数理解析研究所講究録
第 142 巻 1972 年 1-15

Liapunov 関数による概周期解の存在について

東北大、理　中島文雄

§1 まえがき

概周期系における概周期解の存在のための一つの命題が Amerio. L によって示された。そこでこの命題を成立させるための十分条件として、ある種の global stablility [2]，あるいは Liapunov 関数 [3] の存在等が仮定されてきた。以下において Liapunov 関数の立場からの結果を述べるがそれは [3] の対応する定理を含むものである。他方 Amerio の命題によらない概周期解の存在定理 [4] (定理3.1.1) も知られているがそれは我々の結果の Corollary となることも示す。

§2 記号と定義

R^n を n 次元 Euclidean space とし $R^1 = R$，かつ $x \in R^n$ に対して $\|x\|$ でその Euclidean norm を表す。A と B が topological space のとき $C(A; B)$ で A から B への連続関数の全体を表す。

$F(t, x) \in C(R \times U; R^n)$ (U; R^n の open set) を $x \in R$ に一様な，

tの概周期関数とすれば数列$\{t_k\}$と$G(t,x)\in C(R\times U;R^n)$が存在して

$$\lim_{k\to\infty} F(t+t_k,x) = G(t,x) \quad \text{uniformly on } R\times S_0$$

for each compact subset S_0 of U,

が成立する。このような$G(t,x)$を$F(t,x)$のhullの元と呼び，$G(t,x)$の全体を$H(F)$で表す。$V(t,x)\in C(R\times U;R)$が

$V(t,x)\in \overline{C}_0(X)$であるとは、任意のcompact subset S_0 of Uに対して定数$L=L(S_0)$が取れて、

$$|V(t,x)-V(t,y)| \leqq L\|x-y\| \quad \text{for } t\in R,\ x\in S_0,\ y\in S_0$$

が成立することである。

§3 概周期解の存在

次の系を考える。

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = F(t,x)$$

ここで$F(t,x)\in C(R\times U;R^n)$ (U; R^nのopen set)は$x\in U$に対して一様なtの概周期関数である。

更に$G(t,x)\in H(F)$に対して次の系を考える。

$$(2)\quad \frac{dx}{dt} = G(t, x)$$

このとき次の事が知られている。

命題．S_0をUのcompact subsetとする。もし各$G(t,x) \in H(F)$に対して(2)がすべての$t \in R$でS_0に留まる解を唯一つ持つならば、このとき(1)は概周期解を持ちそのmoduleは$F(t,x)$のmoduleに含まれる。

この命題によって次の事が成立するがその証明は§4で述べる。

定理、次の事を仮定する。(1)の解$\varphi(t)$で，

$$\varphi(t) \in S_0 \ (S_0 : U \text{の compact subset}) \quad \text{for } t \geq 0$$

なるものが存在して更に次の関数$V(t,x) \in C([0,\infty) \times U : R)$が存在する。

条件(i)　$V(t, \varphi(t))$は$[0,\infty)$で有界である．

条件(ii)　$V(t, x) \in \mathcal{C}_0(X)$　、

条件(iii)　$\dot{V}_{(1)}(t, x) \geq a(\|x - \varphi(t)\|)$　.

ここで $a(r)$ は連続な正定値関数で，

$$\dot{V}_{(1)}(t,x) = \overline{\lim_{h\to+0}} \frac{1}{h}\{V(t+h, x+hF(t,x)) - V(t,x)\}$$

である。

このとき，(1)は U において唯一つの概周期解を持ちその module は $F(t,x)$ の module に含まれる。

上の定理に対応する[3]の定理においては Fink と Seifert は実質的に次の条件を余分に仮定している。

$\varphi(t)$ と $V(t,x)$ が，各々 R と $R\times U$ で定義されていて

(3) $V(t,\varphi(t)) \equiv 0$ on R,

(4) $V(t,x)$ is continuous in t uniformly for (t,x) $\in R\times K$ (K : any compact subset of U).

我々の定理では，上の(3)は条件(i)に緩められ更に(4)は仮定する必要がないのである。一般に我々の定理を応用するためには与えられた解 $\varphi(t)$ の形を知る必要がある。しかし時として有界な解の存在のみが知られている場合がある。その場合には次の corollary が有効である。そしてそれは[4]の

定理3.1.1を含むものでもある。

Corollary. 次の事を仮定する。系(1)は $t \geq 0$ で U の compact subset に留まる解を持ち、更に次の関数 $V(t,x,y) \in C([0,\infty)\times U \times U; R)$ が存在する。

(i) $V(t,x,x)$ は $(t,x)\in[0,\infty)\times U$ で有界である.

(ii) $V(t,x,y)\in \overline{C_0}(x,y)$ 、

(iii) $\dot{V}(t,x,y) \geq a(\|x-y\|)$

ここで $a(r)$ は定理と同じもので、

$$\dot{V}(t,x,y) = \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\{V(t+h,x+hF(t,x),y+hF(t,y))-V(t,x,y)\}$$

、

このとき、(1)は U において唯一つの概周期解を持ち、その module は $F(t,x)$ の module に含まれる。

証明は、有界な解を $\varphi(t)$ として、$V(t,x,\varphi(t))$ を定理の $V(t,x)$ と置けばよい。

§4、定理の証明.

以下、任意に $G(t,x)\in H(F$ を固定して(2)を考えてゆく。$F(t,x)$ の概周期性より $G(t,x)\in H(F)$ に対して

数列 $\{t_k\}$ が取れて

$$t_k \to +\infty \qquad \text{as } k \to \infty$$

かつ

$$F(t+t_k, x) \to G(t, x) \quad \text{uniformly on } R \times K$$

for each compact subset K of U as $k \to \infty$

となる。

今、(1)の与えられた有界な解 $\varphi(t)$ に対して $\{\varphi(t+t_k)\}$ を考えると、上の事から(2)に対して次の解 $\psi(t)$ が存在すると仮定してよい。

(5) $\varphi(t+t_k) \to \psi(t)$ uniformly on any compact set in R as $k \to \infty$, and

$$\psi(t) \in S_0 \quad \text{on } R \quad .$$

さて(1)の概周期解の存在のためには命題より(2)の解 $\chi(t)$ で、$\chi(t) \in S_0$ on R ならば

$$\chi(t) \equiv \psi(t) \quad \text{on } R$$

を示せばよい。

そこで(5)の数列$\{t_k\}$を用いて

$$v_k(t) = V(t+t_k, x(t)) \quad \text{for } t \geqq -t_k$$

と置く。

$$D^+ v_k(t) = \overline{\lim_{h \to +0}} \frac{1}{h}\{V(t+t_k+h, x(t+h)) - V(t+t_k, x(t))\}$$

と置くと，$V(t,x) \in \overline{C}_0(X)$ より

$$D^+ v_k(t) \geqq \dot{V}_{(1)}(t+t_k, x(t)) - A_k(t)$$

となる。ただし

$$A_k(t) = L\|G(t, x(t)) - F(t+t_k, x(t))\| \quad \text{で},$$

$L = L(S_0)$ は compact set S_0 に依存する定数である。
更に，$\{t_k\}$の取り方から

$$(6) \qquad \lim_{k \to \infty} A_k(t) = 0 \quad \text{uniformly on } R$$

となる。条件(iii)より

$$D^+ v_k(t) \geqq a(\|x(t) - \varphi(t+t_k)\|) - A_k(t)$$

となる。今，任意に$[s_1, s_2] \subset R$ $(s_1 < s_2)$を固定してkを十分大にして$s_1 + t_k \geqq 0$ ならば上式は$[s_1, s_2]$で定義される。

そこで上式を$[s_1, s_2]$で積分すると、

$$(7)\quad v_k(s_2) - v_k(s_1) \geqq \int_{s_1}^{s_2} a(\|x(s) - \varphi(s+t_k)\|)\,ds - \int_{s_1}^{s_2} A_k(s)\,ds \text{。}$$

条件(i),(ii)より、$B>0$ が存在して、

$$|v_k(s_2) - v_k(s_1)| = |V(s_2+t_k, x(s_2)) - V(s_1+t_k, x(s_1))| < B$$

for all k 。従って(7)は、

$$B \geqq \int_{s_1}^{s_2} a(\|x(s) - \varphi(s+t_k)\|)\,ds - \int_{s_1}^{s_2} A_k(s)\,ds \text{。}$$

ここで $k \to \infty$ にすると(6)より

$$B \geqq \int_{s_1}^{s_2} a(\|x(s) - \psi(s)\|)\,ds \text{。}$$

このとき、s_1, s_2 は任意に取れるから

$$B \geqq \int_{-\infty}^{\infty} a(\|x(s) - \psi(s)\|)\,ds \text{。}$$

従って数列$\{\tau_l^1\}$,$\{\tau_l^2\}$が存在して $l \to \infty$ のとき

$$\tau_\ell^1 \to -\infty, \text{ and } a(\|x(\tau_\ell^1)-\psi(\tau_\ell^1)\|) \to 0,$$

$$\tau_\ell^2 \to +\infty, \text{ and } a(\|x(\tau_\ell^2)-\psi(\tau_\ell^2)\|) \to 0。$$

今，$a(r)$は正定値連続関数で，$\{x(\tau_\ell^i)-\psi(\tau_\ell^i)\}_\ell$ $(i=1,2)$
は有界であるから

$$(8)\quad \|x(\tau_\ell^i)-\psi(\tau_\ell^i)\| \to 0 \quad \text{for } i=1,2 \quad \text{as } \ell \to \infty.$$

再び(7)において $s_2=\tau_\ell^2$，$s_1=\tau_\ell^1$ とおき，kを十分大にして $\tau_\ell^1+t_k \geqq 0$ で考えると

$$v_k(\tau_\ell^2)-v_k(\tau_\ell^1) \geqq \int_{\tau_\ell^1}^{\tau_\ell^2} a(\|x(s)-\varphi(s+t_k)\|)ds - \int_{\tau_\ell^1}^{\tau_\ell^2} A_k(s)ds$$

両辺から

$$w(\ell\text{-}k) \overset{\text{def}}{=} V(\tau_\ell^2+t_k, \varphi(\tau_\ell^2+t_k)) - V(\tau_\ell^1+t_k, \varphi(\tau_\ell^1+t_k))$$

を引くと

$$(9)\quad L\left\{\|x(\tau_\ell^2)-\varphi(\tau_\ell^2+t_k)\| + \|x(\tau_\ell^1)-\varphi(\tau_\ell^1+t_k)\|\right\}$$

$$\geqq \int_{\tau_\ell^1}^{\tau_\ell^2} a(\|x(s)-\varphi(s+t_k)\|)ds - \int_{\tau_\ell^1}^{\tau_\ell^2} A_k(s)ds - w(\ell\text{-}k)$$

となる。

今、$\|x(\tau_\ell^i)-\varphi(\tau_\ell^i+t_k)\| \leqq \|x(\tau_\ell^i)-\varphi(\tau_\ell^i)\|+\|\varphi(\tau_\ell^i)-\varphi(\tau_\ell^i+t_k)\|$ for $i=1,2$

である。又 (8) より任意の $\varepsilon>0$ に対して $N(\varepsilon)>0$ が存在して

$$\|x(\tau_\ell^i)-\varphi(\tau_\ell^i)\|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{for } i=1,2 \quad \text{if } \ell \geqq N(\varepsilon).$$

この事から ℓ を固定しておいて $k\to\infty$ にすると (9) は

$$(10) \qquad \varepsilon L \geqq \int_{\tau_\ell^1}^{\tau_\ell^2} a(\|x(s)-\varphi(s)\|)\,ds - \overline{\lim_{k\to\infty}}\, w(\ell, k)$$

for each $\ell \geqq N(\varepsilon)$.

ここで

$$D^+V(t,\varphi(t)) = \overline{\lim_{h\to+0}}\frac{1}{h}\{V(t+h,\varphi(t+h))-V(t,\varphi(t))\}$$
$$\geqq a(0)=0$$

であるから $V(t,\varphi(t))$ は t の単調増加関数であり、更に条件(i) を考えると結局、

$v_0\in R$ が存在して、$\displaystyle\lim_{t\to\infty} V(t,\varphi(t)) = v_0$

となる。

これより

$$\lim_{k\to\infty} w(l.k) = \lim_{k\to\infty}\left(V(\tau_l^2+t_k,\varphi(\tau_l^2+t_k)) - V(\tau_l^1+t_k,\varphi(\tau_l^1+t_k))\right)$$

$$= v_0 - v_0 = 0 \quad .$$

従って (10) は

$$\varepsilon L \geqq \int_{\tau_l^1}^{\tau_l^2} a(\|x(s)-\psi(s)\|)\,ds$$

となる。ここで l は任意に大きくしてよいから $l\to\infty$ にすると

$$\varepsilon L \geqq \int_{-\infty}^{\infty} a(\|x(s)-\psi(s)\|)\,ds$$

ここで $\varepsilon>0$ は任意に取れるから

$$a(\|x(s)-\psi(s)\|) = 0 \qquad \text{on } R \ .$$

従って

$$x(s) \equiv \psi(s) \qquad \text{on } R \ 。$$

以上より (2) において S_0 に留まる解は $\psi(s)$ のみであり命題が成立して (1) は目的の概周期解を持つことが示された。

次に (1) において U に留まる概周期解は唯一つしかないことを示す。

$F(t,x) \in H(F)$ であるから (2) において特に

$$G(t,x) = F(t,x)$$

なる場合を考えると，(5) で得られた解 $\varphi(t)$ は (1) の概周期解であることが判る。

今、(1) に他に概周期解 $p(t)$ があって

$$p(t) \in U \quad \text{on } R$$

で，ある $t_0 \in R$ に対して

$$\| p(t_0) - \varphi(t_0) \| = \varepsilon_0 > 0$$

と仮定する。すると $p(t_0) \in U$ より次の open set O が存在する

$$p(t_0) \in O \subset \bar{O} \subset U \quad (\bar{O} : O \text{ の closure}).$$

$p(t)$ の概周期性より数列 $\{\tau_\ell\}$ が存在して

$$\tau_\ell \to \infty \qquad \text{as } \ell \to \infty$$

かつ $p(\tau_\ell) \in O$ for $\ell = 1, 2, \cdots$ となる。

P9 の $v_k(t)$ に対応して新たに

$$v_k(t) = V(t+t_k, p(t))$$ とおくと，

(7) に対応して次式が成立する

$$(11)\quad v_k(\tau_\ell) - v_k(t_0) \geqq \int_{t_0}^{\tau_\ell} a(\|p(t) - \varphi(t+t_k)\|)\,dt - \int_{t_0}^{\tau_\ell} A_k^\ell(t)\,dt$$

ここで

$$A_k^\ell(t) = L(K_\ell)\|F(t+t_k, p(t)) - G(t, p(t))\|$$

ただし K_ℓ は U の compact subset で

$$p(t) \in K_\ell \quad \text{for} \quad t \in [t_0, \tau_\ell]$$

となるものである。従って

$$\lim_{k\to\infty} A_k^\ell(t) = 0 \quad \text{uniformly on } [t_0, \tau_\ell]$$ 。

又， $p(\tau_\ell) \in \overline{O}$ と条件(i),(ii)より定数 $B' > 0$ が取れて

$$|v_k(\tau_\ell) - v_k(t_0)| < B' \quad \text{for } \ell = 1, 2, \cdots$$

となる。これらの事より (11) において $k\to\infty$ にすると

$$\int_{t_0}^{\tau_\ell} a(\|p(t) - \varphi(t)\|)\,dt \leqq B' < \infty$$ 。

ここで $l \to \infty$ にすると

$$(12) \quad \int_{t_0}^{\infty} a(\|p(t) - \psi(t)\|)\,dt \leqq B' < \infty \quad 。$$

$p(t) - \psi(t)$ も概周期関数だからある数列 $\{s_l\}$ が存在して

$$\|(p(t_0) - \psi(t_0)) - (p(s_l) - \psi(s_l))\| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{for all } l$$

and

$$s_l + 2 < s_{l+1} \quad \text{for } l = 1, 2, \cdots \quad .$$

従って $s_l \to \infty$ as $l \to \infty$ 、

又 $p(t) - \psi(t)$ の一様連続性から $\delta > 0$ $(\delta < 1)$ が取れて

$$\|(p(s_l) - \psi(s_l)) - (p(t) - \psi(t))\| < \frac{\varepsilon_0}{3} \quad \text{for } t \in (s_l - \delta, s_l + \delta) \quad 。$$

今，$\|p(t_0) - \psi(t_0)\| = \varepsilon_0$ であるから

$$\frac{1}{3}\varepsilon_0 < \|p(t) - \psi(t)\| < \frac{5}{3}\varepsilon_0 \quad \text{on } (s_l - \delta, s_l + \delta)$$

for $l = 1, 2, \cdots$ 。

$$\min_{\frac{\varepsilon_0}{3} \leq r \leq \frac{5}{3}\varepsilon_0} a(r) = a_0 \ (> 0) \quad \text{とおく。}$$

すると $\{(s_l - \delta, s_l + \delta)\}_l$ は互に重らないから (12) より

$$\infty > B' \geqq \sum_{l=1}^{\infty} \int_{s_l-\delta}^{s_l+\delta} a(\|p(t)-\psi(t)\|)dt \geqq \sum_{l=1}^{\infty} 2\delta \times a_0 = \infty$$

これは矛盾である。従って

$$p(t) \equiv \psi(t) \quad \text{on } R$$

これで(1)においてUに留まる概周期解の唯一性が示された。証明は終る。

References

[1] Amerio, L., Soluzioni quasi-periodiche, o limitati di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati. Ann. Math. Pura Appl., 39(1955), 97-119.

[2] Seifert, G., Stability conditions for the existence of almost-periodic solutions of almost-periodic systems. J. Math. Analysis and Appl., 10(2)(1965), 409-418.

[3] Fink, A.M. and Seifert, G., Liapunov functions and almost periodic solutions for almost periodic systems. J. Differential Equations, 5(1969), 307-313.

[4] Yoshizawa, T., Stability theory by Liapunov's second method Math. Soc., Japan, (1965).