数理解析研究所講究録
第143巻 1972年 86-91

ROYDEN ALGEBRAS AND QUASIISOMETRIES OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

名大 理　中井 三留

§1. 序

m次元$(m \geq 2)$ Euclid 空間E^mの部分領域Dを考える．次の問題を論ずる："D上の調和函数論はDのいかなる幾何学的対象によって決まるか？" Dの開集合OとO上の調和函数hの組(O, h)の全体がD上の調和函数論であるが，ここではhのO上の Dirichlet 積分$D_O(h) = \int_O |\mathrm{grad}\, h(x)|^2 dx$が有限となるものに限定するいわゆる'Dirichlet 有限調和函数論'を考えることにする．答えは，大ざっぱに言って次元$m=2$なら角度であり$m \geq 3$なら距離である．次の様に考える：Dirichlet 原理を通じて，又 Virtanen 現象を通じて Dirichlet 有限調和函数論はD上有界連続 Dirichlet 有限函数の作るいわゆる Royden algebra $R(D)$で決まっていると思ってよい．そこでDのどんな幾何学的構造が$R(D)$を定めるかと言う問題を考える．2個の領域D_1, D_2をとり$R(D_1)$と$R(D_2)$がいつ代数的に同型かを

幾何学的に答えたらよい　その答が $m=2$ なら D_1 と D_2 の間のあまり角度を変えない位相同型のあること，$m \geq 3$ なら D_1 と D_2 の間のあまり距離を変えない位相同型のあること，となる.

§2.　定義と定理

以下 Riemann 多様体 M とは連結可分可符号 m 次元 $(m \geq 2)$ C^1 多様体で次の条件を満足する計量テンソル (g_{ij}) をもつものとする：局所座標 $x=(x^1,\cdots,x^m)$ の局所座標球 B における g_{ij} の局所表現 $g_{ij}(x)$ は x の Borel 可測函数で，ある有限定数 $k_B \geq 1$ があって

$$(1)\qquad k_B^{-1}\sum_{i=1}^{m}(\xi^i)^2 \leq \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x)\xi^i\xi^j \leq k_B\sum_{i=1}^{m}(\xi^i)^2$$

がすべての $x \in B$ とすべてのベクトル $(\xi^1,\cdots,\xi^m)$ について成り立ち，更にある座標球による M の被覆 $\{B\}$ ですべての B で

$$(2)\qquad 1 \leq k_B \leq \tau$$

となる有限定数 τ が存在する．$(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$, $g=det(g_{ij})$ とおく．M 上の線要素 $ds^2=\sum_{i,j=1}^{m} g_{ij}(x)dx^i dx^j$ により M の 2 点の距離 $(p,q \in M)$ は

$$(3)\qquad \rho_M(p,q)=\inf\int_\gamma ds$$

で与えられる．こゝに inf は p と q を結ぶ長さのある曲線 γ

についてとる．

座標直方体 B：$a^i < x^i < b^i$ 上の函数 f が 'absolutely continuous on lines'（ACL と略記）とは B の $x^i = a^i$ となる面を B_i と記すとき $f(\zeta + \xi e_i)$ ($e_i = (\delta^{i1}, \ldots, \delta^{im})$) が殆んどすべての $\zeta \in B_i$ ((m-1)-次元 Lebesgue measure について）をとめるごとに $\xi \in (a^i, b^i)$ の函数として絶対連続なこととする ($i = 1, \ldots, m$)．M 上の函数 f が ACL とは $f|B$ がすべての座標直方体 B について ACL なこととする．かゝる f に対しては Dirichlet 積分

$$(4)\quad \mathbb{D}_M(f) = \int_M \int \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}(x) \sqrt{g(x)}\, dx^1 \cdots dx^m$$

が定義できる．M 上有界連続 ACL 函数 f で $\mathbb{D}_M(f) < \infty$ となるものの全体を $\mathcal{R}(M)$ と記す．これは通常の函数の和積に関して algebra を作り，Royden algebra と呼ぶ．

2 個の Riemann 多様体 M_1，M_2 の間の位相同型 T を考える．$\rho_i(p, q) = \rho_{M_i}(p, q)$ として，もしある有限定数 K があって

$$(5)\quad \limsup_{r \to 0} \frac{\max_{\rho_i(p, p_0) = r} \rho_j(T_i p, T_i p_0)}{\min_{\rho_i(p, p_0) = r} \rho_j(T_i p, T_i p_0)} \le K$$

が M_i のすべての点 p_0 で成り立つならば，T は quasiconformal mapping と呼び M_1 と M_2 は同一の quasiconformal structure をもつと言う．こゝで $(i, j) = (1, 2)$ 又は $(2, 1)$，$T_1 = T$，$T_2 = T^{-1}$．

もし(5)の代りに更に強く

$$(6) \qquad K^{-1}\rho_1(p,q) \leq \rho_2(Tp,Tq) \leq K\rho_1(p,q)$$

が M_1 のすべての2点 p, q で成り立つならば T は quasiisometry と呼ばれ，M_1 と M_2 は同一の quasiisometric structure をもつと言う．

以上の定義のもとに次の結果をのべることが出来る：

定理：m 次元 Riemann 多様体 M に付ずいした Royden algebra $\mathcal{R}(M)$ の代数的構造は，M の quasiconformal structure ($m=2$) 又は M の quasiisometric structure ($m \geq 3$) によりかつそれのみにより決定される．

この定理の証明は Pacific J. Math. に近刊の筆者の二論文 (Radon-Nikodym densities and Jacobians ; Royden algebras and quasi-isometries of Riemannian manifolds) に与えられているが，こゝでは M が E^m の部分領域の場合に証明する．その場合更に $m=2$ のときは Sario と筆者の本 (Classification theory of Riemann surfaces, Springer, 1970) に詳しくのべてあるので，$m \geq 3$ に限定して話をする．更に，M_1 から M_2 への quasiisometry があれば，それが $\mathcal{R}(M_1)$ から $\mathcal{R}(M_2)$ への代数同型を induce

することもほゞ自明だから,

"E^m ($m\geq 3$) の部分領域 M_1, M_2 に対し, $\mathcal{R}(M_1)$ と $\mathcal{R}(M_2)$ の間の代数同型は M_1 から M_2 への quasiisometry を induce する"

ことのみを証明する.

§3. 証明の大要

$\mathcal{R}(M)$ の maximal ideal space ($\mathcal{R}(M)$ は norm $|||f|||_M = \|f\|_\infty + \sqrt{\mathbb{D}_M(f)}$ による norm 環となる) M^* は M の Royden 完閉化と呼ばれ M を open dense に包んでいる. $p^*\in M^*$ が $p^*\in M$ となる為の必要十分條件は $\{p^*\}$ が G_δ-set となることである. これより $\mathcal{R}(M_2)$ から $\mathcal{R}(M_1)$ への代数同型は M_1 から M_2 への位相同型 T により $f\rightarrow f\circ T$ と表される. 又これが norm 環の代数同型なことからある有限定数 $K\geq 1$ があって

$$K^{-1}|||f|||_{M_2}\leq |||f\circ T|||_{M_1}\leq K|||f|||_{M_2}$$

がすべての $f\in\mathcal{R}(M_2)$ に対して成立する. $\mathcal{R}(M)$ が2個の函数の max, min に関してベクトル束を作ることゝ, norms $\|f\|_\infty$, $\sqrt{\mathbb{D}_M(f)}$ の特殊性により (筆者: Continuity in mixed norms, Proc. Japan Acad. 45 (1969), 385-387)

(7) $$K^{-2}\mathbb{D}_{M_2}(f)\leq \mathbb{D}_{M_1}(f\circ T)\leq K^2\mathbb{D}_{M_2}(f)$$

がすべての $f \in \mathcal{R}(M_2)$，従ってすべての M_2 上 ACL で $D_{M_2}(f)<\infty$ な函数 f について成立する．この様な T は Dirichlet mapping と呼ばれる．したがって "Dirichet mapping は quasiisometry $(m \geq 3)$" を示せばよい．球環領域の harmonic modulus を利用すると T は measurable，従って Randon-Nikodym density R_T をもつことがわかる．他方 T は常に a.e. に Jacobian J_T をもつ．こゝで実函的定理が必要となる：一般に

定理：T が E^m $(m \geq 1)$ の領域 M_1 から M_2 への位相同型で measurable 且つ M_1 の殆んどいたる点で偏微分可能とする．そのとき常に

(8)
$$R_T(x) \leq |J_T(x)|$$

が殆んどすべての点 $x \in M_1$ で成立する．

これと(7)等を使って，ある定数 K_1 に対し

(9)
$$|J_T(x)|^2 \leq K_1^m\,|J_T(x)|^m$$

が M_1 の殆んどすべての点で成り立つことがわかる．$m \geq 3$ の仮定が本質的にきいてくるのはこの点であって，(9)から

$$\operatorname*{ess.inf}_{x \in M_1} |J_T(x)| > 0$$

が得られ，証明が終る．$m=2$ なら end up with nothing である．この点大変筆者には面白く思われ，技術上の $m \geq 3$ の意味はよくわかるが，真の本質が何か未だよくわからない．