数理解析研究所講究録
第143巻 1972年 1-14

inner function についての二，三の話題

奈良高専　貴志 一男

§1. 序

Fisher (1) は disk algebra A の単位球は finite Blaschke product (= A の inner function) の凸閉包である事を示し，更に inner function (またはその商) による近似についていろいろ研究している (2)，(3)。Rudin (4) は Fisher (1) の結果を generalized analytic function に拡張した。§2 ではこれらの事柄について述べる。

§3 では abstract Hardy space $H^\infty(dm)$ の inner function の商によって $L^\infty(dm)$ の関数を近似する事について Douglas - Rudin (5) の結果など述べる。

§4 では inner function を使って，$H^\infty(dm)$ の complex homomorphism m を含む Gleason part $\wp$ ($\neq \{m\}$) の特徴づけ，part metric のある性質，$\wp$ の (Gelfand topology による) 閉包 $\wp^-$ の性質，ideal $I = \{f \in H^\infty(dm)\ f|\wp \equiv 0\}$ に

関係した二，三の性質を調べることにする．

§2. finite Blaschke product の凸閉包

複素平面上の開単位円板を D，単位円周を T とする．A を disk algebra，すなわち A は $\bar{D}$ 上で連続で D で解析的な関数全体を T に制限した function algebra である．

$$A = \left\{ f \in C(T)\ ;\ \hat{f}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} f(e^{i\theta})\, d\theta = 0,\ n = -1, -2, \cdots \right\}$$

ともなる．$A \ni \Phi$，$|\Phi| = 1$ ならば Φ を A の inner function という．A の inner function は finite Blaschke product で

$$\Phi(z) = \lambda \prod_{i=1}^{N} \frac{z - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i z}\ ,\quad |\lambda| = 1,\quad \alpha_i \in D$$

なる形の式である．

定理 (Fisher [1])．disk algebra A の単位球 $\{f \in A\ ;\ \|f\| \le 1\}$ は A の inner function 全体の (supremum norm の位相での) 凸閉包に一致する．

証明　$\forall f \in \{f \in A\ ;\ \|f\| \le 1\}$ に対して $f_t(z) = f(tz)$，$0 < t \le 1$，$z \in \bar{D}$ とする．$f \in C(\bar{D})$ より $t \to 1$ のとき $\bar{D}$ で f_t は f に一様収束する．ゆえに，

(i)　$\forall \varepsilon > 0$，$\exists t < 1$，$\|f - f_t\| < \varepsilon/2$

また，Caratheodory の定理により inner function の列 $\{\Phi_n\}$ が存在して Φ_n は f に(Dで)広義一様収束する．

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t < 1$, $\exists \Phi$ (inner of A) such that $\| f_t - \Phi_t \| < \varepsilon/2$

(1) (2) より

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists t < 1$, $\exists \Phi$ such that $\| f - \Phi_t \| < \varepsilon$.

そこで $\Phi_t = \lambda \prod_{i=1}^{N} \frac{tz - \alpha_i}{1 - \bar{\alpha}_i t z}$ 自身は A の inner function の convex combination である事を示せばよい．

$\alpha = re^{i\theta}$, $0 \leq t \leq 1$ とすると，

$$\frac{tz-\alpha}{1-\bar{\alpha}tz} = \frac{t(1-r^2)}{1-t^2r^2}\left\{\frac{z-\alpha t}{1-\bar{\alpha}tz}\right\} + \frac{r(1-t^2)}{1-r^2t^2}(-e^{i\theta}) + \frac{(1-t)(1-r)}{1-rt}\{0\}$$

$=$ inner function の convex combination

従って，Φ_t は inner function の convex combination である．

Q.E.D

G を compact abelian group，Γ を G の dual group，Σ を Γ における semigroup

$$C_\Sigma = \{ f \in C(G) ; \hat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x, \gamma)\,dx = 0 \quad \text{for} \quad \gamma \notin \Sigma \}$$

とする．

定理 (W. Rudin (4))．C_Σ の単位球は C_Σ の inner function の全体の凸閉包である．

Fisher (3) は更に次のような事を証明した.

定理. K を単位円 T の compact subset, (disk algebra) A $\ni f$, $\|f\| \leq 1$ とする.

(i) K のある近傍で $|f| = 1$ ならば, K 上で f は A のある inner function によって一様近似される.

(ii) K の Lebesgue measure は 0 であるとする. K 上で $|f| = 1$ ならば K 上で f は A の inner function によって一様近似される.

定理. A の inner function の商は $\{f \in C(T);\ |f| = 1\}$ の中で norm-dense である.

§3. inner function の商による近似

§3 §4 では A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra とし, A の maximal ideal (= complex homomorphism) space $\mathcal{M}(A)$ の各要素の表現測度は unique であるとする.

$m \in \mathcal{M}(A)$ の表現測度も m で表わす事にし, A の $L^p(dm)$ closure を $H^p(dm) = H^p$ ($p = \infty$ のときは weak-star closure) と書く. $H^1(dm) \cap L^\infty(dm) = H^\infty(dm)$ である. $H^\infty(dm)$ の Gelfand 表現 $\hat{H}^\infty$ を Silov boundary $\hat{X} = \mathcal{M}(L^\infty(dm))$ 上に制限すると logmodular algebra になる. すなわち $L^\infty_R = \log|(H^\infty)^{-1}|$ または $C_R(\hat{X}) = \log|(\hat{H}^\infty)^{-1}|$ となる.

$f \in H^\infty(dm)$, $|f|=1$ a.e.-dm なる関数を $H^\infty(dm)$ の inner function という．$H^\infty(dm)$ の inner function の全体を $\mathcal{U}$ で表わす．

次の事柄は同値である．

1) $m \in X$ $(\subset \mathcal{M}(A))$

2) $H^\infty(dm) = L^\infty(dm)$

3) $m \in \mathcal{M}(L^\infty(dm))$

4) すべての inner function は定数である．

$m \in \mathcal{M}(A) - X$ とすると定数でない inner function が存在する．Douglas - Rudin (5) によって次のような結果が得られている．（Douglas - Rudin はもう少し一般の場合に証明している）

1) $G = \{f/g \,;\, f, g \in \mathcal{U}\}$ は $L^\infty(dm)$ の絶対値が 1 のすべての関数の中で norm-dense である．

2) $Q = \{f/g \,;\, f \in \mathrm{span}\,\mathcal{U},\ g \in \mathcal{U}\}$ は $L^\infty(dm)$ の中で norm-dense である．すなわち inner function によって生成される self-adjoint な algebra は $L^\infty(dm)$ の中で norm-dense

である。

3) ∂H^∞ (H^∞ の Šilov boundary) $= \mathcal{M}(L^\infty(dm))$
$= \{\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(f)| = 1 \text{ for all } f \in \mathcal{U}\}$

4) $\hat{\mathcal{U}}$ は ∂H^∞ を分離する。

これらの結果を classical Hardy space に応用して、
$f \in L^\infty(d\theta)$, $|f| = 1$, $0 < {}^\forall\varepsilon < 1$ とするとき

1°) $\|f - B_1/B_2\| < \varepsilon$ となる Blaschke product B_1, B_2 が存在する。

2°) $\|f - g_1/g_2\| < \varepsilon$ となる $H^\infty(d\theta)$ の inner function g_1 と singular function g_2 が存在する。

3°) $\varphi \in \mathcal{M}(H^\infty(d\theta))$ とする

$\varphi \in \mathcal{M}(L^\infty(d\theta)) \Leftrightarrow |\varphi(f)| = 1$ for all singular function f.

$d\theta$ は単位円周上の Haar measure である。

Fisher (3) は §2 の Rudin の定理から次の結果を導いた。
A を compact Hausdorff space X 上の uniform algebra とする。A に属する inner function は X の点を分離するとき、A の inner function の閉凸包は $C(X)$ の単位閉球である。
これから

5) $\{\bar{f}/g \cdot f, g \in \mathcal{U}\}$ の弱閉包は $\{f \in L^\infty;\ \|f\| \le 1\}$ である。

§4. Gleason part と inner function

$\mathcal{M}(A) \ni m, \varphi$ について

$G(m, \varphi) = \sup\{|m(f) - \varphi(f)|;\ f \in A,\ \|f\| \le 1\}$

$\sigma(m, \varphi) = \sup\{|\varphi(f)|;\ f \in A,\ m(f) = 0,\ \|f\| \le 1\}$

と定義する。

$G(m, \varphi) < 2 \iff \sigma(m, \varphi) < 1$

である。$G(\varphi_1, \varphi_2) < 2 \iff \varphi_1 \sim \varphi_2$ で $\sim$ を定義すると、$\sim$ は同値関係を満足する。$P(m) = \{\varphi \in \mathcal{M}(A);\ \varphi \sim m\}$ を m を含む $\mathcal{M}(A)$ の Gleason part という。$m \in \mathcal{M}(H^\infty(dm))$ を含む $\mathcal{M}(H^\infty(dm))$ の Gleason part を $\mathcal{P}(m)$ で表わす。

Wermer の定理. $P(m) \supsetneqq \{m\}$ とするとある inner function Z (Wermer の embedding function という) が存在して

1) $ZH^2(dm) = H_m^2$, $H_m^2 = \{f \in H^2(dm);\ \int f\,dm = 0\}$

2) $\hat{Z}$ は $P(m)$ (または $\mathcal{P}(m)$) から D 上への一対一写像で、その逆写像 $\hat{Z}^{-1} = \tau$ は連続である。

3) $f \in H^\infty$ のとき、$\varphi \in P(m)$ (または $\mathcal{P}(m)$) に対して

$\varphi(f) = \hat{f}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$, $\lambda = \hat{Z}(\varphi)$, $a_n = \int \bar{Z}^n f\,dm$.

注) $\wp(m)$ と D とは homeomorphic である．

(I) $P(m) \supsetneqq \{m\} \iff \wp(m) \supsetneqq \{m\}$.

(II) inner function による $\wp(m)\ (\supsetneqq \{m\})$ の特徴づけ

$P(m) \supsetneqq \{m\} \iff ZH^2 = H^2_m$ となる inner function Z が存在する

証明 ($\Leftarrow$) $m \in \mathcal{M}(A) - X$, $P(m) = \{m\}$, $ZH^2 = H^2_m$ とすると，$\wp(m) = \{m\}$ で $ZH^\infty = H^\infty_m$ となる．φ を $\mathcal{M}(H^\infty(dm)) - \{m\}$ の任意の要素とすると，$\sigma(\varphi, m) = 1$．

(*)
$$\begin{aligned}\sigma(\varphi, m) &= \sup\{|\varphi(f)|\ ;\ f \in H^\infty_m,\ \|f\| \leq 1\}\\ &= \sup\{|\varphi(Zg)|\ ;\ g \in H^\infty,\ \|g\| \leq 1\}\\ &= |\varphi(Z)| \sup\{|\varphi(g)|,\ g \in H^\infty\ \|g\| \leq 1\}\\ &= |\varphi(Z)|\end{aligned}$$

$\therefore\ |\hat{Z}(\varphi)| = 1$ for $\forall \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty(dm)) - \{m\}$.

$\hat{Z}(m) = 0$ であるから m は $\mathcal{M}(H^\infty(dm))$ の open-closed point である．$\therefore\ m \in \mathcal{M}(L^\infty(dm))$ (Šilov idempotent theorem) $\therefore\ m \in X$，矛盾　$m \in X$ ならば明らかに $ZH^2 = H^2_m$ となる inner function は存在しない　Q.E.D.

$\wp(m) \supsetneqq \{m\}$ とする．(*)式から

$$\varphi \in \mathcal{P} \iff \sigma(m, \varphi) < 1 \iff |\varphi(Z)| < 1$$

$$\therefore \mathcal{P} = \{\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(Z)| < 1\}$$

更に

$$\mathcal{P} = \{\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(h)| < 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} - \{1\}\}$$

$$= \{\varphi ;\ \varphi \in \mathcal{M}(H^\infty),\ |\varphi(h)| < 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} \text{ such that } m(h) = 0\}.$$

となる．

III) part metric について

A_0 を disk algebra とすると，$\lambda_0, \lambda \in D$ に対して schwarz の不等式から

$$\sup\{|f(\lambda)| ;\ f(\lambda_0) = 0,\ \|f\| \leq 1,\ f \in A_0\} = \left|\frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \bar{\lambda}_0 \lambda}\right| = \sigma(\lambda_0, \lambda)$$

$\mathcal{P}(m) \supsetneqq \{m\}$ のとき Wermer の定理から $\mathcal{P} = \{\tau(\lambda) ;\ \lambda \in D\}$.

(*)式から

$$\sigma(\tau(\lambda), \tau(0)) = |\tau(\lambda)(Z)| = |\lambda| = \sigma(\lambda, 0)$$

$$\therefore \sigma(\tau(\lambda), \tau(0)) = \sigma(\lambda, 0)$$

この関係式は

$$\frac{Z - \lambda}{1 - \bar{\lambda} Z} H^\infty = H^\infty_\varphi \quad (\varphi = \tau(\lambda) \in \mathcal{P})$$

$$= \{f \in H^\infty(dm) ;\ \varphi(f) = 0\}$$

を使って

$$\sigma(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = \sigma(\lambda_0, \lambda) = \left|\frac{\lambda - \lambda_0}{1 - \bar{\lambda}_0 \lambda}\right|$$

と一般化出来る．

更に $\mathfrak{P}(m)$ に属する $\tau(\lambda)$ を $\widetilde{\tau(\lambda)}$ と書き，$P(m)$ に属する $\tau(\lambda)$ はそのままの記号 $\tau(\lambda)$ と書くとき，

$$\sigma(\varphi, \theta) = \sup\{\, |\theta(f)| \ ; \ f \in A_\varphi, \ \int |f|^2 d\theta < 1 \}$$

(A. Browder. Introduction to function algebras. p. 174)

を使って

$$\sigma(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = \sigma(\widetilde{\tau(\lambda_0)}, \widetilde{\tau(\lambda)}) = \sigma(\lambda_0, \lambda) .$$

また H. König の等式

$$\log \frac{1+\sigma(\varphi,\theta)}{1-\sigma(\varphi,\theta)} = 2 \log \frac{2+\sigma(\varphi,\theta)}{2-\sigma(\varphi,\theta)}$$

を使って

$$G(\tau(\lambda_0), \tau(\lambda)) = G(\widetilde{\tau(\lambda_0)}, \widetilde{\tau(\lambda)}) = G(\lambda_0, \lambda)$$

となる，

IV) $\mathfrak{S}$ について．

Wermer embedding function Z についての多項式の weak-star topology $(=\sigma(L^\infty, L^1))$ による閉包を $\mathcal{H}^\infty(m)$，Z と $\bar{Z}$ についての多項式の weak-star topology による閉包を $\mathcal{L}^\infty(m)$ とする．このとき次の関係式が成り立つ (8).

$$H^\infty = \mathcal{H}^\infty \oplus I^\infty, \quad I^\infty = \{ f \in H^\infty ; \int \bar{Z}^n f \, dm = 0, \ n = 0, 1, 2, \cdots \}$$

$$L^\infty = \mathcal{L}^\infty \oplus N^\infty, \quad N^\infty = \{ f \in L^\infty ; \int Z^n f \, dm = 0, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \}$$

($\oplus$ は algebraic direct sum を表わす)

次の事柄は同値である.

1) $f \in I^{\infty}$

2) $\bar{z}^n f \in I^{\infty}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

3) $\hat{f}(\varphi) = 0$ on $\mathcal{S}$

$h(I^{\infty})$ = hull of $I^{\infty} = \{\varphi \in M(H^{\infty}) ;\ \varphi(h) = 0$ for all $h \in I^{\infty}\}$

とおくと, 3) から $\bar{\mathcal{S}} \subseteq h(I^{\infty})$, 更に

$$\bar{\mathcal{S}} = h(I^{\infty}) = M(\mathcal{H}^{\infty}) = M(H^{\infty}/I^{\infty})$$

が成り立つ. (証略)

$\mathcal{H}^{\infty}$ と $\bar{z}$ とによって生成される algebra を $L^{\infty}(dm)$ の norm で閉じた $L^{\infty}(dm)$ の subalgebra を $\mathcal{H}^{\infty}(\bar{z})$ で表わすと, $\mathcal{S}$ の topological boundary $\partial\mathcal{S}$ は

$$\partial\mathcal{S} = M(\mathcal{H}^{\infty}(\bar{z})) \qquad (\text{cf. } (6))$$

となる. また $\mathcal{H}^{\infty}$ の Šilov boundary $\partial\mathcal{H}^{\infty}$ は

$$\partial\mathcal{H}^{\infty} = M(\mathcal{L}^{\infty}) = \{\varphi \in M(\mathcal{H}^{\infty}) ;\ |\varphi(h)| = 1 \text{ for all } h \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^{\infty}\}$$

となる. また $\mathcal{L}^{\infty}$ の関数の実数部分からなる集合を $\mathcal{L}^{\infty}_R$ とすると

$$\mathcal{L}_R^\infty = \log|(\mathcal{H}^\infty)^{-1}|$$

となり $\mathcal{H}^\infty$ を $M(\mathcal{L}^\infty)$ に制限したものは logmodular algebra になる。

次に $M(H^\infty) - h(I^\infty)$ $(h(I^\infty) = \mathfrak{F})$ について調べてみる。
$M(I^\infty)$ (= I^∞ の maximal ideal space) $\ni {}^\forall\varphi$ に対して $\varphi(h)=1$ となる $h \in I^\infty$ が存在する。

$$\psi(f) = \varphi(fh), \quad f \in H^\infty(dm)$$

とおくと $\psi \in M(H^\infty) - h(I^\infty)$ で対応

$$\psi \longrightarrow \psi|I^\infty = \varphi$$

で $M(H^\infty) - h(I^\infty)$ と $M(I^\infty)$ とは homeomorphic になる。
(cf. Gamelin; Uniform algebra, p.12)
更に $\mathcal{L}^\infty \cdot I^\infty = I^\infty$ なる事を使って $\psi|\mathcal{H}^\infty \in M(\mathcal{L}^\infty)$ となることが解る

$$\because \ |\psi(h)| = 1 \quad \text{for} \quad {}^\forall h \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty.$$

$\psi(h) = \alpha$ とおくと

$$\int_{\hat{X}} |h-\alpha|^2 d\psi = 0 \quad (d\psi \text{ は } \psi \text{ の表現測度})$$

で $h \in C(\hat{X})$ であるから

$$h = \alpha \quad \text{on} \quad \operatorname{supp}\psi$$

§3 の Douglas-Rudin の結果から ${}^\forall\varepsilon>0$ ${}^\forall f \in \mathcal{L}^\infty$ に対して

$\exists h_1 \in sp(\mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty)$, $\exists h_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{H}^\infty$ して

$$\| f - h_1/h_2 \| < \varepsilon/2 .$$

(こゝで, $Z \to e^{i\theta}$ の対応によって $\mathcal{H}^\infty$ と classical Hardy space $H^\infty(d\theta)$, $\mathcal{L}^\infty$ と $L^\infty(d\theta)$ とは isometrically isomorphic である事を使う. (8))

$$\therefore \int_{\hat{X}} |f - \tau(f)| \, d\tau \le \int_{\hat{X}} \left| f - \frac{h_1}{h_2} \right| d\tau + \int_{\hat{X}} \left| \frac{h_1}{h_2} - \tau(f) \right| d\tau < \varepsilon$$

$f \in C(\hat{X})$ であるから

$$f = \tau(f) \quad \text{on } \operatorname{supp} \tau$$

従って, $\tau \in \mathcal{M}(H^\infty) - h(I^\infty)$ の $\operatorname{supp} \tau$ $(\subset \hat{X})$ 上では任意の $f \in \mathcal{L}^\infty$ に対して

$$f = \tau(f) \quad (= \text{const.})$$

となる.

参考文献

(1) S. Fisher, The convex hull of the finite Blaschke products, Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 1128 – 1129.

(2) ――――, Another theorem on convex combination of unimodular function, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 1037 — 1039.

(3) ――――, Approximation by unimodular functions,

Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 795 — 797.

(4) W. Rudin, Convex combinations of unimodular functions, Bull. Amer. Math. Soc., 75 (1969), 795 — 797.

(5) R. G. Douglas & W. Rudin, Approximation by inner functions, Pacif. J. Math., 31 (1969), 313 — 320.

(6) R. G. Douglas, Toeplitz and Wiener Hopf operators in $H^\infty + C$. Bull. Amer. Math. Soc., 74 (1968), 895 — 899.

(7) H. König, On the Gleason and Harnack metric for uniform algebra, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 22 (1969), 100 — 101.

(8) S. Merrill & N. Lal. Characterization of certain invariant subspaces of H^p and L^p spaces derived from logmodular algebras, Pacif. J. Math., 30 (1969), 463 — 474.

(9) 和田淳蔵, 大庭幸雄, Function algebra と Hardy class における extreme point. 数理解析講究録 79 (1969).