数理解析研究所講究録
第140巻 1972年 268-295

多値しきい値関数について

相原恒博 (愛媛大学工学部)

あらまし

三値しきい値関数実現の簡便な方法を求めるため，筆者はまえに三値二，三変数しきい値関数を生成する数列表を発表したが，ここではその数列表を求める方法についてまず報告し，この数列表に基づいて三値二，三変数しきい値関数の特徴パラメータの算出について述べる。この特徴パラメータ表によれば，三値二，三変数しきい値関数の実現はきわめて容易となる。

つぎに r値論理における完全単調性を定義し，その性質について考察する。この完全単調性の概念を，等しい変数をもつ r値 n変数論理関数の集合に対して敷延し，完全単調集合なるものを定義する。論理関数の集合に属するすべての関数が，共通の荷重ベクトルをとりうるしきい値関数であるための必要条件は，その集合が完全単調集合であることが示される。

また，二値論理における summable, asummable を r値論理関数に対して拡張し，r値 2-asummable と r値完全単調性と

の関係について考察する。そしてこの完全単調性を三値論理に適用し，三値論理における完全単調性は，三値三変数しきい値関数の必要十分条件となることの検証について述べる。

最後に，三値 $n(\leq 3)$ 変数論理関数の集合を，出力素子は三値可変しきい素子を用い，他は通常の三値しきい素子を用いた二段回路で実現する方法を述べる。

1. まえがき

二値論理における しきい値関数の実現方法は，(i) 一次不等式系をとく，(ii) リニヤー・プログラミングによる，(iii) しきい値関数表（または しきい値関数の特徴パラメータ表）による，(iv) しきい値関数の性質を用いる，などに分類されているが，多値しきい値関数の実現においても同様の手法が考えられる。

本文では，(iii)，(iv) の手法により，三値 しきい値関数の実現，さらに任意の三値論理関数の しきい素子回路実現について述べる。

まず，三値 しきい値関数表であるが，これは R.D. Merrill によって[1]，二変数までの 三値しきい値関数は作成されている。筆者は Merrill の方法を改良して，三値三変数 しきい値関数を生成する数列表を作成した[2]。この数列表によれば，三値三変数 しきい値関数の実現は容易である。一方，北橋[3]，藤田[4]

らは，三値論理関数に対する特徴パラメータを導入し，その性質について報告している。これによれば，三値しきい値関数の特徴パラメータさえ用意されれば，三値しきい値関数の実現はきわめて容易となることが予想される。そこで，前述の数列表に基づいて，三値三変数しきい値関数の特徴パラメータ表を作成した[5]。

しきい値関数の性質に基づく実現方法としては，完全単調性を用いている。二値論理における完全単調性は三値論理に拡張されているが[6]，ここでは r 値論理関数の完全単調性を定義した。この完全単調性は，$r=2$，3とすれば，従来の二値，三値論理における完全単調性と同値である。

完全単調性の概念を，論理関数の集合に対して敷延することにより，三値論理関数の集合を可変しきい素子回路で実現する方法を提案する。

2．三値三変数しきい値関数の生成

$x_i \in \{-1, 0, +1\}$，入力変数ベクトル $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，入力荷重ベクトル $w=(w_1, w_2, \cdots, w_n)$，しきい値を T_1，T_2 $(T_1 > T_2)$ とすると，三値しきい値関数はつぎのように定義される。

$$f(\mathbf{x})=\begin{cases}+1 & \Leftrightarrow \ \mathbf{w}\cdot\mathbf{x} \geq T_1+\delta \\ 0 & \Leftrightarrow \ T_1-\delta \geq \mathbf{w}\mathbf{x} \geq T_2+\delta \\ -1 & \Leftrightarrow \ T_2-\delta \geq \mathbf{w}\mathbf{x}\end{cases} \qquad (1)$$

ただし，δは正の実数である。

ある入力ベクトルを$\mathbf{x}_j$，$j=\sum_{i=1}^{n} 3^{n-i} x_i+(3^n+1)/2$，とするとき（$x_i$は$\mathbf{x}_j$の$i$番目の成分），$v_j=\mathbf{w}\cdot\mathbf{x}_j$ を入力の大きさと呼ぶことにする。

［定義1］すべてのv_jについて，大きさの等しいものが存在せず，$v_{(min)}<\cdots<v_j<\cdots<v_{(max)}$ のように並べられたものを荷重和数列と定義する。また，$v_{(min)}<\cdots<v_i=\cdots=v_j<\cdots<v_{(max)}$ のように，入力の大きさの等しいものがある場合を縮退荷重和数列という。

すなわち，荷重和数列のHasse線図は一列となり，節点の数は3^n個であるが，縮退荷重和数列では3^nより少ない。以後，荷重和数列を単に数列ということもある。

集合S_i，S_jにおいて，$x\in S_i$，$y\in S_j$ なるすべてのx，yに対して，$x<y$ ならば$S_i<S_j$ と書くことにする。関数の値が+1，0，−1となるようなv_jの集合をそれぞれ，S^+，S^0，S^-とすると，しきい値関数の定義から，$S^+=\{v_j \mid v_j\geq T_1+\delta\}$，$S^0=\{v_j \mid T_1-\delta>v_j>T_2+\delta\}$，$S^-=\{v_j \mid T_2-\delta\geq v_j\}$ である。したがってしきい値関数の必要十分条件は，$S^-<S^0<S^+$ と書け

る。荷重和数列はy_jを小さいものから順に並べたものであるから，この数列から上の条件を満足するS^-，S^0，S^+を作り出すことは容易であり，しきい値関数もただちに得られる。縮退荷重和数列および荷重和数列から得られるしきい値関数の集合をそれぞれS_d，S_wとすると，$S_d \subset S_w$である。したがってしきい値関数の生成にあたっては荷重和数列のみを考え，縮退荷重和数列は考えないことにする。すべての三値三変数しきい値関数を生成するには，三変数に対するあらゆる荷重和数列を求め，それに対して可能なすべてのT_1，T_2の対を考えてS^-，S^0，S^+を決定すればよい。

三変数の場合の荷重和数列を求める方針を述べる。

$w=(w_1, w_2, w_3)$において，二個以上の成分が等しければ縮退荷重和数列となることは明らかであり，荷重和数列となるためには，つぎの条件がまず必要である。

$$w_1 \neq w_2 \neq w_3 \neq 0 \qquad (2)$$

条件(2)を満たす一つの条件として

$$w_1 > w_2 > w_3 > 0 \qquad (3)$$

を考える。条件(3)の下におけるy_jのHasse図は図1のようになる。条件(3)の

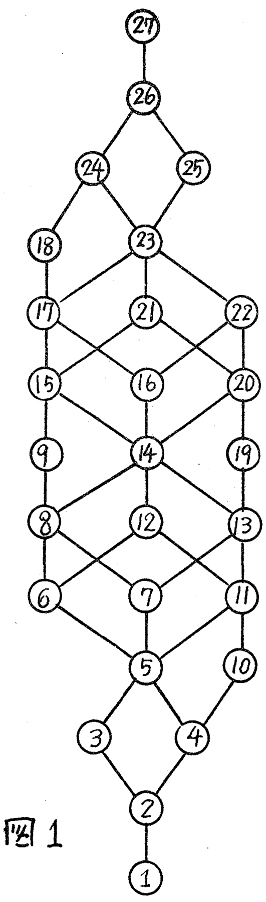

図1

もとで，さらに細かい条件を考えて，図1の半順序集合から荷重和数列に変換すると26種類の荷重和数列が得られる[7]。ところがこの26種類の数列のうち，いくつかの数列から得られるしきい値関数はすべて，残りの数列から得られるしきい値関数と同じものとなる。すなわち，いくつかの数列は冗長である。最小のw_3をもつ数列から，もっとも多くのしきい値関数が生成されるようにして冗長な数列をとり除くと，18種類の数列をうる。これを表1に示す。ただし表1ではv_jの添字のみで示し，$v_j \geq 0$のもののみを，左端の位置に最小，右へ進むにつれて大きくなるように配列してある。$j=\sum_{i=1}^{n} 3^{3-i} x_i + (3^3+1)/2$と定義されているから，$i+j=28$ならば，$v_i=-v_j$の関係があるから，$v_j<0$なるものの大小関係もただち

表1　荷重和数列とその荷重

荷重和数列														w_1	w_2	w_3
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	9	3	1
14	15	19	20	21	16	17	18	22	23	24	25	26	27	9	6	1
14	16	15	17	19	18	20	22	21	23	25	24	26	27	9	3	2
14	16	15	17	18	19	20	22	21	23	25	24	26	27	11	3	2
14	15	16	19	17	20	18	21	22	23	24	25	26	27	11	5	2
14	19	15	20	16	21	17	22	18	23	24	25	26	27	9	6	2
14	15	19	16	20	17	21	18	22	23	24	25	26	27	11	6	2
14	19	15	20	21	16	17	22	18	23	24	25	26	27	11	8	2
14	16	19	15	17	20	22	18	21	23	25	24	26	27	9	4	3
14	19	16	15	20	17	22	21	18	23	25	24	26	27	9	5	3
14	9	20	15	16	21	22	17	23	18	24	25	26	27	9	7	3
14	20	9	15	21	16	22	17	23	18	24	25	26	27	9	8	3
14	9	16	20	15	22	17	21	23	18	25	24	26	27	9	6	4
14	16	9	20	22	15	17	21	23	25	18	24	26	27	9	6	5
14	20	16	22	9	15	21	17	23	25	18	24	26	27	8	7	5
14	20	9	16	15	22	21	17	23	18	25	24	26	27	11	9	5
14	16	20	22	9	15	17	21	23	25	18	24	26	27	9	7	6
14	20	16	9	22	15	21	17	23	25	18	24	26	27	11	9	6

にわかる。条件(3)において，w_1, w_2, w_3の置換，符号の与え方を考慮すれば，条件(2)を満足する条件として，$2^3\times 3!$ とおりの条件がえられ，これらに対する数列は，表1の数列から導くことができる[2]。

3. 三値しきい値関数の特徴パラメータ表

三値n変数論理関数 $f(x)$ の特徴パラメータ c_f はつぎのように定義される。

$$c_f=(m_f,\ p_f,\ c_{f1},\ c_{f2},\ \cdots,\ c_{fn}) \qquad (4)$$

ただし，m_f, p_f はそれぞれ，関数値 -1，および $+1$ をとる入力ベクトルの数，c_{fi} は文献(3)の c_{fi} と同一のものである。

表2　三値二変数しきい値関数の特徴パラメータ

M	P	C1	C2	J	M	P	C1	C2	J	M	P	C1	C2	J
0	8	1	1	1	0	7	2	1	1	0	6	2	2	2
0	6	3	0	1	0	5	3	1	1	0	4	3	1	1
0	3	2	2	2	0	3	3	0	1	0	2	2	1	1
0	1	1	1	1										
1	8	2	2	1	1	7	3	2	1	1	6	3	3	2
1	6	4	1	1	1	5	4	2	1	1	4	4	2	1
1	3	3	3	2	1	3	4	1	1	1	2	3	2	1
1	1	2	2	1										
2	7	4	2	1	2	6	4	3	2	2	6	5	1	1
2	5	5	2	1	2	4	5	2	1	2	3	4	3	2
2	3	5	1	1	2	2	4	2	1					
3	6	4	4	2	3	6	6	0	1	3	5	5	3	2
3	5	6	1	1	3	4	5	3	2	3	4	6	1	1
3	3	4	4	2	3	3	6	0	1					
4	5	6	2	1	4	4	6	2	1					

表　3

J	w_1	w_2	J	w_1	w_2
1	3	1	2	3	2

$c_{fi} > c_{f(i+1)}$，かつ $m_f \doteq p_f$ であるような関数を標準関数と呼ぶ。表1より，三値三変数標準しきい値関数の特徴パラメータが算出される[5]。パラメータ表の例として，標準三値二変数しきい値関数の特徴パラメータを表2に示す。表2では，M，P，C1，C2，は，それぞれ，m_f，p_f，c_{f1}，c_{f2}，を示し，Jはそのパラメータに対する荷重ベクトルを示す指標で，表3にその荷重ベクトルを示す。このようなパラメータ表を用いれば，三値二，三変数しきい値関数の判別，実現はきわめて容易となる。

4. r値論理関数の完全単調性とasummability

4.1. 完全単調性

r値論理の真理値を，$r = 2m+1$（mは正の整数）のとき；$0, \pm 1, \cdots, \pm m$ とし，$r = 2m$ のとき；$0, \pm 1, \cdots, \pm(m-1), +m$ とする。真理値の大小関係は数値のそれに対応づける。本文では，$r = 2m+1$ として議論するが，$r = 2m$ のときも同様の議論が成立する。真理値の集合をVで表わすことにする。

r値しきい値関数は，式(1)の拡張としてつぎのように定義される。入力変数ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$x_i \in V$，荷重ベクトル $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, \cdots, w_n)$，しきい値を $T_1, T_2, \cdots, T_{r-1}$，$(T_i > T_{i+1})$ とすると，

$$f(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} m \Leftrightarrow \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} \geq T_1 + \delta \\ m-1 \Leftrightarrow T_1 - \delta \geq \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} \geq T_2 + \delta \\ \vdots \\ 0 \Leftrightarrow T_m - \delta \geq \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} \geq T_{m+1} + \delta \\ \vdots \\ -(m-1) \Leftrightarrow T_{r-2} - \delta \geq \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} \geq T_{r-1} + \delta \\ -m \Leftrightarrow T_{r-1} - \delta \geq \boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{x} \end{cases} \qquad (5)$$

ただし，δは正の実数である。

[定義2] 入力ベクトル$\boldsymbol{x}_a$, $\boldsymbol{x}_b$のi番目の成分をそれぞれ，x_i^a, x_i^bとする。$x_i^a - x_i^b = -1$，かつi以外のすべてのjについて$x_j^a = x_j^b$であるとき，$\boldsymbol{x}_a$と$\boldsymbol{x}_b$は成分iで連結されるといい，$\boldsymbol{x}_a \xrightarrow{i} \boldsymbol{x}_b$と表わす。ここに，矢印は連結の向きを示すという。$\boldsymbol{x}_a \xrightarrow{i} \boldsymbol{x}_b$, $\boldsymbol{x}_b \xrightarrow{j} \boldsymbol{x}_c$, $\cdots$, $\boldsymbol{x}_g \xrightarrow{k} \boldsymbol{x}_h$であるとき，$\boldsymbol{x}_a \xrightarrow{i} \boldsymbol{x}_b \xrightarrow{j} \boldsymbol{x}_c \cdots \boldsymbol{x}_g \xrightarrow{k} \boldsymbol{x}_h$と表わし，$\boldsymbol{x}_a$と$\boldsymbol{x}_h$は成分$i, j, \cdots, k$で連結されるという。

[定義3] 入力ベクトル$\boldsymbol{x}_{a0}$, $\boldsymbol{x}_{ak}$が，$\boldsymbol{x}_{a0} \xrightarrow{i} \boldsymbol{x}_{a1} \xrightarrow{i} \boldsymbol{x}_{a2} \cdots \boldsymbol{x}_{a(k-1)} \xrightarrow{i} \boldsymbol{x}_{ak}$のように，同一の成分のみで連結されているとき，$\boldsymbol{x}_{a0}$と$\boldsymbol{x}_{ak}$は成分$i$で直線状に連結されるといい，$\boldsymbol{x}_{a0} \xrightarrow{ki} \boldsymbol{x}_{ak}$と記す。

r値論理では，二つのベクトルが直線状に連結されている場合，$k \leq r-1$である。

［定義4］ x_aとx_eがm個の成分で連結されているとする。このとき$x_{a'}$と$x_{e'}$が，x_aとx_eが連結されているのと同じ成分で連結され，かつ同一の成分においては連結の向きも等しいとき，ベクトルの組$(x_a ; x_e)$と$(x_{a'} ; x_{e'})$とは平行であるといい，$(x_a ; x_e) /\!/ (x_{a'} ; x_{e'})$と書く。

たとえば，

$$\left.\begin{array}{l} x_a \overrightarrow{\overset{k_1 i}{*}} x_b \overleftarrow{\overset{k_2 j}{*}} x_c \cdots x_d \overrightarrow{\overset{k_m l}{*}} x_e \\ x_{a'} \overrightarrow{\overset{k_1 i}{*}} x_{b'} \overleftarrow{\overset{k_2 j}{*}} x_{c'} \cdots x_{d'} \overrightarrow{\overset{k_m l}{*}} x_{e'} \end{array}\right\} \qquad (6)$$

であれば，$(x_a ; x_e) /\!/ (x_{a'} ; x_{e'})$である。また$x_{a} \overrightarrow{\overset{k_1 i}{*}} x_b \overleftarrow{\overset{k_2 j}{*}} x_c \cdots x_d \overrightarrow{\overset{k_m l}{*}} x_e$，$x_{a'} \overleftarrow{\overset{k_2 j}{*}} x_{b'} \overrightarrow{\overset{k_1 i}{*}} x_{c'} \cdots x_{d'} \overrightarrow{\overset{k_m l}{*}} x_{e'}$のように，連結の成分の順序が同一でなくても，やはり$(x_a ; x_e) /\!/ (x_{a'} ; x_{e'})$である。

連結(6)における$k_1 + k_2 + \cdots + k_m$の値を連結の度数(K)と呼ぶことにすると，r値n変数の場合には，$K \leqq n(r-1)$である。ただし，平行なベクトルの特別の場合として，$(x_a ; x_e) /\!/ (x_a ; x_e)$も認めるものとする。

定義4から，つぎの定理の成立は明らかである。

［定理1］ $(x_a ; x_e) /\!/ (x_{a'} ; x_{e'})$であるための必要十分条件は，$x_e - x_a = x_{e'} - x_{a'}$であることである。

［系1］ $(x_a ; x_e) /\!/ (x_{a'} ; x_{e'})$であれば，$(x_a ; x_{a'}) /\!/ (x_e ; x_{e'})$である。

[定義 5]　$f(x)$ を r 値 n 変数論理関数とする。連結の度数が K（$1 \leq K \leq l$ なるすべての K を考える）であるようなすべての $(x_a ; x_e) /\!/ (x_{a'} ; x_{e'})$ に関して，$f(x_e) - f(x_a) = d$，$f(x_{e'}) - f(x_{a'}) = d'$ としたとき，$dd' < 0$ となるようなベクトルの組が一つも存在しないとき，$f(x)$ は l 単調であるという。

[定義 6]　$f(x)$ が $n(r-1)$ 単調であれば，$f(x)$ は完全単調であるという。

[定理 2]　$f(x)$ がしきい値関数であるための必要条件は，$f(x)$ が完全単調であることである。

[証明]　$f(x)$ は完全単調でないとしよう。すると，

$$f(x_e) - f(x_a) = d, \quad f(x_{e'}) - f(x_{a'}) = d' \tag{7}$$

としたとき，$dd' < 0$ となるような $(x_a ; x_e) /\!/ (x_{a'} ; x_{e'})$ が少なくとも一つは存在する。便宜上，$d > 0$，$d' < 0$ としておく。しきい値関数の定義および式(7)から

$$\left.\begin{aligned} w \cdot x_e - w \cdot x_a &> 0 \\ w \cdot x_{e'} - w \cdot x_{a'} &< 0 \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

定理 1 により，連立不等式(8)が矛盾することは明らかであり，$f(x)$ はしきい値関数ではない。

[性質 1]　$f(x)$ が l 単調であれば，$x_{a0} \xrightarrow[*]{k_1 i} x_{a1} \xrightarrow[*]{k_2 j} x_{a2} \cdots x_{a(k-1)} \xrightarrow[*]{k_k m} x_{ak}$ なる x_{a0}，x_{ak} に対して（$k_1 + k_2 + \cdots + k_k \leq l$），

$$f(\mathbb{x}_{ak})-f(\mathbb{x}_{a0})\gtrless 0 \Rightarrow k_1 w_i + k_2 w_j + \cdots + k_k w_m \gtrless 0 \quad (9)$$

が成立する。ただし，複号同順とする。

4.2. asummability

二値論理における summable, asummable は三値論理に拡張されているが，[3] これを r 値論理に拡張する。

［定義7］ 正規直交系を作る $(r-2)$ 次元ベクトル，あるいは $(r-2)$ 次元の 0 ベクトルを付加ベクトルという。

［定義8］ n 次元入力ベクトル $\mathbb{x}$ に，付加ベクトル α を付加して得られる $n+r-2$ 次元ベクトル $\mathbb{X}=(\mathbb{x},\alpha)$ を変形入力ベクトルという。

$\{{}^p\mathbb{x}\}=\{\mathbb{x}\mid f(\mathbb{x})=p\}$，ただし $-m\leq p\leq m$，と表わし，変形入力ベクトルを要素とするつぎのような行列 $[\mathbb{X}]$ を考える。

$$[\mathbb{X}]=\begin{bmatrix}({}^m\mathbb{x},1,0,\cdots,0), & ({}^m\mathbb{x},0,1,0,\cdots,0), & \cdots, & ({}^m\mathbb{x},0,\cdots,0,1), & ({}^m\mathbb{x},0,\cdots,0)\\ ({}^{m-1}\mathbb{x},1,0,\cdots,0), & ({}^{m-1}\mathbb{x},0,1,0,\cdots,0), & \cdots, & ({}^{m-1}\mathbb{x},0,\cdots,0,1), & ({}^{m-1}\mathbb{x},0,\cdots,0)\\ \vdots & & & & \\ ({}^{-m+1}\mathbb{x},1,0,\cdots,0), & ({}^{-m+1}\mathbb{x},0,1,0,\cdots,0), & \cdots, & ({}^{-m+1}\mathbb{x},0,\cdots,0,1), & ({}^{-m+1}\mathbb{x},0,\cdots,0)\\ ({}^{-m}\mathbb{x},1,0,\cdots,0), & ({}^{-m}\mathbb{x},0,1,0,\cdots,0), & \cdots, & ({}^{-m}\mathbb{x},0,\cdots,0,1), & ({}^{-m}\mathbb{x},0,\cdots,0)\end{bmatrix} \quad (10)$$

行列 (10) の i 行 j 列の要素（変形入力ベクトル）を $\mathbb{X}_{ij}$ で表わし，つぎの関数を定義する，

［定義9］ $\mathbb{X}$ を変形入力ベクトルとし，つぎのように定義さ

れる関数を変形論理関数という．

$$F(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mathbb{X} = \mathbb{X}_{ij}, & \text{ただし } i = 1, 2, \cdots, (r-1);\ j = i, i+1, \cdots, (r-1) \\ 0 \Leftrightarrow \mathbb{X} = \mathbb{X}_{ij}, & \text{ただし } i = 2, 3, \cdots, r;\ j = 1, 2, \cdots, (i-1) \end{cases} \tag{11}$$

［定理3］ r値論理関数 $f(x)$ がしきい値関数ならば変形論理関数 $F(\mathbb{X})$ もしきい値関数となり

$$F(\mathbb{X}) = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow \mathbb{W}\cdot\mathbb{X} > T_{r-1} \\ 0 \Leftrightarrow \mathbb{W}\cdot\mathbb{X} < T_{r-1} \end{cases} \tag{12}$$

と表わされる．またこの逆も成立する，ただし，

$$\mathbb{W} = (w, T_{r-1}-T_1, T_{r-1}-T_2, \cdots, T_{r-1}-T_{r-2}) \tag{13}$$

で，w, T_iは式(5)のw, T_iである。（証明略）

式(12)の解は定義により

$$\left.\begin{aligned} F^{-1}(1) &\triangleq \{{}^1\mathbb{X}\} = \mathbb{X}_{ij}, \quad i = 1, 2, \cdots, (r-1);\ j = i, i+1, \cdots, (r-1) \\ F^{-1}(0) &\triangleq \{{}^0\mathbb{X}\} = \mathbb{X}_{ij}, \quad i = 2, 3, \cdots, r;\ j = 1, 2, \cdots, (i-1) \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

であるが，二値の理論により式(12)が式(14)なる解をもつための必要十分条件は

$$\sum_p a_p \mathbb{X}_p = \sum_q b_q \mathbb{X}_q \quad \text{かつ} \quad \sum_p a_p = \sum_q b_q \tag{15}$$

ただし，${}^1\mathbb{X}_p \in \{{}^1\mathbb{X}\}$, ${}^0\mathbb{X}_q \in \{{}^0\mathbb{X}\}$，がいかなる正の整数$a_p$, b_qについても満足されないことである。

定理3を考慮すれば，$f(x)$ がr値しきい値関数であるための必要十分条件は，つぎのようになる。

[定理4] r値論理関数 $f(\mathbb{X})$ がしきい値関数であるための必要十分条件は，式（15）の関係が，いかなる正の整数 a_p, b_q についても満足されないことである。

[定義10] $\sum_p a_p = \sum_q b_q \leqq j$ とするとき，$2 \leqq j \leqq k$ なるいずれかの j につき式（15）が成立すれば，r値論理関数 $f(\mathbb{X})$ は k-summable であるという。$f(\mathbb{X})$ が k-summable でないとき，$f(\mathbb{X})$ は k-asummable であるという。

つぎの補題1，2は変形論理関数の定義より明らかである。

[補題1] r値論理関数 $f(\mathbb{X})$ の入力ベクトルを $\mathbb{X}_a$, $\mathbb{X}_b$ とする。付加ベクトルを α とするとき，変形論理関数 $F(\mathbb{X})$ が，$F(\mathbb{X}_a, \alpha) = 1$，$F(\mathbb{X}_b, \alpha) = 0$ であれば，$f(\mathbb{X}_a) > f(\mathbb{X}_b)$ である。

[補題2] $f(\mathbb{X}_a) > f(\mathbb{X}_b)$ であれば，$F(\mathbb{X}_a, \alpha) = 1$, $F(\mathbb{X}_b, \alpha) = 0$ となるような付加ベクトル α が，少なくとも一つは存在する。

[定理5] r値論理関数の完全単調性と 2-asummable とは同値である。

[証明] (i) 2-summable であれば完全単調でないことを証明する。$f(\mathbb{X})$ が 2-summable であれば

$$\left.\begin{array}{ll} F(\mathbb{X}_a, \alpha) = 1 & F(\mathbb{Y}_a, \gamma) = 0 \\ F(\mathbb{X}_b, \beta) = 1 & F(\mathbb{Y}_b, \delta) = 0 \end{array}\right\} \qquad (16)$$

であるような入力ベクトル $\mathbb{X}_a$, $\mathbb{X}_b$, $\mathbb{Y}_a$, $\mathbb{Y}_b$，および付加べク

トルα, β, γ, δに対して

$$(x_a, \alpha) + (x_b, \beta) = (y_a, \gamma) + (y_b, \delta) \tag{17}$$

が成立する，式(17)から，つぎの関係が成り立つ．

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \tag{18}$$

ところが，α, β, γ, δは正規直交系のベクトル，あるいは0ベクトルであるから，式(18)より

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \gamma \\ \beta &= \delta \end{aligned}\right\} \quad \text{あるいは} \quad \left.\begin{aligned} \alpha &= \delta \\ \beta &= \gamma \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

いま便宜上，$\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$ であるとし，この関係を式(16)に代入して

$$\left.\begin{aligned} F(x_a, \alpha) &= 1 \qquad & F(y_a, \beta) &= 0 \\ F(x_b, \beta) &= 1 \qquad & F(y_b, \alpha) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

となり，式(17)は

$$(x_a, \alpha) + (x_b, \beta) = (y_a, \beta) + (y_b, \alpha) \tag{21}$$

すなわち

$$x_a - y_b = y_a - x_b \tag{22}$$

$$(y_b ; x_a) /\!/ (x_b ; y_a) \tag{23}$$

式(20)と補題1により

$$\left.\begin{aligned} f(x_a) &> f(y_b) \\ f(x_b) &> f(y_a) \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

したがって

$$\left.\begin{aligned} f(\boldsymbol{x}_a)-f(\boldsymbol{y}_b)&=d>0 \\ f(\boldsymbol{y}_a)-f(\boldsymbol{x}_b)&=d'<0 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

ゆえに，$f(\boldsymbol{x})$ は完全単調でない。

式(19)において，$\alpha=\gamma$，$\beta=\delta$ としても，同様な結果をうる。

(ii) 完全単調でなければ 2-summable であることは，つぎのように証明される。$f(\boldsymbol{x})$ が完全単調でないとすると，$dd'<0$ となるような平行なベクトルが少なくとも一つは存在する。それを $(\boldsymbol{x}_a;\boldsymbol{x}_e)/\!/(\boldsymbol{x}_{a'};\boldsymbol{x}_{e'})$ としよう。定理1により，$\boldsymbol{x}_e-\boldsymbol{x}_a=\boldsymbol{x}_{e'}-\boldsymbol{x}_{a'}$，すなわち

$$\boldsymbol{x}_e+\boldsymbol{x}_{a'}=\boldsymbol{x}_{e'}+\boldsymbol{x}_a \tag{26}$$

いま，$dd'<0$ であるが，$d>0$，$d<0$ と仮定しよう。

$$f(\boldsymbol{x}_e)>f(\boldsymbol{x}_a) \tag{27}$$

$$f(\boldsymbol{x}_{e'})<f(\boldsymbol{x}_{a'}) \tag{28}$$

となる。式(27)が成立すれば，補題2により

$$F(\boldsymbol{x}_e,\alpha)=1,\quad F(\boldsymbol{x}_a,\alpha)=0 \tag{29}$$

となるような α が，少なくとも一つは存在する。同様に式(28)から

$$F(\boldsymbol{x}_{a'},\beta)=1,\quad F(\boldsymbol{x}_{e'},\beta)=0 \tag{30}$$

となるような β が少なくとも一つは存在する。式(29)，(30)の変形入力ベクトルをそれぞれ加えると

$$(x_e, \alpha) + (x_{a'}, \beta) = (x_e + x_{a'}, \alpha+\beta) \qquad (31)$$

$$(x_a, \alpha) + (x_{e'}, \beta) = (x_a + x_{e'}, \alpha+\beta) \qquad (32)$$

式(26)により，式(31)，(32)の右辺は等しい。したがって

$$(x_e, \alpha) + (x_{a'}, \beta) = (x_a, \alpha) + (x_{e'}, \beta) \qquad (33)$$

すなわち，2-summableである。（証明終）

4.3. 三値三変数しきい値関数の必要十分条件

三値論理においては，完全単調性は三値n（≤ 2）変数しきい値関数であるための十分条件でもあり，三値n（≥ 6）変数しきい値関数に対しては十分条件とはならないことが報告されている[6]。筆者は三値三変数しきい値関数に対しても，完全単調性は十分条件となることを電子計算機により検証したが，その方法について述べる。

荷重ベクトル$w = (w_1, w_2, w_3)$において，$w_1 > w_2 > w_3 > 0$なる条件のもとで，$v_j = w \cdot x_j$の大小関係は図1に示されている。図1で示される半順序集合をSとし，これをつぎのような三個の部分集合S^1，S^0，S^{-1}に分割する。

S^1：ある部分集合S^1を考えたとき，$v_i \in S^1$ならば，v_iより大きいv_jは必ずS^1に属しているような部分集合。

S^{-1}：ある部分集合S^{-1}を考えたとき，$v_j \in S^{-1}$ならば，v_jより小さいv_iは必ずS^{-1}に属しているような部分集合。

S^0：$S^0 = S - S^1 - S^{-1}$

$X^1=\{x\,|\,f(x)=1\}$, $X^{-1}=\{x\,|\,f(x)=-1\}$ と表わし，つぎの定義をする．

[定義11] X^{-1}, X^1のすべての元の添字が，それぞれ，S^{-1}, S^1の元の添字と一致しているような三値論理関数$f(x)$は，完全であるという。

図1のHasse図から，完全な関数は作成されるが，この関数は2-単調である。これを，三値n変数の場合についで述べるとつぎのようになる。

[定理6] $w_1>w_2>\cdots>w_n>0$なる条件下におけるV_3^nのHasse図から得られる完全な関数は2-単調である。(証明略)

図1のHasse図から完全な関数を作成するプログラムは容易に作ることができ，したがって三値三変数の2-単調関数は作成される。すべての2-単調関数から完全単調関数をとり出し，その特徴パラメータを算出する(ここまでは，愛媛大学電子計算機HIPAC-103により行なった)。そのパラメータ，あるいはm_fとP_fを入れかえたものが，さきに求めている特徴パラメータ表[5]にあるか否かを調べる。このようにして，すべての完全単調な関数は，しきい値関数であることが確かめられた。

5. r値論理関数の集合の完全単調性

4.1で定義した完全単調性の概念を敷延して，同じ変数をもつr値n変数論理関数の集合F（以下単に集合Fという）に対して，完全単調集合を定義する。この完全単調集合の性質は，つぎの章で述べるように，三値論理関数の集合を可変しきい素子回路で実現する場合に用いられる。可変しきい素子とは，荷重ベクトルは一定で，しきい値を変化させうるしきい素子である。

[定義12] 集合$F=\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$において，$\mathbb{P}_j=(f_1(\mathbb{x}_j), f_2(\mathbb{x}_j), \cdots, f_N(\mathbb{x}_j))$を出力ベクトルという[8]。

出力ベクトル$\mathbb{P}_a$と$\mathbb{P}_b$のi番目の成分をそれぞれ，a_i，b_iとするとき，すべてのiについて，$a_i \geq b_i$ならば$\mathbb{P}_a \geq \mathbb{P}_b$という。$\mathbb{P}_a \geq \mathbb{P}_b$または$\mathbb{P}_a \leq \mathbb{P}_b$のとき，$\mathbb{P}_a$と$\mathbb{P}_b$は比較可能であるという。

[定義13] 入力の大きさ$v_j=\mathbb{w}'\cdot\mathbb{x}_j$，ただし$\mathbb{w}'=(w_1', w_2', \cdots, w_n')$は可変しきい素子の荷重ベクトル，の大小関係をつぎのように定義したものを入力の順位という：$\mathbb{P}_i<\mathbb{P}_j$ならば$v_i<v_j$，$\mathbb{P}_i=\mathbb{P}_j$ならば$v_i$と$v_j$の大小関係は不定とする。

たとえば，$\mathbb{P}_i<\mathbb{P}_j=\mathbb{P}_k<\mathbb{P}_l$ならば，これにより定まる入力の順位は，$v_i<\begin{matrix}v_j\\v_k\end{matrix}<v_l$である。

v_jの入力の順位が，小さい方からk番目であるとき，$\tilde{\sigma}(v_j)=k$と記す。上述の例では，$\tilde{\sigma}(v_i)=1$，$\tilde{\sigma}(v_j)=\tilde{\sigma}(v_k)=2$，

$\tilde{\sigma}(v_l)=3$ となる。

［定義14］集合Fが与えられたとき，連結の度数がK（$1\leq K\leq l$なるすべてのKを考える）であるようなすべての平行なベクトル（$x_a;x_e$）//（$x_{a'};x_{e'}$）をとり，これらのベクトルに対応するv_a, v_e, $v_{a'}$, $v_{e'}$に対して，$\tilde{\sigma}(v_e)-\tilde{\sigma}(v_a)=D$, $\tilde{\sigma}(v_{e'})-\tilde{\sigma}(v_{a'})=D'$ とする。このとき，$DD'<0$ となるような平行なベクトルの組が一つも存在しないとき，集合Fはl単調集合であるという。ただし，すべての$\tilde{\sigma}(v_j)$は定義しうるものとする。

［定義15］集合Fが $n(r-1)$ 単調集合であるとき，これを完全単調集合という。

［定理7］集合Fが一個の可変しきい素子で実現されるならば，Fは完全単調集合である。（証明略）

定理7の，関数の集合が一個の可変しきい素子で実現される，という意味は，可変しきい素子のしきい値を変化させることにより，その集合に属する関数が順次実現されるということである。

すべてのf_i（$\in F$）が完全単調であっても，Fが完全単調集合であるとは限らない。もし$F=\{f\}$ならば，Fが完全単調集合であることと，fが完全単調であることとは同値である。これらの関係は定理8で述べられる。

［定理8］ 集合Fが完全単調集合であるための必要十分条件は，(i) Fの任意の出力ベクトルが比較可能であり，かつ(ii) Fに属するすべての関数が完全単調であることである。
（証明略）

4.3で述べた方法とほぼ同様な考えにより，関数の集合が一個の可変しきい素子で実現されるための十分条件は電子計算機により検証され，つぎの定理を得る。

［定理9］ 三値n (≤ 3)変数論理関数の集合Fが一個の可変しきい素子で実現されるための必要十分条件は，Fが完全単調集合であることである。

4.1で述べた性質1は，l単調集合である関数の集合Fに対しても同様に成立する。すなわち，

［性質2］ r値n変数論理関数の集合Fがl単調集合であれば，$\mathbf{x}_{a0} \underset{*}{\xrightarrow{k_1 i}} \mathbf{x}_{a1} \underset{*}{\xrightarrow{k_2 j}} \mathbf{x}_{a2} \cdots \mathbf{x}_{a(k-1)} \underset{*}{\xrightarrow{k_k m}} \mathbf{x}_{ak}$ なる$\mathbf{x}_{a0}$, $\mathbf{x}_{ak}$に対して
$(k_1 + k_2 + \cdots + k_k \leq l)$，

$$\tilde{o}(v_{ak}) - \tilde{o}(v_{a0}) \gtrless 0 \Rightarrow k_1 w_i' + k_2 w_j' + \cdots + k_k w_m' \gtrless 0 \tag{34}$$

ただし複号同順とし，w_i', w_j', $\cdots$, w_m'は可変しきい素子の荷重ベクトルの成分である。（証明略）

6. 三値可変しきい素子回路の実現

二値論理の場合においても，n変数論理関数の任意の集合を，可変しきい素子回路で実現する問題はきわめて困難であり，W. S. Meisel がその実現方法を提案してはいるが[9]，それは全く発見的である。

この章では，三値n変数論理関数の集合を可変しきい素子回路で実現する問題を考察するが，任意の集合の実現を考えるのではなくて，与えられた集合の任意の出力ベクトルP_i, P_jが比較可能である場合を考察の対象とする。

以下に述べる実現方法は定理9に基づいている。すなわち与えられた集合が完全単調集合ならば，これを一個の可変しきい素子で実現し，完全単調集合でなければ，完全単調集合の定義に反している矛盾点を解消し，しきい素子の二段回路で実現しようとするものである。したがってこの実現方法は三値$n(\leq 3)$変数論理関数の集合に対して（その出力ベクトルが比較可能であれば）適用される。

変数の数が四変数以上の関数の集合を実現するためには，変数の数に制限されない必要十分条件を見出すことが必要であろう。

図2の$g_1, \cdots, g_j, \cdots, g_k$は通常の三値しきい素子で，これらを制御素子と呼ぶ。出力素子gは可変しきい素子で，その出力

は式(1) において, $w\cdot x$ のかわりに, $w'\cdot x+\sum_{j=1}^{k} h_j y_j(x)$ を代入すれば決定される。ただしw'は可変しきい素子の荷重ベクトル, $y_j(x)$ は素子 g_j の出力 (Y_jと表わすこともある), h_jはg_jからgへの荷重係数, T_{1j}, T_{2j} ($T_{1j}>T_{2j}$) は g_jの しきい値である。T_{i1}, T_{i2} は f_i ($\in F$) の しきい値とする.

この章では議論の対象となる三値論理関数の集合Fは, その出力ベクトルが比較可能であるとしているから, Fが完全単調集合でないということは, 平行なベクトル, $(x_a; x_e) \parallel (x_{a'}; x_{e'})$, に対応する入力の順位に,

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\sigma}(v_e)-\tilde{\sigma}(v_a)>0\\ \tilde{\sigma}(v_{e'})-\tilde{\sigma}(v_{a'})<0\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

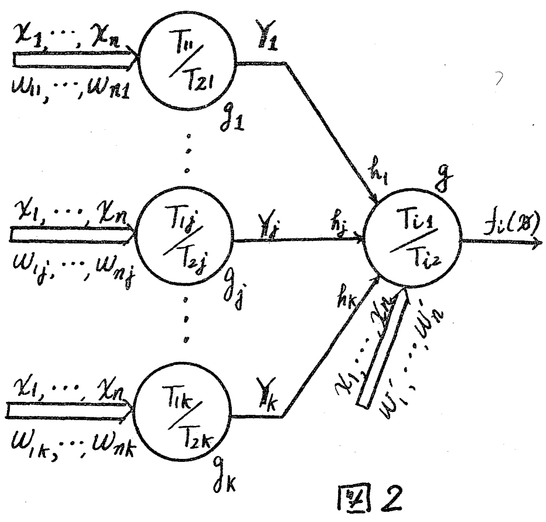

図2

となるものが存在することである。いま, $x_a \xrightarrow{\text{変}\,i} x_b \xrightarrow{\text{変}\,j} x_c \cdots x_d \xrightarrow{\text{変}\,m} x_e$ とし, $y_j(x_\alpha)=Y_j^\alpha$ と表わす。図2の回路で, 入力ベクトルx_a, x_eのときの, 出力素子gに対する入力の總和を, それぞれ I_a, I_eとすれば

$$\left.\begin{aligned}I_a &= w'\cdot x_a+\sum_{j=1}^{k} h_j Y_j^a\\ I_e &= w'\cdot x_e+\sum_{j=1}^{k} h_j Y_j^e\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

定義13で, v_jのかわりに I_a, I_e などを用いれば ($\tilde{\sigma}(I_a)\triangleq\tilde{\sigma}(v_a)$ など), 不等式(35)はつぎのようになる.

$$\left.\begin{aligned}&\gamma(I_e)-\gamma(I_a)>0\\&\gamma(I_{e'})-\gamma(I_{a'})<0\end{aligned}\right\}\qquad(37)$$

$w\cdot x_e - w\cdot x_a = k_1 w_i' + k_2 w_j' + \cdots + k_k w_m'$ に留意すれば，不等式(37)は次式を意味することがわかる。

$$\left.\begin{aligned}&k_1 w_i' + k_2 w_j' + \cdots + k_k w_m' + \sum_{j=1}^{k} h_j(\gamma_j^e - \gamma_j^a) > 0\\&k_1 w_i' + k_2 w_j' + \cdots + k_k w_m' + \sum_{j=1}^{k} h_j(\gamma_j^{e'} - \gamma_j^{a'}) < 0\end{aligned}\right\}\qquad(38)$$

連立不等式(38)において

$$\sum_{j=1}^{k} h_j(\gamma_j^e - \gamma_j^a) \neq \sum_{j=1}^{k} h_j(\gamma_j^{e'} - \gamma_j^{a'})\qquad(39)$$

の関係があれば，連立不等式(20)は矛盾しない。不等式(35)を生じるようなすべてのベクトルの組において，式(21)の関係を満足させるように制御素子 g_j の出力を決定すれば，集合Fは完全単調集合と同じ性質をもつことになる。

集合Fが完全単調集合でない場合，これを図2の回路で実現するためには制御素子の出力を決定せねばならない。そのために，つぎの手順により求める制御行列を導入する。連立不等式(35)を矛盾する不等式と呼ぶことにしておく。

(i) すべての平行なベクトルについて，矛盾する不等式が存在するか否かを調べる。

(ii) 矛盾する不等式があるときは，それに対応して不等式(39)を求める。すなわち

$$\sum_{j=1}^{k} h_j(-\gamma_j^a + \gamma_j^e + \gamma_j^{a'} - \gamma_j^{e'}) \neq 0\qquad(40)$$

とする。ここで3^n次元のベクトル$\mathbb{b}$を作る。$\mathbb{b}$の成分の配置番号として，左端の位置を$-(3^n-1)/2$とし，右へ進むにつれて大きくなり，右端は$(3^n-1)/2$とする。$\mathbb{b}$のa，e，a'，e'の位置にはそれぞれ，不等式(40)の括弧内のy_j^a，y_j^e，$y_j^{a'}$，$y_j^{e'}$の係数をおき，他の成分はすべて0とする。ただし，y_j^αの添字αは，$\alpha=\sum_{i=1}^{n}3^{n-i}x_i^\alpha$，$x_i^\alpha$は$\mathbb{x}_\alpha$の第$i$番目の成分である。たとえば，不等式(40)から求めた$\mathbb{b}$は，

$$\mathbb{b}=(\overset{-(3^n-1)/2}{0},\cdots,0,\overset{a}{-1},0,\cdots,0,\overset{e}{1},0,\cdots,0,\overset{a'}{1},0,\cdots,0,\overset{e'}{-1},0,\cdots,\overset{(3^n-1)/2}{0}) \tag{41}$$

(iii) すべての矛盾する不等式について$\mathbb{b}$を求め，これを行とする行列を作る。

(iv) この行列で，等しい行が存在するときは，そのうちの一つの行のみを残し，他は除去する。このようにして得られた行列を制御行列($\mathbb{B}$)という。

ある行列$\mathbb{C}$のすべての要素が非零であれば，$\mathbb{C}\neq 0$と表わすことにしておく。

[定理10] 三値$n(\leq 3)$変数論理関数の集合$\mathbb{F}$が完全単調集合でない場合に，制御素子g_jの出力Y_jがつぎの条件を満足すれば，$\mathbb{F}$は図2の回路で実現できる。

$$\mathbb{B}(h_1Y_1+h_2Y_2+\cdots+h_kY_k)\neq 0 \tag{42}$$

ただし，Y_jは$3^n\times 1$行列で，

$$Y_j = [\,y_j^{-\frac{(3^n-1)}{2}}, \cdots, y_j^{-1}, y_j^{0}, y_j^{1}, \cdots, y_j^{\frac{3^n-1}{2}}\,]^t \tag{43}$$

ここに，tは行列の転置を表わす。（証明略）

三値二変数および三変数しきい値関数の荷重和数列表は求められているが，この数列表の任意の一つの荷重和数列から得られる $Y_1, Y_2, \cdots, Y_k$ で式(42)を満足させることができる。このことは，荷重和数列から得られるしきい値関数 f_i（すなわち Y_i）は，希望する j，$j=\sum_{i=1}^{n} 3^{n-i} x_i$，について，$f_i(X_j) \neq f_i(X_{j+1})$ とすることができることを考慮すれば明らかである。

定理10において，なるべく少ない数の制御素子で式(42)を満足させるための目安として，つぎの定義を導入する。

［定義16］ BY_i の非零の要素の個数を N_i，制御行列 B の行数を R とするとき，N_i/R を Y_i の消去度という。

定義より明らかに，Y_i の消去度が1であれば，いま考えている集合Fは一個の制御素子を付加することにより実現される。制御素子数をなるべく少なくする方法は，つぎのような考えによる。

ある荷重和数列から得られる制御素子出力（すなわち，しきい値関数）のうち，最大の消去度をもつものを Y_j とする。制御行列 B_j の行から，$B_j Y_j$ の非零となる行を除いて得られる行列を B_{j+1} とする。つぎに B_{j+1} に対して最大の消去度をもつ

制御素子出力を決定する。以上の操作を繰り返す。

つぎに、三値 $n(\leq 3)$ 変数論理関数の集合Fを、図2の回路で実現する手順を述べる。

手順1. 与えられた集合Fの出力ベクトル P_i, P_j がすべて比較可能か否かを調べる。比較可能でない P_i, P_j があれば、Fは実現不可能である。

手順2. P_i, P_j がすべて比較可能ならば、矛盾する不等式（不等式(35)）が存在するか否かを調べる。性質2に基づいて、$l=1, 2, \cdots, n(3-1)$ において得られる不等式を記録しておく。完全単調集合ならば、Fは一個の可変しきい素子で実現される。

手順3. 完全単調集合でなければ、制御行列Bを作る。

手順4. $B(h_1 Y_1 + h_2 Y_2 + \cdots + h_k Y_k) \neq 0$ となる Y_j を定める。

手順5. 手順4で求めた Y_j を不等式(38)に代入する。

手順6. 計算実行表[10]を作り、w_i, h_i を求める。

手順7. 各関数に対するしきい値を決める。

7. むすび

二値しきい値関数の重要な性質である完全単調性と、asummability, summability を多値論理に拡張し、その性質を調べ、完全単調性と 2-asummable とは同値であることなどを示した。

この完全単調性の概念を多値論理関数の集合に対して敷延し，完全単調集合を定義し，論理関数の集合が一個の可変しきい素子で実現されるための必要条件は，その集合が完全単調集合であることを示した。完全単調集合の性質に基づき，三値 n (≤ 3) 変数論理関数の集合を，可変しきい素子回路で実現する方法を求めた。

しかしながら，この実現方法は論理関数の変数の数に制限があること，最小素子実現でないこと，などに問題点は残っている。

謝辞　有益なご助言をいただいた大阪大学工学部手塚慶一助教授，同基礎工学部北橋忠宏氏に厚く感謝申し上げる。また，協力をしていただいた高松雄三君（佐賀大学），および片岡正次郎君，赤木道弘君，矢野純君，村上研二君らの協力に感謝する。

参考文献

(1) R.D. Merrill: "Ternary threshold logic", Lockheed Missiles and Space Co., Rept. No. RTD-TDR-63-4173 11, p.B-187 (1963)
(2) 相原，赤木："三変数までの三値しきい値関数の作成"，信学論(C)，53-C，9，P.591 (昭45-09)
(3) 北橋他："三値論理関数の特徴パラメータとしきい値関数への応用" 信学論(C)，52-C，10，P.641
(4) 三根，藤田："三値しきい値関数について" 京大数理解析研究所講究録81，p.46 (1970年3月)
(5) 相原："三値三変数しきい値関数の特徴パラメータ表" 信学論投稿中
(6) 北橋他："三値しきい値論理関数の必要十分条件と12の完全単調性"，信学論(C)，53-C，8，P.507
(7) 相原，赤木："三値三変数しきい値関数の数について"，信学論(C)，52-C，9，P.571
(8) 相原，高松，矢野："多値可変しきい値論理"，信学論(C)，53-C，11，p.863
(9) W.S. Meisel: "Nets of Variable-threshold threshold Elements", IEEE Trans., C-17, 7, P667
(10) 相原，高松："多値論理関数のしきい素子による二段実現"，電算機研資 EC-70-23 (1970-09)