数について肯定，否定を同時に含む項（このような項を相補項という）が存在する。上のような加法形式をB−3値加法標準形といい，B−3値加法標準形のうち相補項を含まない部分を加法標準形（2値論理代数における加法標準形の定義と同じである），含む部分を相補加法標準形という。

---

*1: 変数，または変数の否定を文字といい，同じ文字を2度以上含まない文字の積（AND）を項という。同じ項を2度以上含まない項の和（OR）で表わされる形式を加法形式（積和形式）といい，これをここではB−3値加法標準形と呼ぶ。

（ここでは加法形式についてのみ述べるが，乗法形式（和積形式）についても同様に考察できる。）しかし，ψに対応するB－3値加法標準形は一意的に定まらない。

相補項においては

$$x_i\cdot\sim x_i\cdot\psi = x_i\cdot\sim x_i\cdot(x_j\vee\sim x_j)\cdot\psi$$
$$= x_i\cdot\sim x_i\cdot x_j\cdot\psi\vee x_i\cdot\sim x_i\cdot\sim x_j\cdot\psi$$

が成立するから，すべての相補項は各項にすべての変数が現われるような相補項の和（$\vee$）で表現することができる。これは丁度，2値論理代数で，任意の項が，各項にすべての変数が現われるような項（最小項）の和で表現されるのと同様で，B－3値論理代数では，項が相補項でない（このような項を単項と呼ぶ）場合は上のようなことは成立しないが，相補項については成立するわけである。すべての変数が現われるような相補項を相補最小項と呼ぶことにする。

次に，B－3値論理代数では，吸収法則（Ⅲ）が成立するから，α，βをそれぞれ項としたとき，αに現われる文字（変数または変数の否定）がすべてβにも現われるとき

$$\alpha\vee\beta=\alpha$$

が成立する。B－3値加法標準形におけるこのような省略を自明な省略と呼ぼう。

いま，与えられたB－3値論理代数の式ψをB－3値加法

標準形に展開し，すべての相補項については相補最小項の和に展開する。このようにして得られたB−3値加法標準形に自明な省略を行なって得られた式は，ψと等値で，しかも一意的に定まる。このようなB−3値加法標準形をB−3値全加法標準形という。

〔例〕 $\psi = x_1 \cdot (x_2 \vee \sim x_1) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1$

$= x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2$

$= x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot \sim x_1 \cdot \sim x_2$ ∥

上で述べた手順で求まる式がψと等値であることは明らかである。これが一意的に定まることは，次のようにして示される。

まず，単項，相補最小元の性質について調べる。

定義6； $a = (a_1, \cdots, a_n) \in V_3^n$ に対応する単項α_aとは

$x_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n}$ ただし，$a_i = 0$ のとき $x_i^{a_i} = \sim x_i$

$a_i = 1$ のとき $x_i^{a_i} = x_i$

$a_i = \frac{1}{2}$ のとき $x_i^{a_i} = 1$

なる式をいう。∥

定義7； $a = (a_1, \cdots, a_n) \in V_3^n - V_2^n$ に対応する相補最小項β_aとは

$x_1^{a_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{a_n}$ ただし，$a_i = 0$ のとき $x_i^{a_i} = \sim x_i$

$a_i = 1$ のとき $x_i^{a_i} = x_i$

$a_i = \frac{1}{2}$ のとき $x_i^{a_i} = x_i \cdot \sim x_i$

なる式をいう。‖

上の各元と単項，相補最小項との対応は一対一である。

<u>補題1</u>；$\mathbb{a}\in V_3^n$ に対する単項を $\alpha_{\mathbb{a}}$ とするとき，

(i) $\alpha_{\mathbb{a}}(\mathbb{b})=1 \Leftrightarrow \mathbb{a}\succ\mathbb{b} \Leftrightarrow \alpha_{\mathbb{a}}(\mathbb{b}^*)=\{1\}$,

(ii) $\alpha_{\mathbb{a}}(\mathbb{b})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \exists\mathbb{c}(\mathbb{a}\succ\mathbb{c},\ \mathbb{b}\succ\mathbb{c}),\ \mathbb{a}\not\succ\mathbb{b}$
$\Leftrightarrow \alpha_{\mathbb{a}}(\mathbb{b}^*)=\{0,1\}$,

(iii) $\alpha_{\mathbb{a}}(\mathbb{b})=0 \Leftrightarrow \sim\exists\mathbb{c}((\mathbb{a}\succ\mathbb{c},\ \mathbb{b}\succ\mathbb{c}) \Leftrightarrow \alpha_{\mathbb{a}}(\mathbb{b}^*)=\{0\}$. ‖

証明）略．（記号 $\mathbb{b}^*$ については§5参照）。

<u>補題2</u>；$\mathbb{a}\in V_3^n-V_2^n$ に対応する相補最小項を $\beta_{\mathbb{a}}$ とするとき，

(i) $\beta_{\mathbb{a}}(\mathbb{b})=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbb{b}\succ\mathbb{a}$,

(ii) $\beta_{\mathbb{a}}(\mathbb{b})=0 \Leftrightarrow \mathbb{b}\not\succ\mathbb{a}$. ‖

証明）略．

B−3値論理関数Fが与えられれば，$\partial F^{-1}(1)$，$\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$ は一意的に定まり，また，系1より，$\partial F^{-1}(1)$，$\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$ が与えられれば F は一意的に定まる。$\partial F^{-1}(1)$，$\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$ に対応する単項，相補最小項の和（∨）により，補題1，補題2から知れるように $F^{-1}(1)$，$F^{-1}(\frac{1}{2})$ はすべて表現できるから，これらの和（∨）でFは表現でき，これは一意的である。FのB−3値加法標準形で，加法標準形および相補加法標準形の部分に自明な省略を行なうことは，$\partial F^{-1}(1)$ および $\partial F^{-1}(\frac{1}{2})$ に対応する項を求めていることに相当する。一方，補題1より $F^{-1}(\frac{1}{2})$ のある部分は単

項によっても表現でき、いくつかの相補最小項は省略できる。単項α_{1a}があるために、相補最小項β_{1b}が省略できるのは、補題1より、ある$\mathbf{c}\in V_3^n$が存在して、

$$1a \succ \mathbf{c}, \quad 1b \succ \mathbf{c}$$

なるとき、およびそのときに限り、省略できる相補最小項は一意的に定まる。このとき、α_{1a}に現われる文字はすべてβ_{1b}に現われるから、B−3値加法標準形における自明な省略でこれらの相補最小項はすべて省略される。以上により、前述した手順で求めたB−3値主加法標準形は一意的に定まる。

定理3；B−3値論理関数Fに対応するB−3値主加法標準形は必ず存在してしかも一意的に定まる。‖

§5. P形論理関数とC形論理関数

B−3値論理関数FとGが、2値論理関数として見たとき等しい場合、次の定義を置く。

定義8[4]；B−3値論理関数F, Gが

$$\forall 1a \in V_2^n, \quad F(1a)=G(1a)$$

なるとき、FとGとは*V-equivalent*であるという。‖

FとV-equivalentなB−3値論理関数の集合を$V_{eq}(F)$とすると$V_{eq}(F)$には2値論理関数が対応し、逆にある2値論理関数にはある$V_{eq}(F)$が対応している。$V_{eq}(F)$からなる

集合は，演算・，∨，～に関してブール代数をなすことが示される。[4]

任意の元 $\mathbf{a} \in V_3^n$ に対して，$\frac{1}{2}$ を 0 または 1 で置き換えて得られる V_2^n の元の集合を $\mathbf{a}^*$ で表わす。即ち

$$\mathbf{a}^* = \{\mathbf{b} \mid \mathbf{a} \succ \mathbf{b} \in V_2^n\} \quad .$$

同様に，変数が $\mathbf{a}^*$ の値をとるときの関数 F の値のとる集合を

$$F(\mathbf{a}^*)$$

で表わすものとする。そのとき，次の定理が成立する。

<u>定理4</u>；F が B－3 値論理関数ならば，

(i) $F(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \Leftarrow F(\mathbf{a}^*) = \{0, 1\}$,

(ii) $F(\mathbf{a}) = 0 \Rightarrow F(\mathbf{a}^*) = \{0\}$,

(iii) $F(\mathbf{a}) = 1 \Rightarrow F(\mathbf{a}^*) = \{1\}$. ‖

証明）B－3 値論理関数の定義5よりただちに示される。∎

特に，F が加法標準形（相補項を含まない場合）ならば，次の定理が成立する。

<u>定理5</u>；F が加法標準形ならば，

(i) $F(\mathbf{a}) = \frac{1}{2} \Leftarrow F(\mathbf{a}^*) = \{0, 1\}$,

(ii) $F(\mathbf{a}) = 0 \Leftrightarrow F(\mathbf{a}^*) = \{0\}$,

(iii) $F(\mathbf{a}) = 1 \Rightarrow F(\mathbf{a}^*) = \{1\}$ ‖

証明）加法標準形は，いくつかの単項の和（∨）で表現されているから，補題1より $F(\mathbf{a}) = 0 \Leftarrow F(\mathbf{a}^*) = \{0\}$ が導

かれて定理4と合わせて(ii)が成立する。▮

上記の定理4，5より明らかなように，$\mathfrak{a}$に不確定を表わす真理値$\frac{1}{2}$が現われたとき，その$\frac{1}{2}$を0または1で置き換えたとき，Fの値―すなわち$F(\mathfrak{a}^*)$―が0または1に限られていても，必ずしも$F(\mathfrak{a})$の値は0または1とはならず，$\frac{1}{2}$となることもある。すなわち，情報が失なわれたと考えられる。

高岡氏の定義(5)に従い，集合

$$\{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a} \in V_3^n - V_2^n,\ F(\mathfrak{a}) = \tfrac{1}{2}\}$$

を情報損失集合と定義すれば，情報損失集合最小の関数は，定理4の(i)，(ii)，(iii)を必要十分条件としたB-3値論理関数である。

定義9(2)；3値論理関数Fが

(i) $F(\mathfrak{a}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow F(\mathfrak{a}^*) = \{0, 1\}$,

(ii) $F(\mathfrak{a}) = 0 \Leftrightarrow F(\mathfrak{a}^*) = \{0\}$,

(iii) $F(\mathfrak{a}) = 1 \Leftrightarrow F(\mathfrak{a}^*) = \{1\}$.

を満すとき，FをP形論理関数という。‖

これに対して，情報損失集合最大の関数は，V_2^nの元以外のすべての元に対して$\frac{1}{2}$をとる関数である。

定義10(4)；3値論理関数Fが

(i) $\mathfrak{a} \in V_2^n$ ならば $F(\mathfrak{a}) \in V_2$,

(ii) $\mathfrak{a} \in V_3^n - V_2^n$ ならば $F(\mathfrak{a}) = \frac{1}{2}$

を満すとき，Fを<u>C形論理関数</u>という。‖

P形論理関数，C形論理関数は，定義5の条件を満すから B－3値論理関数であり，V_2^nの値により一意的に定まる。

FとV-equivalentなP形論理関数をF_P，C形論理関数をF_Cとすれば，$V_{eq}(F)$の集合は情報損失集合の演算に関してブール代数をなし，F_P，F_Cがそれぞれ最小元，最大元となることが，高岡氏[(6)]により示されている。

§6．B－3値論理関数の拡張

B－3値論理代数は，多値にまで拡張することができるが，それは二つの方向に分けられる。

一つは，AND(・)，OR(∨)，NOT(～)の定義1．の(1)，(2)，(3)式をそのまゝ多値にまで拡張定義する方向である。§2で述べたB－3値論理代数の定義や公式は，なにも真理値を0，$\frac{1}{2}$，1の3値に限る必要はない。V_3の代りに，0，1を含み，

$$x \in A \quad ならば \quad 1-x \in A$$

を満す集合Aならばなんでもよいことになる。例えば，$m \geq 4$とするとき，

$$\frac{1}{m-1}i,\ (i=0,1,\cdots,m-1)$$

なるm個の真理値を持つ集合を考えてもよいし，$0 \leq x \leq 1$なる有理数の集合や実数の集合を考えてもよい。これは，古

くから研究されている無限濃度を有する命題論理(7)や，最近言われているFuzzy論理(8)とまったく同じものである。

もう一方は，§3の定義4を保持するような多値論理への拡張であり，これは，多値Fail-Safe論理(9)である。すなわち，定義4の多値への自然な拡張は次のようになる。

いま，m値論理代数（その真理値を $a_1, \cdots, a_m$ とする）において，真理値が $a_{i_1}, \cdots, a_{i_k}$ のいずれであるか不明であることを表わす新らたな真理値 $a_{i_1 \cdots i_k}$ をつけ加える。真理値の集合 $V_m=\{a_1, \cdots, a_m\}$ に，これらの真理値をつけ加えた集合を V とするとき，V は 2^m-1 個の元を有する。V に，次のような半順序関係 $\succ$ を定義する。

<u>定義11</u>；　$\{i_1, \cdots, i_k\} \supset \{j_1, \cdots, j_l\}$ のとき

$$a_{i_1 \cdots i_k} \succ a_{j_1 \cdots j_l}$$

とする。‖

このとき，V^n の集合にもこの半順序関係 $\succ$ を拡張定義する。

<u>定義12</u>；　$\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\beta=(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in V^n$ において

$\alpha_i \succ \beta_i$，$i=1, \cdots, n$ なるとき　$\alpha \succ \beta$

とする。‖

このとき，定義4は次のように拡張される。

<u>定義13</u>；　2^m-1 値論理関数Fが

(i) $\alpha \in V_m^n$ ならば　　$F(\alpha) \in V_m$,

(ii) $\alpha \succ \beta$ ならば　　$F(\alpha) \succ F(\beta)$

なるとき，Fを多値－Fail-Safe論理関数という。∥

B－3値論理関数は，Fuzzy論理関数から見ると真理値の集合を$\{0, \frac{1}{2}, 1\}$に限ったものだし，多値－Fail-Safe論理関数から見ると2値の場合のFail-Safe論理関数になっている。

B－3値論理代数では，第3番目の真理値として$\frac{1}{2}$を用いたが，これはFuzzy論理代数の演算（§2，定義1）をそのまま用いられるようにしたためである。Fail-Safe論理として見たとき，真理値$\frac{1}{2}$は0か1か不明ということを表わしているのであるから，$\frac{1}{2}$を用いるよりU（Undefine，土居氏[10]），やN（Null，高岡氏[6]）やΦ（0と1の合併，浦野氏[11]）を用いるのが適当と思われる。

とにかく，B－3値論理代数は，Fuzzy論理とFail-Safe論理の共通部分に位置し，定理1，2についてはそのまま多値-Fail-Safe論理へも拡張できるし，§4の標準形はFuzzy論理に拡張できる。Fuzzy論理関数について，NOT(～)を含む関数の標準形は今までないようであるが[8]，B－3値論理関数の標準形はそのままでNOT(～)を含む一般のFuzzy論理関数の標準形を与える。

§7. B−3値論理関数の応用

7−1. Fail−Safe論理[2]

真理値$\frac{1}{2}$を故障状態に対応させることにより，Fail−Safe論理回路網の理論に，このB−3値論理代数，B−3値論理関数が応用される。すなわち，B−3値論理関数そのものは（2値）Fail−Safe論理関数である。ある2値論理関数fには，一つの∇-equivalentなB−3値論理関数の集合$\nabla eq(F)$が対応し，これをfのFail−Safe論理関数ともいう。$\nabla eq(F)$の中のP形論理関数が情報損失集合最小の，C形論理関数が最大のFail−Safe論理関数である。これらのFail−Safe論理への応用については前回報告[2]に詳しいので，ここでは省略する。

7−2. ハザードの検出と除去[15]

ハザードの検出と除去においては，真理値$\frac{1}{2}$に，0から1または1から0への推移状態，すなわち過渡状態という意味づけをすることにより，B−3値論理代数，B−3値論理関数が利用される。

Yoeli, Rinon[12]により，B−3値論理代数を適用することにより組み合せ回路における静的ハザードの検出が行なわれ，多入力変数の変化および順序回路におけるハザードの検出へと拡張したのはEichelberger[13]であり，これらの結果

を用いて杉野，稲垣，福村[14]はブール方程式を解くことにより多入力変数変化の静的ハザードの検出方法を示した。

ある2値論理回路網がAND, OR, NOT回路の結合で構成されているとする[*2]。これをB-3値論理代数の式として表現できる。このとき，この2値論理回路網が表現しているB-3値論理関数Fについて次のことが成立する。

定理6[13]；ある2値論理回路網を表現しているB-3値論理関数Fにおいて，$F(\mathbf{a})=\frac{1}{2}$ となるのは，$\mathbf{a}$のうちの$\frac{1}{2}$に相当する入力変数が変化したときに，この回路網の出力が変化する可能性を含むときおよびそのときに限る。‖

証明）AND, OR, NOTの真理値表（表1～表3）より，これらの基本回路の出力が$\frac{1}{2}$となるのは，$\frac{1}{2}$に割り当てられた入力変数が変化するときに出力が変化する可能性を含むときおよびそのときに限る。論理回路網はこれらの基本回路の出力が次の基本回路の入力となっているから，最終出力についても上のことが云えて，定理が成立する。∎

よって，静的ハザードは次のように定義される。

定義14[14],[15]；FをB-3値論理関数，$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_2^n$を二つの入力状態とする。次の条件を満たすとき，$\mathbf{a} \to \mathbf{b}$の変化において，

---

*2: NOR, NAND などの基本回路で構成されている論理回路網でもまったく同様である。

Fに静的ハザードが存在する[*3]という。

(i) $F(\mathbf{a})=F(\mathbf{b})$,

(ii) $F(\mathbf{a}\cup\mathbf{b})=\frac{1}{2}$ ||

ここで，$\mathbf{a}\cup\mathbf{b}$ は半順序関係≧における上限を表わし，二つの入力状態$\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$で変化しているところを$\frac{1}{2}$と置き換えて得られるV_3^nの元である。

静的ハザードは定義14の(i)が

$$F(\mathbf{a})=F(\mathbf{b})=0$$

のとき0ハザード，

$$F(\mathbf{a})=F(\mathbf{b})=1$$

のとき1ハザードといわれる。また，静的ハザードは次のようにも分類される。

定義15；B-3値論理関数Fに，$\mathbf{a}\to\mathbf{b}$の入力変化において静的ハザードが存在して

$$F((\mathbf{a}\cup\mathbf{b})^*)=\{0,1\}$$

なるとき，これを関数ハザード，

$$F((\mathbf{a}\cup\mathbf{b})^*)\neq\{0,1\}$$

なるとき，これを論理ハザードという。||

---

*3：ここで，ハザードが存在するとは，ハザードが発生する可能性があるということ，すなわち時間遅れ要素をそう入すればハザードを生じさせることができるという意味である。

B－3値論理代数，B－3値論理関数の理論を用いると，関数ハザードが除去できないこと，論理ハザードは除去できることなどが簡単に示される。すべての論理ハザードが除去された関数は，P形論理関数である。また，B－3値加法標準形は，相補項を含まない部分の加法標準形と，相補項を含む部分の相補加法標準形に分けられたが，このとき，次のことがいえる。

<u>定理7</u>；加法標準形に0ハザードが存在すれば，それは必ず関数ハザードである。‖

証明）0ハザードの存在条件は

$$F(a)=F(b)=0 \text{ ----------- } (4)$$

$$F(a\cup b)=\frac{1}{2} \text{ ------------ } (5)$$

である。しかるに，定理5より加法標準形Fにおいて(5)式は

$$F((a\cup b)^*)\neq\{0\}$$

を意味している。すなわち $F((a\cup b)^*)$ は $\{1\}$ か $\{0,1\}$ である。ところで，(4)より $\{1\}$ ではあり得ない。よって，

$$F((a\cup b)^*)=\{0,1\}$$

すなわち関数ハザードである。▮

<u>定理8</u>；相補加法標準形には，1ハザードおよび関数ハザードは存在しない。‖

証明）相補加法標準形Fでは，

すべての $\mathbb{a} \in \mathbb{V}_3^n$ について　$F(\mathbb{a}^*) = \{0\}$
であるから定義より明らか。▮

なお，次のことが成り立つのもほとんど明らかである。

定理9；B-3値論理関数Fにおいて，$F(\mathbb{a}) = F(\mathbb{b})$で，$\mathbb{a} \to \mathbb{b}$の入力変化で静的ハザードが存在しないならば，

$$\mathbb{a} \cup \mathbb{b} と \mathbb{a}' \cup \mathbb{b}$$

なるすべての $\mathbb{a}' \to \mathbb{b}'$ においても静的ハザードは存在しない。∥

証明）略。

定理10；B-3値論理関数Fにおいて，$\mathbb{a} \to \mathbb{b}$ の入力変化で静的ハザードが存在すれば，

$$F(\mathbb{a}') = F(\mathbb{b}') で　\mathbb{a}' \cup \mathbb{b}' と \mathbb{a} \cup \mathbb{b}$$

なるすべての $\mathbb{a}' \to \mathbb{b}'$ においても静的ハザードが存在する。∥

証明）略。

7-3．素項（prime Implicant）展開を求める方法[16]

ある2値論理関数 f を表現する論理式 ψ が素項展開であるとは，ψ をB-3値論理関数として見たとき，ψ がP形論理関数のB-3値主加法標準形になっていることに等しい。[16]
よって，f の素項展開を求める問題は，ψ と V-equivalent なP形論理関数のB-3値主加法標準形を求めることに帰着させられる。

fを表現している論理式ψ_0が加法標準形ならば，ψ_0が表現しているB−3値論理関数Fでは

$$F(a)=0 \Leftrightarrow F(a^*)=\{0\} \text{-----} \quad (6)$$

が成立している(定理5)。よって，まず，$\sim\psi_0$のB−3値全加法標準形を求めて，すべての相補項をとり去った式ψ_1では，ψ_1が加法標準形であるからψ_1が表現するB−3値論理関数F'は

$$F'(a)=0 \Leftrightarrow F'(a^*)=\{0\} \text{-----} \quad (7)$$

を満す。また，否定をとったから，0-setは1-setに変り，相補項の消去は1-setに影響を及ぼさないし，B−3値全加法標準形への変形は関数の値を変えないから，(6)式より

$$F'(a)=1 \Leftrightarrow F'(a^*)=\{1\} \text{------} (8)$$

となる。(7),(8)よりF'はP形論理関数である(定義9)。故に，ψ_1はP形論理関数のB−3値全加法標準形であるから素項展開で，ψ_1が表現している2値論理関数は明らかに$\sim f$である。この手順を再びくり返してψ_2を求めれば，fに対する素項展開が求まる。

[例] $\psi_0 = x_2\cdot\sim x_3\cdot x_4 \vee x_1\cdot x_2\cdot x_4 \vee \sim x_1\cdot x_2\cdot x_3$

$$\sim\psi_0 = (\sim x_2 \vee x_3 \vee \sim x_4)\cdot(\sim x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_4)\cdot(x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)$$

$$= (\sim x_2 \vee \sim x_4 \vee \sim x_1\cdot x_3)\cdot(x_1 \vee \sim x_2 \vee \sim x_3)$$

$$= \sim x_2 \vee x_1\cdot\sim x_4 \vee \sim x_3\cdot\sim x_4 = \psi_1$$

$$
\begin{aligned}
\sim\psi_1 &= x_2\cdot(\sim x_1 \vee x_4)\cdot(x_3 \vee x_4)\\
&= x_2\cdot(x_4 \vee \sim x_1\cdot x_3)\\
&= x_2\cdot x_4 \vee \sim x_1\cdot x_2\cdot x_3 = \psi_2 \qquad /\!/
\end{aligned}
$$

§8. あとがき

B－3値論理代数，B－3値論理関数について考察し，これを用いたいくつかの応用例を示した。この他にも非同期回路網理論，故障検出，パターン認識などへの応用もあるが，ここでは省略する。

ここで定義された演算AND(・)，OR(∨)，NOT(～)のみでは，関数的な完全性の条件を満さないが，これらの演算は2値論理における演算の最も自然な拡張であり，かつ基本的で回路的にも作りやすい。AND，ORにいかなる演算を加えたら関数的に完全になるかということについては田原氏[17]の研究がある。

B－3値論理代数の基本的なこと柄については古くから研究されており，また，Fail-Safe論理，ハザードの検出など多くの分野でその応用例が(ほとんど個別的に)見られている。本報告では，B－3値論理代数，B－3値論理関数について統一的に考察し，応用例などについてもいくつかの新しい事実を示した。ここに述べたことは，かなり有用な手段と

してこれからも用いられることと思われる。

最後に，日頃御指導いただく，明治大学，後藤以紀教授，電子技術総合研究所，駒宮安男電子デバイス部長，長田正情報制御研究室長に感謝致します。また，電子技術総合研究所での研究に御便宜を計っていただいている上滝制御部長，佐藤システム制御研究室長，その他制御部の方々に感謝致します。

§9. 参考文献

(1) 井関；記号論理学，槇書店，1968.

(2) 向殿；3値を用いたFail-Safe論理回路，数理解析研究所講究録81，1970-3.

(3) 向殿；B-3値論理関数について，通信学会オートマトン研究会資料，1970-12.

(4) 向殿；C形Fail-Safe論理の数学的構造について，通学会誌，VOL. 52-C，1969-12.

(5) 三根，高岡；非対称故障論理回路を用いた2重系の一構成法，信学会電算機研究会資料，1967-9.

(6) 高岡；あるFail-Safe論理系について，数理解析研究所講究録81，1970-3.

(7) 駒宮；命題値が連続的濃度を有する命題論理学とその応

用について，電試研究報告498，1949-12.
(8) 水本・他；Fuzzy代数，数理解析研究所講究録81，1970-3.
(9) 高岡；多値論理に対するフェイルセイフシステムの構成，通信学会 Vol.54-C，1971-01.
(10) 土屋；抵抗－半導体発振器によるフェイルセイフ3値論理回路，通学会電算機研究会資料，1968-1.
(11) 渡辺，浦野；Fail-Safe論理系の構成理論，信学会誌，Vol.52-C，1969-1.
(12) M. Yoeli, S. Rinon; Application of Ternary Algebra to the Study of Static Hazards, J. ACM, 11, 1, 1964.
(13) E. B. Eichelberger; Hazard Detection in Combinational and Sequencial Circuits, IBM. J., 9, 2-1965
(14) 杉野，稲垣，福村；多入力変数の変化による静的ハザードの3値論理を用いた一検出法，通信学会誌，50, 2, 1967.
(15) 向殿；静的ハザードの定式化について，明治大学科学研究所紀要，9，1970.
(16) 向殿；B-3値論理関数による素項形式の求め方，通学会誌・オートマトン研究会資料，1971-3.
(17) 田中，田原；三値論理関数の完全性について，数理解析研究所講究録81，1970-3.