数理解析研究所講究録
第 143 巻 1972 年 55-69

Fatou の定理とその近傍

東北大 理　山下 慎二

はじめに.

単位開円板 $D: |z|<1$ で有界且つ正則な函数は D の境界すなわち単位円周 $\Gamma: |z|=1$ 上 Lebesgue のいみでほとんど至るところで半径に沿って(有限な)極限値をもつという Fatou の定理は有名な 1906 年の Acta Math. の論文に与えられております[6]。この定理はその後,集積値集合論の研究に一つの方向を与えました。すなわち D のように大きな境界をもった領域での有理型函数の境界挙動の研究はたとえば整函数のように境界が一点(すなわち無限遠点 ∞)しかない領域での境界挙動の研究とは方法においても考え方においてもかなりの相異をもつことになりました。

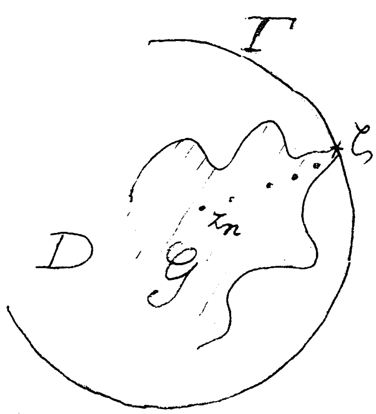
本講では全く個人的興味(＝狭い視野)でありますが, Fatou の定理と関連する分野について少しく勉強した事をまとめてみます。なお,今回の機会を与えて下さった先輩のみ

なさん，特に荷見守助先生に篤く感謝いたします。

I. Fatou's theorem.

§1. Cluster sets.

D, Γ は上記のとおりとし，Ω は extended complex w-plane $|w| \leqq \infty$ と identify された Riemann sphere とする。$w = f(z)$ を D で定義された Ω 内に値域をもつ函数（これを簡単に $f : D \to \Omega$ と書く）とし $\zeta \in \Gamma$ 且つ $\mathcal{G}$ は D の subset で $\exists \{z_n\} \subset \mathcal{G} \ni z_n \to \zeta$ as $n \to \infty$ とする。$\ni$ は such that の略．f の ζ に於ける $\mathcal{G}$ に関する cluster set $C_{\mathcal{G}}(f, \zeta)$ とは Ω の subset であって次により定義されるものをいう。すなわち



$C_{\mathcal{G}}(f, \zeta) \ni \alpha \iff \exists \{z_n\} \subset \mathcal{G} \ni$ $z_n \to \zeta$ and $f(z_n) \to \alpha$ as $n \to \infty$.

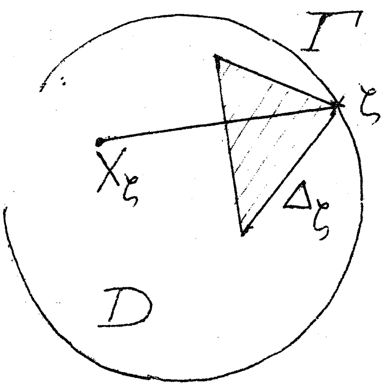
以下の話題になるのは次の三種類の $\mathcal{G}$ だけである。

(a) $\mathcal{G} = D$．このとき $C_D(f, \zeta)$ は簡単に $C(f, \zeta)$ とかく。

(b) $\mathcal{G}$ が角領域 $\Delta \equiv \Delta_\zeta$ すなわち三つの頂点が ζ および D 内の二点から成る三角形で囲まれた Jordan

領域.

(c) $\mathcal{G}$ が ζ に終る線分 $X \equiv X_\zeta$, 但し, X の二端点のうち ζ は X の元とは考えない. $X \subset D$.



次に Γ の subset M が residual on Γ であるとは 差集合 $\Gamma - M$ が Baire のいみで第一類 (of first category) であるときをいい, a.e. (almost everywhere) の略) on Γ であるとは $\Gamma - M$ の linear Lebesgue measure が零であるときをいう.

§2. Collingwood's sets $J(f)$ and $K(f)$.

$f : D \to \Omega$ に対して Γ の subsets $J(f)$ および $K(f)$ を次の様に定義する. $K(f) = \{\zeta \in \Gamma ; \exists S(\zeta)$ a subset of Ω depending on $\zeta \ni C_\Delta(f, \zeta) = S(\zeta) \ \forall \Delta\}$. $J(f) = \{\zeta \in K(f) ; S(\zeta) = C(f, \zeta)\}$. 明らかに $J(f) \subset K(f)$.

f に何らの制限なしに成立する次の二定理は有名である. (定理の証明はかなり面倒である.)

Theorem C_1 (Collingwood [3, p. 80, Theorem 4.10]).

任意の，D から Ω への写像 f に対して $J(f)$ は residual on Γ.

THEOREM C_2D (Collingwood, Dolzhenko [5, Theorem 1]). 任意の，D から Ω への写像 f に対して $K(f)$ は residual and a.e. on Γ.

Remark. f をさらに一般化して"集合写像"としても両定理は成立する.（準備中. cf. [12]).

§3. Plessner's theorem.

1927 年に Plessner の与えた Fatou の定理の拡張は cluster sets の用語を使えば次の様に表わされる.

$f: D \to \Omega$ に対して Γ の subsets $F(f)$, $F^*(f)$, $F_\infty(f)$ および $I(f)$ を次のように定義する. $F(f) = \{\zeta \in K(f);\ S(\zeta)$ is a one-point set $\{f(\zeta)\}\}$, $F^*(f) = \{\zeta \in F(f);\ f(\zeta) \neq \infty\}$, $F_\infty(f) = \{\zeta \in F(f);\ f(\zeta) = \infty\} \equiv F(f) - F^*(f)$, $I(f) = \{\zeta \in K(f); S(\zeta) = \Omega\}$. $F(f)$ の点は Fatou point, $f(\zeta)$ は Fatou limit, $I(f)$ の点は Plessner point とよばれる. Fatou point ζ では $\bigcup_\Delta C_\Delta(f, \zeta) = \{f(\zeta)\}$ であり Plessner point ζ では $\bigcap_\Delta C_\Delta(f, \zeta) = \Omega$ である. 明らかに,

$$\begin{array}{ccc} J(f) & \subset & K(f) \\ \cup & & \cup \\ I(f) & & F(f) \end{array}, \qquad I(f) \cap F(f) = \emptyset \text{ (空)}$$

従って $I(f) \cup F^*(f) \subset I(f) \cup F(f) \subset K(f)$.

THEOREM P (Plessner [9]). f が D で meromorphic であれば $F_\infty(f)$ は of Lebesgue measure zero で，和集合 $I(f) \cup F^*(f)$ は a.e. on Γ.

系として，

THEOREM F (Fatou [6]). f が D で bounded 且つ holomorphic であれば $F^*(f)$ は a.e. on Γ.

しかし Theorem P の証明には Theorem F を仮定する。すなわち，

(1) $\Gamma - I(f)$ で localization をして，

(2) rectifiable boundary をもった Jordan domain で bounded 且つ holomorphic な函数に帰着させ，

(3) Riesz-Riesz theorem と Theorem F とを組み合せる。

次の § に与えられる定理の証明の pattern はこれとよく似ている。

§ 4. Meier's topological analogue of Plessner's theorem.

まず $f: D \to \Omega$ に対して $M(f) = \{\zeta \in \Gamma\,;\, C_X(f, \zeta) = C(f, \zeta) \neq \Omega \ \forall X\}$ とし，$M(f)$ の点を Meier point

とよぶ．簡単にわかるように $M(f)\cup I(f)\subset J(f)$.

Theorem MP (Meier [7]). <u>f が D 内 meromorphic であれば</u> $M(f)\cup I(f)$ <u>は residual on</u> Γ.

実際には $M(f)\cup I(f)=J(f)$ を示すことが出来，これと Theorem C_1 より Theorem MP を得る．この等号は Meier 自身も気づいていないようであるし，見掛けないので f が quasi-conformal function であるときの証明を与えておく．$\exists\ \xi\in J(f)-\{M(f)\cup I(f)\}$ を仮定すれば，$\xi\notin I(f)$ より $\exists\,\Delta \ni C_\Delta(f,\xi)\neq\Omega$．よって $\xi\in J(f)$ より $C_\Delta(f,\xi)=C(f,\xi)\neq\Omega$．従って f は ξ の近傍で bounded と仮定してよい．次に $\xi\notin M(f)$ より $\exists\, X\ni C_X(f,\xi)\neq C(f,\xi)$. Schwarz's lemma を使って $\exists\,\hat{\Delta}\ni\hat{\Delta}\cap X\neq\emptyset$ and $C_{\hat{\Delta}}(f,\xi)\neq C(f,\xi)$．これは $\xi\in J(f)$ に矛盾．

Theorem MP の系として

Theorem MF (Meier [7]). <u>f が D 内 bounded 且つ holomorphic ならば</u> $M(f)$ <u>は residual on</u> Γ.

§5. <u>Extensions.</u>

Fatou の定理には函数の解析性が強く効いているが，その topological analogue である Theorem MF（従って Theorem

MP)においては f の強い解析性は必要でない。

いま，D の他に n 次元 Euclid 空間 R^n での単位開球 D^n を考え，D または D^n において一価または多価な函数を考え，$F(f)$, $I(f)$, $M(f)$, etc. を適当に定義すれば次の表が出来る[14]。

<table>
<tr><td>U</td><td colspan="4">D</td><td>$D^n_{(n\geqq3)}$</td></tr>
<tr><td>V</td><td colspan="3">Ω</td><td colspan="2">$R^1\cup\{+\infty,-\infty\}$</td></tr>
<tr><td>f</td><td>meromorphic function</td><td>quasi-conformal function</td><td>algebroid function</td><td colspan="2">real-harmonic function</td></tr>
<tr><td>F</td><td>○</td><td>×</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td></tr>
<tr><td>P</td><td>○</td><td>×</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td></tr>
<tr><td>MF</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td></tr>
<tr><td>MP</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td><td>○</td></tr>
</table>

表のよみ方。f は U から V への"写像"。F, P, MF, MP はそれぞれ Theorems F, P, MF, MP の analogues。○は成立，×は不成立。D^n $(n\geqq4)$ での成立は D^3 での証明と本質的な変りはない。algebroid function は多価であり証明は少しこみ入って来る[13]。尚，polydisc での多変数 meromorphic function についても成立するが証明は簡単である。このとき境界は distinguished boundary を取る。

§6. $M(f)$ および $I(f)$ の Γ 上の分布.

meromorphic function f の $M(f)$ および $I(f)$ の Γ 上の topological な分布の状況は Meier の定理によりわかるが, metrical な分布については次の結果がある. D で holomorphic な函数 $f_1(z)$ および $f_2(z)$ があって $I(f_1)$ および $M(f_2)$ は Γ 上 residual かつ対数測度零であるような例が知られている[15]. つまり, $I(f_1)$ $(M(f_2))$ は topological には密であるが, metrical には疎である.

II. Beurling-type theorems.

D 内 meromorphic な函数 f に強い条件を付け加えると, $F(f)$ の Γ 上の分布は密になることは当然予想されることである. 例えば, $w=f(z)$ による D の Riemannian image の Ω 上で測った spherical area が有限であるならば $\Gamma-F(f)$ は外(対数)容量零となることが Beurling [2] によって示された. これと関連する定理を次に述べる.

§7. Sufficient conditions for the set $\Gamma-F(f)$ to be of zero outer logarithmic capacity.

まず $W_1\equiv\Omega=\{w; |w|\leqq\infty\}$, $W_2=\{w; |w|<\infty\}$ および $W_3=\{w; |w|<1\}$ とする. $w=f_j(z)$ は D で

meromorphic で $f_j(D) \subset W_j$ とし，$F_j(f_j)=\{\zeta \in F(f_j);$ $f_j(\zeta) \in W_j\}$ とする（$j=1,2,3$）．次に，

$$\delta_1(f_1(z)) = \frac{|f_1'(z)|}{1+|f_1(z)|^2},$$

$$\delta_2(f_2(z)) = |f_2'(z)|,$$

$$\delta_3(f_3(z)) = \frac{|f_3'(z)|}{1-|f_3(z)|^2}$$

とおく．

THEOREM j ($j=1,2,3$). $w=f_j(z)$ は D 内 meromorphic で $f_j(D) \subset W_j$ とし且つ

$$\iint_D \{\delta_j(f_j(z))\}^2 dxdy < \infty \quad (z=x+iy)$$

を満すものとする．このとき Γ の部分集合 E_j で外容量が零であるものが存在し，

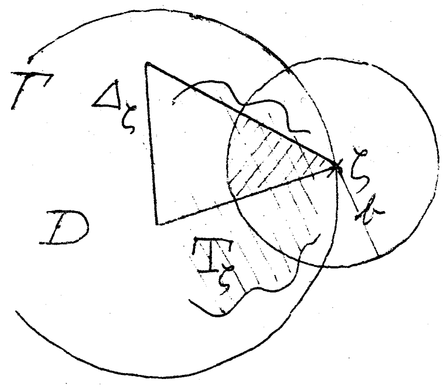
$$\int_{X_\zeta} \delta_j(f_j(z))\,|dz| < \infty$$

がすべての $\zeta \in \Gamma - E_j$ とすべての ζ に終る線分 X_ζ に対して成立する．さらに $\Gamma - F_j(f_j) \subset E_j$ が示せる．

Theorems 1, 2 は Tsuji [11] による. Tsuji は E_1, E_2 が内容量零であることを示している. Theorem 3 は [16] 参照. Theorem 3 の応用を述べる. W_3 に含まれる Jordan domain G の非ユークリッド面積が有限であれば G の境界 ∂G は余り W_3 の境界 $|w|=1$ に触れないであろう. 事実, $w=\Phi(z)$ を D から G への one-to-one onto conformal map とすると $\Phi(\zeta)\in W_3\cap\partial G$ が Γ 上の外容量零の集合 E_3 を除いて成立する.

III. Fatou points, Riemannian area and Riemannian length.

§8. A modification of Piranian-Rudin's theorem.



$\zeta\in\Gamma$ とする. D の subdomain T_ζ が tangential domain at ζ であるとは $\forall\Delta_\zeta, \exists\delta>0 \ni$ $\Delta_\zeta\cap\{z;|z-\zeta|<\delta\}\subset T_\zeta$ であるときを云い, tangential domain A_ζ at ζ が admissible であるとは, さらに A_ζ が convex Jordan domain であるときをいう. tangential domains T^1_ζ, T^2_ζ が与えられたとき(同じものでもよい), admissible な A_ζ を見い出

して $A_\xi \subset \mathrm{I}_\xi^1 \cap \mathrm{I}_\xi^2$ ならしめうる。従って Piranian-Rudin の結果[8, Theorem 5] およびその証明，また Fatou point の定義に戻れば，次に述べる定理4は簡単に得られる。まず f が D で meromorphic とするとき Γ の部分集合 $G(f)$ は次の様に定義される。すなわち $G(f) \ni \xi$ $\Longleftrightarrow \exists A_\xi$ admissible tangential domain at $\xi \ni$

(1) $f(z)$ has no pole in A_ξ,

(2) $\iint_{A_\xi} |f(z)|^2 dxdy < \infty \quad (z = x+iy)$,

and

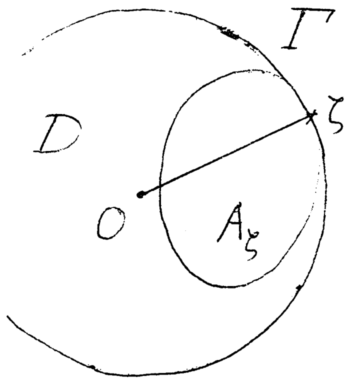
(3) $\lim_{A_\xi \ni z \to \xi} f(z)$ exists and is finite.

(3)により，$G(f) \subset F^*(f)$ がわかる。よって Theorem P の精密化として次を得る。

THEOREM 4. f がD でmeromorphicであれば，和集合 $I(f) \cup G(f)$ は a.e. on Γ である。

Remark. 高次元 R^n $(n \geqq 3)$ の場合にはどういう解釈が出来るか，また上の(2)に相当するものは何かについては [17] を参照。R^n $(n \geqq 3)$ では Riemann の写像定理に当るものが存在しないので Piranian-Rudin の使った Plessner 式の論法 (cf. §3, (1), (2), (3)) はそのままでは apply 出来ない。

§9. Rudin の反例.



Theorem 2, Theorem 4, $\zeta \in G(f)$ の条件(2) および $G(f) \subset F^*(f)$ をみると, f が D で meromorphic ならばほとんどすべての点 $\zeta \in F^*(f)$ で, $\exists r(\zeta)$, $0 < r(\zeta) < 1$ で $\int_{r(\zeta)}^1 |f'(r\zeta)|dr < +\infty$ ではないかと予想される. しかしこれは真ではないことは次の Rudin の例によりあきらかである. $\int_0^1 |B'(r\zeta)|dr = +\infty$ がほとんどすべての $\zeta \in \Gamma$ に対して成立するような Blaschke product $B(z)$ が存在する[10].

IV. その他の話題.

cluster set $C_{\mathcal{G}}(f, \zeta)$ において $\mathcal{G}$ として horocycle あるいは horocyclic angle を取れば, いわゆる horocyclic boundary property の研究となる. この研究ははじめ Bagemihl [1] によって為された. Meier's theorems の horocyclic versions は真であるが, Fatou の定理の horocyclic version は一般には成立しない. Littlewood の古典的な定理がある. 従って $I(f)$, $F(f)$, $M(f)$, etc. の horocyclic versions $I_\omega(f)$, $F_\omega(f)$, $M_\omega(f)$, etc$_\omega$. の相互

の関係を調べることがその後為されている.

Riemann 面 R に"理想境界" Δ を付して, $R \cup \Delta$ を $D \cup \Gamma$ の如くみなして, R での正則函数あるいは写像についてその"理想的境界挙動"を調べることはかなり以前から行われている[4]. そしてそれは種々の理想境界を生み出した.

REFERENCES

1. F. BAGEMIHL: Horocyclic boundary properties of meromorphic functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I, 385 (1966), 1-18.
2. A. BEURLING: Ensembles exceptionnels. Acta Math. 72 (1940), 1-13.
3. E.F. COLLINGWOOD and A.J. LOHWATER: "The Theory of Cluster Sets". Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966.
4. C. CONSTANTINESCU und A. CORNEA: "Ideale Ränder Riemannscher Flächen". Springer-Verlag, Berlin etc., 1963.
5. E.P. DOLZHENKO: Boundary properties of arbitrary functions. Izv. Akad. Nauk SSSR, ser. mat.

31 (1967), 3-14, in Russian.

6. P. FATOU : Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Math. 30 (1906), 335-400.

7. K. MEIER : Über die Randwerte der meromorphen Funktionen. Math. Ann. 142 (1961), 328-344.

8. G. PIRANIAN and W. RUDIN : Lusin's theorem on areas of conformal maps. Michigan Math. J. 3 (1955-6), 191-199.

9. A. PLESSNER : Über das Verhalten analytischer Funktionen am Rande ihres Definitionsbereiches. J. Reine Angew. Math. 158 (1927), 219-227.

10. W. RUDIN : The radial variation of analytic functions. Duke Math. J. 22 (1955), 235-242.

11. M. TSUJI : Beurling's theorem on exceptional sets. Tôhoku Math. J. 2 (1950), 113-125.

12. S. YAMASHITA : Some theorems on cluster sets of set-mappings. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 30-32.

13. ———— : Cluster sets of algebroid functions. Tôhoku Math. J. 22 (1970), 273-289.

14. ———— : On Fatou- and Plessner-type theorems. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 494-495.

15. ——————: Some existence theorems in cluster set theory. Proc. Japan Acad. 46 (1970), 1107–1109.

16. ——————: Function-theoretic metrics and boundary behaviour of function meromorphic or holomorphic in the unit disk. Nagoya Math. J. Vol. 45, to be published.

17. ——————: Tangential boundary properties of functions harmonic in the unit ball or meromorphic in the unit disc. (In preparation.)