数理解析研究所講究録
第 142 巻 1972 年 16-20

On contingent equations

神大 理　菊池 紀夫

$F(t, x)$ は $I(=[t_0, t_1]) \times R^m$ で定義され，値と R^m の Compact set にとる集合値関数であるものとし，つぎの関係

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$

を contingent equation とよぶ。Hukuhara に始まり，Marchaud, Zaremba の研究がある。これは，微分不等式を拡張したものであるが，また，制御関数 $u(t)$ を含む制御方程式系

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \in R^m,$$
$$u(t) \in U \subset R^r$$

をつぎのよう

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)),$$
$$F(t, x) \equiv f(t, x, U)$$

に考えることにより，自然にあらわれてくるものである。

「Contingent equation の解」の存在について，まず，考えてみる。ここで，解とは，「I で絶対連続，I のほとんどいたる所で Contingent equation をみたす関数」のことである。

常微分方程式の解の存在証明における Cauchy の折れ線 $x_n(t)$ は

$$\dot{x}_n(t) = f(t, x_n(t)) + \varepsilon_n(t)$$

をみたす。ただし，折れ線 $x_n(t)$ は，「その区間最大巾が $n \to \infty$ のとき 0 に近づく」分割 D_n に応じて作られたものであり，$\varepsilon_n(t) \in R^m$ は

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n(t) = 0 \qquad \text{uniformly on } I$$

なるものである。ここで，「$f(t,x)$ の有界性」を仮定するならば，$\{\dot{x}_n(t)\}$ は有界となり，たとえば，Cauchy 問題を考えるとすれば，$\{x_n(t)\}$ は正規族となる。その一様収束の極限関数を $x(t)$ とすると，「$f(t,x)$ の x に関する連続性」があるならば，右辺は $n \to \infty$ のとき $f(t, x(t))$ に一様収束する。したがって，$\{\dot{x}_n(t)\}$ も一様収束し，微分作用素が閉であることに注意すれば，

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t))$$

となり，すなわち，解の構成が得られる。

さて，Contingent equation においても，常微分方程式

の場合と同じように,「$F(t,x)$ に適当な滑らかさ(Hausdorff の距離に関して)」があるならば

$$\dot{x}_n(t) \in F(t, x_n(t)) + \varepsilon_n(t)$$

なる Cauchy の折れ線列 $\{x_n(t)\}$ を作ることができる。「$F(t,x)$ の有界性」と仮定するならば,$\{x_n(t)\}$ は正規族となり,その極限関数を $x(t)$ であらわす。「$F(t,x)$ の x に関する連続性」があるならば,右辺は $F(t,x(t))$ に収束する。しかし,「$\{\dot{x}_n(t)\}$ の挙動」は,一般には,わからない。特に,「$F(t,x)$ の値が R^m の Convex set」であると仮定するならば,その「convexity」と「$\{\dot{x}_n(t)\}$ の有界性により得られる弱収束性(たとえば,関数空間 $L^1(I)$ における)」とを組み合せることにより,$n \to \infty$ としたとき

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t))$$

となり,解を構成することができる。さらに,常微分方程式における性質と同じように,「解の族の Compact 性」,「Kneser の性質」,「Hukuhara 現象」がなりたつ。また,「Hukuhara 現象」をもつ解 $x(t)$ については

$$\dot{x}(t) \in \partial F(t, x(t))$$

のなりたつことがわかる。

つぎに,「$F(t,x)$ の convexity」を仮定しない場合を

考える。Wazewski は解の概念を拡張し，その「一般化された解」の存在を示した。すなわち，I で連続な関数 $x(t)$ にたいし，

$$\lim_{n\to\infty} \dot{x}_n(t) = x(t) \quad \text{uniformly on } I,$$
$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{dist}(\dot{x}_n(t), F(t, x_n(t))) = 0 \quad \text{a.e. } I$$

なる I で絶対連続な関数列 $\{x_n(t)\}$ が存在するとき，$x(t)$ を「一般化された解」であるとし，$F(t,x)$ の適当な滑らかさのもとに，その解の存在することを示し，解の間の関係を調べている。また，Filippov は「$F(t,x)$ の (t,x) に関する Lipschitz 条件」を仮定して一階連続微分可能な解の存在を示している。なお，「$F(t,x)$ の (t,x) に関する絶対連続」の仮定のもとで，一階連続微分可能な解の存在は言える。

I で定義された集合値関数 $F(t)$ が

$$f(t) \in F(t) \qquad \text{a.e. } I$$

なる可積分関数 $f(t)$ をもつものと仮定する。このとき，

$$\int_{t_0}^{t} F(t)\,dt = \left\{ \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt ;\ f(t) \in F(t) \text{ a.e. } I,\ f(t) \text{: integrable on } I \right\}$$

で，$F(t)$ の積分を定義する。この積分の定義は，Aumann により，はじめて，きちんとあたえられたようである。この積分を用いて

$$x(t) \in x(t_0) + \int_{t_0}^{t} F(t, x(t))\,dt$$

をみたす I で絶対連続な関数 $x(t)$ を「一般化された解」と定義しよう。この解は「Wazewski の一般化された解」と一致し，さらに，「$\mathrm{co}F(t,x)$ ($F(t,x)$ の convex hull) に対応する contingent equation」の解とも一致することが確かめられる。したがって，「一般化された解の族」には「$F(t,x)$ の convexity」を仮定した場合に得られる解の性質があることになる。ただし，最後の性質は

$$\dot{x}(t) \in \partial\, \mathrm{co}F(t, x(t)) \quad \text{a.e. } I$$

となる。この性質は，ある $\eta(t) \in R^m$ が存在して

$$\dot{x}(t)\cdot\eta(t) = \sup F(t, x(t))\cdot\eta(t) \quad \text{a.e. } I$$

となり，特に

$$F(t,x) \equiv f(t, x, U)$$

となる制御方程式系の場合を考えると，$x(t)$ に対応する制御関数を $u(t)$ とするとき

$$f(t, x(t), u(t))\cdot\eta(t) = \sup_{u\in U} f(t, x(t), u)\cdot\eta(t) \quad \text{a.e. } I$$

すなわち，「Pontryagin の最大原理」を指している。