数理解析研究所講究録
第142巻 1972年 21-28

双曲型偏微分方程式系の絶対安定問題について

東北大 理数　内藤敏機

二独立変数の偏微分方程式系

$$(1)\quad \begin{cases} u_t = Cu - Au_x + b\xi \\ \xi_t = f(\sigma) \\ \sigma = \nu' u - \mu' u_x - r\xi \end{cases}$$

を考える。但し，$b, u, \mu, \nu \in R^n$，n次元実vector，$r, \xi \in R$
A, C は $n\times n$ 実定数行列，ν', μ' はそれぞれ ν, μ の転置vectorとする。Aの固有値は実数で，対角化可能とする。
$f(\sigma)$は$\sigma \in R$に対して定義されたC^2級の関数で，$\sigma \neq 0$ ならば，$\sigma f(\sigma) > 0$ とする。導関数もこめて有界なC^k級の関数 $g(x) = (g^1(x), \cdots, g^m(x))$ に対して，ノルム$\|\cdot\|_k$を，

$$\|g(\cdot)\|_k = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in R} \max_{i=1}^{m} \left| \frac{\partial^j}{\partial x^j} g^i(x) \right|$$

によって定義する。

半線形双曲型方程式系

$$(2)\quad w_t = \mathbb{C}w - \mathbb{A}w_x + h(w)$$

に関する下記の定理1は Jeffrey と Kato [3] による。系(2) において，$w \in R^m$，$\mathbb{A}$, $\mathbb{C}$ は $m \times m$ 実定数行列で，$\mathbb{A}$ の固有値はすべて実数で，対角化可能であるとする。$h(w)$ は，$|w| \equiv \max_{i=1}^{m} |w^i| < \Omega$ で定義された C^2 級の関数で，$h(0)=0$, $h_w(0)=0$ とする。

定理1. 系(2)に対して，上記の条件を仮定する。初期関数，$\overline{w}(x)$，$x \in R$，は C^2 級で，$\|\overline{w}(\cdot)\|_2 < \infty$ とする。

この時，正数Tが存在して，

(3) $\quad w(0, x) = \overline{w}(x)$

を満たす系(2)の解 $w(t, x)$ が，$R_T \equiv [0, T] \times R$ で存在する。$w(t, x)$ は C^2 級で，$t \in [0, T]$ に対して，$\|w(t, \cdot)\|_2 < \infty$ である。T は $\|\overline{w}(\cdot)\|_0$ にだけ関係して定まる。

系(2)の 0-解の安定性については，同じく Jeffrey と Kato [3] による次の定理2が知られている。一般の偏微分方程式の安定問題については Zubov [6] を参照されたい。さて，$\|w(\cdot)\|_1 < \infty$ である関数 $w(x)$ と，$\rho > 0$, $y \in R$ に対して，Liapunov 汎関数 $V_{\rho, y}$ を，

(4) $\quad V_{\rho, y} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\langle w, \mathbb{B}w \rangle + \langle w_x, \mathbb{B}w_x \rangle] e^{-\rho|x-y|} dx$

によって定義する。但し，$\mathbb{B}$ は正定値 $m \times m$ 行列で，$\langle \cdot, \cdot \rangle$

は内積を表わす。

(5) $V_\rho = \sup_{y \in R} V_{\rho, y}$

とおくと，$\rho \le 1$，$\|w\|_1 < \infty$，$w \in C^2(X)$ に対して，不等式

(6) $\|w(\cdot)\|_0{}^2 \le K V_\rho$

が成立する（[3]）。但し，K は w に関係しない定数である。

定義（[3]）．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$V_\rho(\overline{w}(\cdot)) < \delta$ ならば初期値問題 (2), (3) の解 $w(t, x)$ が $t \ge 0$ で存在して，$t \ge 0$ において $V_\rho(w(t, \cdot)) < \varepsilon$ が成立する時，系 (2) の 0 - 解は ρ - 安定であるという。0 - 解が ρ - 安定で，さらにある $\gamma > 0$ が存在して，$V_\rho(\overline{w}(\cdot)) < \gamma$ ならば，$\lim_{t \to \infty} V_\rho(w(t, \cdot)) = 0$ が成立する時 ρ - 漸近安定であるという。

定理 2．正定値行列 $\mathbb{B}$，$\mathbb{D}$ で，条件

(7) $\begin{cases} \mathbb{B}\,\mathbb{C} + \mathbb{C}'\mathbb{B} = -\mathbb{D} \\ \mathbb{B}\,\mathbb{A} - \mathbb{A}'\mathbb{B} = 0 \end{cases}$

を満足するものが存在すれば，系 (2) の 0 - 解は ρ - 漸近安定である。

注意 1．定理 2 の証明では，不等式 (6) を使うので，

初期関数$\varpi(x)$はC^2級とする。このとき(1),(3)の解$w(t,x)$は$[0,\infty)\times R$でC^2級である。V_ρに対して明らかな不等式，$V_\rho \le {}^{\exists}M(\rho)\|w(\cdot)\|_1$が成立するので，定理2により，$\|\varpi(\cdot)\|_1$が小さければ，$t\to\infty$の時，$\|w(t,\cdot)\|_0 \longrightarrow 0$である。

さて，我々は系(1)の絶対安定問題を考える。絶対安定問題については，[2]，[4]を参照されたい。

変数変換

$$(8)\quad L:\begin{cases} v = Cu - Au_x + b\xi \\ \sigma = \nu' u - \mu' u_x - r\xi \end{cases}$$

によって，系(1)は

$$(9)\quad \begin{cases} v_t = Cv - Av_x + bf(\sigma) \\ \sigma_t = \nu' v - \mu' v_x - rf(\sigma) \end{cases}$$

に変換される。関数$u: R \longrightarrow R^n$，$u\in C^p$，$\|u(\cdot)\|_p<\infty$と，関数$\xi: R\longrightarrow R$，$\xi\in C^q$，$\|\xi(\cdot)\|_q<\infty$の対(u,ξ)の全体が作る関数空間を$X_{p,q}$で表わす。$(u,\xi)\in X_{p,q}$のノルムを$\|(u,\xi)\|_{p,q}\equiv\|u\|_p+\|\xi\|_q$で定義する。系(1)（又は系(9)）の，$R_T$で定義され，各$t\in[0,T]$において，$X_{p,q}$に属する解の全体を$X_{p,q}(1)$（又は$X_{p,q}(9)$）と表わす。次の命題3，4は容易である。

命題3.　$A^{-1}C$の固有値の実部はすべて0でないとする。しからば，$|\lambda|$が十分大きければ，変換Lは$X_{p+1,p}$から$X_{p,p}$の上への1対1，連続な線形変換である。(p：正整数)

命題4.　命題3と同じ仮定の下に，$|\lambda|$が十分大きければ，任意の$T>0$と任意の整数$p\geq 1$に対して，変換Lは$X_{p+1,p}$(1)から$X_{p,p}$(9)の上への1対1，両連続な線形変換である。

この命題4によって，系(1)を考える事と，系(9)を考える事とは，ある程度，同等である。系(1)は(u, ξ)の方程式として，半線形(semi-linear)でも，準線形(quasi-linear)でもない。しかし，系(9)は(v, α)の方程式として，半線形である。系(9)については議論がしやすい。次の定理5．6は系(9)について述べたものである。証明は[5]を参照されたい。定理5．6では$\mu=0$と仮定した。したがって，この場合には，系(1)は(u, ξ)の半線形方程式となり，変換Lは，不必要に見えるかも知れないが，そうではない。定理5．6の条件は，系(9)に変換されて，はじめて導かれる。

定理5.　系(9)において，$\mu=0$とする。正定

値な行列B，Dが存在して，

$$(10)\quad \begin{cases} BC + C'B = -D \\ BA - A'B = 0 \end{cases}$$

を満足するとする。

そうすれば，ある $r_0 > 0$ と $\rho_0 > 0$ とが存在して，次の事が成立する。$f(\alpha)$ が条件；

(i) $f(\alpha)$ は C^2級である，

(ii) $f(\alpha)$ の $\alpha = 0$ における微係数 $f'(0)$ は正である，

をみたせば，また $r > r_0$ であればどんな数でも，系(9)の0－解は ρ－漸近安定である（$\rho < \rho_0$）。

定理6．　μ，B，D に対して，定理5と同じ条件を仮定する。$f(\alpha)$ は $\alpha \in R$ で定義された C^2級の関数で，ある $f_1 > 0$，$f_2 > 0$ に対して，$f_1 \le f'(\alpha) \le f^2$ がすべての $\alpha \in R$ に対して成立するとする。

そうすれば，r が十分大きく，ρ が十分小さければ，系(9)の0－解は，大域的に ρ－漸近安定である。即ち，$V_\rho((\bar{v},\bar{\alpha}))$ がどんな大きさでも，$t \to \infty$ のとき，$V_\rho((v(t,\cdot),\alpha(t,\cdot))) \to 0$ である。

注意1で見たように，定理5から $\bar{v}, \bar{\alpha} \in C^2$ で $\|(\bar{v},\bar{\alpha})\|_{1,1}$

が十分小さければ, $V(t,x), \sigma(t,x) \in C^2$ で, $\|V(t,\cdot), \sigma(t,\cdot)\|_{0,0} \longrightarrow 0$ as $t \longrightarrow \infty$ である。従って，系(1)では, $\bar{u} \in C^3, \bar{\xi} \in C^2$ で, $\|(\bar{u}, \bar{\xi})\|_{2,1}$ が十分小さければ, $u(t,x) \in C^3, \sigma(t,x) \in C^2$ で, $t \longrightarrow \infty$ のとき $\|u(t,\cdot), \sigma(t,\cdot)\|_{1,0} \longrightarrow 0$ である。また定理6の条件の下では, $\bar{u} \in C^3, \bar{\xi} \in C^2, \|(\bar{u}, \bar{\xi})\|_{2,1} < \infty$ ならば, $u(t,x) \in C^3, \xi(t,x) \in C^2$ で, $\|(u(t,\cdot), \sigma(t,\cdot))\|_{1,0} \longrightarrow 0$ as $t \longrightarrow \infty$ である.

定理5で，仮定 $f'(0) > 0$ を $f'(0) \geq 0$ に弱くできるか，また定理6で，仮定 $f_1 > 0$ を $f_1 \geq 0$ に弱くできるかどうかは解らない。問題は，できれば，仮定 $\sigma f(\sigma) > 0, \sigma \neq 0$ の下で解きたい。この種の制御問題では $f(\sigma)$ も可測関数の枠内で考える事が重要である。

参　考　文　献

[1] K.O. Friedrichs, Nonlinear hyperbolic differential equations for functions of two independent variables, Amer. J. Math., 70 (1948), 555-589.

[2] M.A. Aizerman and F.R. Gantmacher, "Absolute Stability of Regulator Systems", Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdam, 1964.

[3] A. Jeffrey and Y. Kato, Liapunov's direct method in

stability problems for semilinear and quasilinear hyperbolic systems, J. of Math. and Mechanics, 18 (1969) 659~682.

[4] 内藤, 偏微分方程式系におけるLyapunovの方法について, 京大数理研講究録 117, 8-15.

[5] T. Naito, On the absolute stability of a class of hyperbolic systems, Proceedings of Japan United States seminor on ordinary differential and functional equations, Springer, (To appear).

[6] V. I. Zubov, "Methods of A.M. Lyapunov and their application", P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1964.