数理解析研究所講究録
第 144 巻 1972 年 16-34

三次元の双有理幾何学について

京大 理　藤木明

X, Yを，2次元の複素多様体とする。$f: X \to Y$を，surjective bimeromorphic morphismとする時 fは，σ-process有限回の積に分解できる。これが，曲面の双有理幾何学の中心的事実である。この事実により，次の基本的な結果が証明される。1. 曲面の正規(孤立)特異点の解消は極小なものに限れば一意である。2. Xをコンパクトな曲面とする。$P_n = \dim H^0(X, nK)$，(KはXの標準因子)とする時，次の(い)と(3)は同値である。(い) Xと双有理型同値な曲面の中に「極小」なものが唯1つ存在する。(3) Xが，代数的で，$\forall n \geq 0$に対し$P_n = 0$が成りたつ。　上の事実の証明の方法を直接3次元に拡張するだけでは，確定的な結果は何一つ得られないことをまず示そう。そのために記号と，基本的事実を述べよう。Xを複素多様体，Aを部分多様体とする時，$N_{A/X}$は，AのX内での正規法バンドルを表す。　(1) $\sigma: X \to Y$を，点P (resp. 非特異曲線C)による3次元のmonoidal変換とし，$A = \sigma^{-1}(P)$ (resp. $\sigma^{-1}(C)$)とおく。この時 ~~非~~ Aは，

$\mathbb{P}^2$ (resp. C上の $\mathbb{P}^1$ バンドル) に同型で, $N_{A/X} \cong -H_A$ (resp. $N_{A/X}|\sigma^{-1}(Q) = -H_{\sigma^{-1}(Q)}$, $Q \in C$) が成りたつ。ここで, $H_A, H_{\sigma^{-1}(Q)}$ は, hyperplane bundle を表わす。
(2)逆に上のような, $\overbrace{A \subset X}^{\text{正規バンドル条件をみたす}}$ が存在すれば, X と A は, 1 のような変換で,ある Y から得られる。(3) (1) で $C \cong \mathbb{P}^1$ としよう。$N_{C/Y} \cong mH_C \oplus nH_C$ $m \geq n$ とすると, $A \cong \Sigma_{m-n}$。Σ_k は, degree k の Hirzebruch surface.
(4). (3)で, $N_{A/X} \cong [-C^\infty + mf]_A$。ここで, C^∞, f は各々 A の ∞-section とファイバー。
<u>lemma1</u> $A \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ かつ $N_{A/X} \cong [-D_A]$, (ここで D は A の diagonal)

$\Longleftrightarrow$ $N_{C/Y} \cong (-H_C) \oplus (-H_C)$ //. これは, ~~(2)~~ (3) (4) を組み合わせればよい。この時, (2)により, $\tau : X \to Z$ で, $\tau|X-A$ は, 同型かつ $\tau|A$ は, A の, もう一方のファイバリングに ~~沿って~~ 一致するものが存在する。$T = \tau \cdot \sigma^{-1} : Y \to Z$, $Z = T(Y)$ と記す。以下証明は全部略証.
<u>lemma2</u> Xをコンパクト, Cを $\mathbb{P}^1$ と同型な, submanifold とする時, $N_{C/X} \cong \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$, $m \geq n \geq -1$ なら, $\forall n$ に対し $P_n = 0$. (ただし $\mathcal{O}(m) = mH_C$)
pf) adjunction formula により, X 内の非特異曲線 C に対し, $\deg(K_X|C) = \deg K_C + \deg N_{C/X}$。今, ある整数 n_0 に対し $P_{n_0} > 0$ とする。$\deg N_{C/X} < -\deg K_C$ とすれば, $\deg(n_0 K_X|C) < 0$。すなわち C は $|n_0 K_X|$ の fixed component または, base locus に含まれる。ところが小平[1]によりもし, dim $H^1(C, N_{C/X}) = 0$ なら, vector space $H^0(C, N_{C/X})$ で parametrize された, C の X 内での変形族が存在する。C' と C と異る同じ族の nonsingular curve とする時やはり, $\deg(K_X|C') < 0$ であるから, C' も $|n_0 K_X|$ のどの member の support にもはいっていることになる。今上の変形族が, C の近

傍全部を動けば、これは不可能である。従って $P_n=0$ $\forall n$. lemma の条件より、上で述べた仮定がすべてでるからこの場合も $P_n=0$。

同様の議論を用いて、次のことも証明される。$f: X\to X'$ を、X' の正規孤立特異点 p の resolution とする。$A=f^{-1}(p)$ とおく。

<u>lemma 3</u>　C を A に含まれる curve で $\mathbb{P}^1$ と同型とする。$N_{C/X}\cong \mathcal{O}(m)\oplus\mathcal{O}(n)$, $m\geq n$ とする時, $n<0$ が成りたつ。

3次元の場合が、hyperplane cut などによって2次元の場合に reduce できればよいが、なかなかそうはうまくいかない。

$f: X\to Y$ を、3次元多様体の bimeromorphic morphism とする。f の例外集合 S とは、f がその点の近傍で biholomorphic でない点の集合である。$T=f(S)$ とする。$\dim S=2$　$\dim T\leq 1$ である。　$f|_{X-S}: X-S\cong Y-T$。

<u>lemma 4</u>　$\exists T'\subset T$: proper analytic subset, s.t. $f|_{X-f^{-1}(T')}: X-f^{-1}(T')\cong Y-T'$ は、nonsingular curve を center とする、monoidal 変換の連続で得られる。

pf) まず T から $\dim f^{-1}(t)=2$ となる有限個の点 $t_1,\dots,t_k$ を除く。~~とて $T-\{t_i\}$~~

次に T の有限個の特異点を除く。t_0 を残りの任意の点とする。t_0 の近傍で、Y の座標を (y_1,y_2,y_3)、$y_3=0$ が T の local equation を与えるようにとる。この近傍を U とし、$V=f^{-1}(U)$ とする。$y_3\cdot f$ は、$\pi^{-1}(U)=V$ から、unit disc $D=\{y_3 \mid |y_3|<1\}$ への map を与える。(Bertini の定理より)。$y_3\cdot f: (y_3\cdot f)^{-1}(D')\to D'$ は、maximal rank の map としてよい。ここで $D'=\{y_3 \mid 0<|y_3|<1\}$。$g=y_3\cdot f$ とおくと、各

fibre $g^{-1}(s)$, $s\in D'$ は nonsingular surface で，$f|g^{-1}(s): g^{-1}(s)\longrightarrow U_s$ は，nonsingular surface の間の，bimeromorphic morphism である。ここで $U_s=\{(y_1, y_2, y_3)\mid y_3=s\}$。従がって，$f|g^{-1}(s)$ は曲面の場合の結果によって σ-process 有限回の積の形にかける。ところで第一種例外曲線の stability theorem [2] を，g に対して用いることにより，f は，$\bigcup_{s\neq 0} U_s$ 上，σ-process の積 $\times\, id_{D'}: g^{-1}(s)\times D'\longrightarrow U_s\times D'$ の形をとることが証明できるのである。 q.e.d.

次に，nonsingular center の monoidal 変換に際しての submanifold の~~正規~~法バンドルの変化を調べる。

<u>lemma 5</u> X: 3次元多様体，A を非特異超曲面，C を A に含まれる非特異曲線。$\sigma: X_1\longrightarrow X$ を，C を中心とする monoidal 変換とする。$S=\sigma^{-1}(C)$ とする。この時，(☆) $N_{A_1/X_1}=f^*N_{A/X}\otimes(N_{S/X_1})^{-1}$。ここで $A_1=\sigma^{-1}[A]$。

Pf) A, S, A_1 の ideal の sheaf を $\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_S, \mathcal{I}_{A_1}$ で表わす時，$f^{-1}(\mathcal{I}_A)=\mathcal{I}_S\cdot\mathcal{I}_{A_1}$ なる関係よりただちに lemma を得る。[(☆) $N_{A/X}, N_{S/X}$ をそれぞれ，$[A], [S]$ に訂正し，右辺は $(f^*[A]\otimes[S]^{-1})_{A_1}$ とする。[ ] は divisor に対応する line bundle.] 上の証明で C は点でもよい。

<u>corollary 6.</u> i) $A\cong\mathbb{P}^2$ で C が degree d の curve，$N_{A/X}\cong lH_A$ とすると $N_{A_1/X_1}\cong(l-d)H_{A_1}$. ii) $A\cong\mathbb{P}^2$ で C が 1 点，$N_{A/X}\cong lH_A$ とすると，$N_{A_1/X_1}\cong[lF+C_0]_{A_1}$ C_0 は A_1 の 0-section，F は fibre. $A_1\cong\Sigma_1$ である。
iii) $A\cong\mathbb{P}^1$-bundle over a curve で，C が A の general fibre と d 回まじわる curve とする。$N_{A/X}|_F=lF$ とする。$N_{A_1/X_1}|_{F_1}=(l-d)F_1$ である。ここで

F, F_1 は general fibre。

実は使えそうな事実は，lemma 2.3 の帰結以外に，いまのところ見あたらないので，そこでの仮定はどちらを採用しても同じである。従って $f_i : X_i \longrightarrow Y$ $i = 1, 2$ を，Y の正規孤立特異点 P の resolution として，$f_1^{-1} f_2$ も $f_2^{-1} f_1$ も holomorphic ではないと仮定しよう。広中の結果により，X_2 に有限個の非特異中心の monoidal 変換をほどこせば，$f_1^{-1} f_2$ の不確定点を除去することが可能である。各 monoidal 変換を $\sigma_i : X_{i+1} \to X_i$ で表わす。$i = 0, \cdots r$. $X_0 = X_2$ とする。$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_r : X_r \to X_0$ とする時，$f_1^{-1} f_2 \cdot \sigma$ が X_r から X_1 への morphism となる。σ_r の center を $C_r (\subset X_{r-1})$ で表わし，$A_r = \sigma_r^{-1}(C_r)$ とおく。混乱を回避するため，もとの X_1 を Z とおく。$g = f_1^{-1} f_2 \sigma : X_r \to Z$ とおく。

<u>Proposition 7</u> $A_r \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ で，(*) $g|A_r$ は $\sigma_r|A_r$ と別の fibring, が，適当な条件で成立する。

pf) $\dim g(A_r) \geq 1$ としてよい。$\dim g(A_r) = 2$ とする。まず，$g(A_r)$ が nonsingular としよう。すると $A_r \cong g(A_r)$ が，$A \cong \Sigma_1$ で，$g(A_r) \cong \mathbb{P}^2$ かのいずれかである。g^{-1} の不確定点の集合を T で表わす。$\dim T = 1$ である。lemma 4 の T' は有限個の点であるから $g(A_r) \cong \mathbb{P}^1$-bundle あるいは $\cong \mathbb{P}^2$ に応じて，general ~~line~~ fibre F または，general line L は T' と交わらない。従がって lemma 4 により，F (resp. L) のある近傍 U で g は nonsingular curve を center とする monoidal 変換の succession とみてよい。この時，$T \cap F = \phi$ なら $N_{g(A_r)/Z}|F = -H_F$。$T \cap F \neq \phi$ なら，corrolary 6 を用いて，$N_{g(A_r)/Z}|F = mH_F$ for some $m > 0$ となる。前者の場合は

p.20(2) により、$g(A_r)$ は contract しうる。すなわち $T: Z \longrightarrow Z_1$ なる morphism が存在して、T は、$T(g(A_r))$ を center とする monoidal 変換である。Z_1 は、Y の resolution であるからこれは仮定に矛盾する。後者の場合は lemma 3 によりおこりえない。$g(A_r)$ が singular の時は複雑であって、とても、このままでは攻撃できそうもない。$\dim g(A_r) = 1$ の時。

F を A_r の fibre とする時 $g(F) = g(A_r)$ としてよい。さもなければ X_{r+1} が $X_1 = Z$ を dominate するからである。これは、$A_r \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の時のみ可能である。(∵ $g(F) = g(A_r)$ より、$g(A_r)$ は rational. 再び lemma 4 を用いれば、$g(A_r)$ の一般点の逆像の既約成分は nonsingular rational であるから A_r は rational であることが結論される。Σ_r から curve C への holomorphic map を f とし fibre を F とする。Σ_r の ∞-section, fibre を C^∞, f とすると、$F \sim aC^\infty + bf$ と書ける。$\sim$ は linearly equivalent. $F^2 = a^2 r + 2ab = 0$ より $a \neq 0$ なら $ar + 2b = 0$　この時 $r \neq 0$ なら F は rational でない。) ~~ならば $\Sigma_r \to C$ が $\mathbb{P}^1$-bundle~~ ☆ Proposition 7 の statement は従って仮定: $X_1 \xrightarrow{f_1} Y$ が、minimal resolution かつ、$f_1^{-1}(P)$ の各既約成分が nonsingular. という条件のもとで成立する。// 一般に簡単な resolution では、この事実が成立する case が多いことに注意する。たとえば、g を $\mathbb{C}^3$ の自己同型で $g: (z_1, z_2, z_3) \longmapsto (e_n z_1, e_n^p z_1, e_n^q z_2)$　$(n, p) = (n, q) = 1$ で定義されるものとし、$G = \{g\}$ とする。$\mathbb{C}^3/G$ は、原点の image を孤立特異点にもつ normal analytic space になる。$\mathbb{C}^3/G$ の resolution は上の性質を持つ。(修士論文参照)。　Prop. 7 で $g|A_r: A_r \longrightarrow g(A_r)$ の fibre が connected

であることと証明できる。いずれにせよ,これだけでは,なんの意味もないことである。 次に A_{r-1} の X_r での proper transform $B=\sigma_r^{-1}[A_{r-1}]$ を調べよう。 まず,σ_r の center $C_r \subset A_{r-1}$ の時を考える。 A_r が $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ であったから, $C_r\cong\mathbb{P}^1$ で $N_{C_r/X_{r-1}}\cong\mathcal{O}(m)\oplus\mathcal{O}(m)$ $m<0$ である。 A_{r-1} が $\mathbb{P}^2$ であるか,あるいは,A_{r-1} が $\mathbb{P}^1$-bundle で C_r がその fibre なら このようなことはおこらない(+)から, A_{r-1} が Σ_m for some $m\geq 0$ と同型で C_r はその 0-section である。((+)実際後者の場合なら $N_{C_r/X_{r-1}}\cong\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}(-1)$ である。)この時

$0\to N_{C_r/A_{r-1}}\to N_{C_r/X_{r-1}}|_{C_r}\to N_{A_{r-1}/X_{r-1}}|_{C_r}\to 0$ なる exact sequence が成立する。

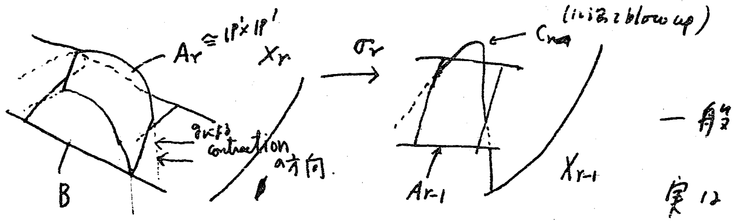
$N_{C_r/A_{r-1}}\cong\mathcal{O}(-m)$ である。 さらに P.2 (A) により $N_{A_{r-1}/X_{r-1}}|_{C_r}\cong\mathcal{O}(l)$, $0<l<m$。このような場合,一般には,exact sequence は split しない。 さて,resolution の例外集合 $f^{-1}(P)$ の既約成分は,nonsingular を仮定したから,$\dim g(B)\leq 1$ であるか, $B\cong\Sigma_1$,かつ $g(B)\cong\mathbb{P}^2$ のいずれかである。後者としよう。すると P.5 の終りの議論と,ほぼ同様にして矛盾が生じる。

$\dim g(B)=1$ とする。 $B\cong\Sigma_m$ で, $B\cap A_r$ は B の 0-section であるから,$r\neq 0$ なら B_r は1点に contract せざるを得ない。 これは矛盾である。

Proposition 8 ☆の仮定と上の記号で $g(B)$ は1点である。

pf) $C_r\subset A_{r-1}$ は上で見た。 $C_r\cap A_{r-1}$ が有限個の点とする。 この時 B は有限個の例外曲線を持つ ruled surface である。 この時,仮定☆より容易に, $\dim g(B)=2$ なら $C_r\cap A_{r-1}$ は,1点であることが結論できる。再び P5 末の議論により矛盾が生じる。 $\dim g(B)=1$ とすると Prop 7 より, B は $A_r\cap B$ の連結成分の上への fibre structure を

もつ。下図。この時，P.6の中程と同様にしてBはrational.



lemma 4により，$g(A_r)$の一般点のfibreはtreeだから，実は$C_r \cap A_{r-1} = 1$点．この点で，C_rとA_{r-1}がtransversalに交わっていれば，BはΣ_rの1点で~~quad~~ quadratic transformationして得られるsurfaceで，そのような曲面では，もとのfibreのproper transform以外には，selfintersection numberが0のcurveは存在しない。従って，この場合も除外し得た。

<u>lemma 9</u>. C_rがA_{r-1}に，点pでk次のorderで接する時，Bは，$B\cap A_r$の1点において，特異点をもつ。この点は，rational double point A_{k-1}と同型である。pf) pの近傍で，X_{r-1}の局所座標x, y, zを$z^k = y$が，A_{r-1}のlocal equation，$x=0$，$y=0$がC_rのlocal equationになるようにとれば，Bの特異点は，$z^k = (y/x)x$で与えられ，これはrational double point A_{k-1}の方程式である。q.e.d.

さてこの時，rational double pointのresolutionがselfintersection$=-2$のnonsingular rational curveのtreeで~~resolutionできる~~できるということ，~~$B\cap A_r$~~を使って，この場合も矛盾を導くことができる。q.e.d.

<u>問10.</u> $\dim g(B) = 0$から矛盾を生じるか？　これが矛盾なら，nonsingular surfacesのsystemでresolutionできる，normal (isolated) singularityに関しては，それ~~ぞ~~ surfaceの中に，lemma 1.をみたす~~$\mathbb{P}^1$~~ $\mathbb{P}^1$が，存在するかしないかによって，minimal resolutionかどうかが判定

できることになるだろう。$\dim g(B)=0$ なら，すでにみたように，$C_r \subset A_{r-1}$ であることに注意しておく。1つの例をあげよう。$A_{r-1} \cong \Sigma_1$ とすると，$N_{A_r/X_r} = [-D]_{A_r}$ であることがわかり．(lemma 1)．A_r は．別の方向に contract できる。lemma 1 のすぐあとの記号を用いて $T(A_r) = C_r'$，$T(B) = B'$ とおく。$C_r' \cong \mathbb{P}^1$，$B' \cong \mathbb{P}^2$ で，$N_{B'/Z} \cong -H_{B'}$ がわかる。$N_{C_r'/Z} \cong (-H_{c'}) \oplus (-H_{c'})$ である。B' の contraction を，$T_1: Z \to Z_1$ とし，$C_r'' = T_1(C_r')$ とおく。

<u>lemma 11</u>　一般に X：3-fold，$\mathbb{P}^1 \subset X$，$N_{\mathbb{P}^1/X} \cong \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$　$n \le m < 0$ or $n = m = 0$　とする時，$\sigma: X_1 \to X$ を，$\mathbb{P}^1$ の点 P における monoidal 変換とする。X_1 における $\mathbb{P}^1$ の proper transform を C_1 とする時，$N_{C_1/X_1} \cong \mathcal{O}(m-1) \oplus \mathcal{O}(n-1)$．

pf）$\mathbb{P}^1$ を含み，そこで互いに transversal に交わる surface E_1, E_2 が，$\mathbb{P}^1$ の近傍に存在し，$N_{\mathbb{P}^1/E_1} \cong \mathcal{O}(m)$．$N_{\mathbb{P}^1/E_2} \cong \mathcal{O}(n)$．をみたす。$\sigma^{-1}[E_1]$ と $\sigma^{-1}[E_2]$ が，C_1 で transversal に交わる nonsingular surface となるから，$N_{C_1/X_1} \cong N_{C_1/E_1'} \oplus N_{C_1/E_2'}$，$E_i' = \sigma^{-1}[E_i]$　$i=1,2$．である。あとは曲面論である。q.e.d.

　この lemma を用いれば $N_{C_r''/Z_1} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ であって，lemma 3 に矛盾。したがって上のような場合はおこりえない。　一般に $g(B)$ は．nonsingular とはいえないが，$g(B)$ が nonsingular の この法バンドル $N_{g(B)/X_1}$ を調べることは意味があるだろう。すなわち　問　$g: X \to X_1$ を，birational morphism，$\mathbb{P}^1 \subset X$．$g(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^1$ とする時，$N_{\mathbb{P}^1/X}$ と $N_{g(\mathbb{P}^1)/X_1}$ を較べよ。

四　さてよく似た問題でより一層重要な問題は，birational map の monoidal 変換への分解可能性の問題である：$f: X \to Y$ を，3次元の birational map とする時，monoidal 変換の successions，

$\sigma_i: X_i \to X_{i-1}$, $\tau_j: Y_j \to Y_{j-1}$ $i=1,\dots,m$. $j=1,\dots,n$ $X_0=X$ $Y_0=Y$ $X_m=Y_n=Z$ が存在して，$\sigma=\sigma_1\cdots\sigma_m$, $\tau=\tau_n\cdots\tau_1$ とおく時，$f\sigma=\tau$ が成りたつか。

この問題についても，上と同様の考察がいろいろできるが，これについては触れないことにして，例を示そう。

$\mathbb{C}^3=\mathbb{C}^3(x,y,z)$ とし，C を，$\mathbb{C}^3$ で $x=0$ $f(y,z)=0$ で定義される(plane) curve とする。$\sigma: X\to\mathbb{C}^3$ を C に沿う monoidal 変換とする時，X は $\mathbb{C}^4$ で $xt=f(y,z)$ で定義される孤立特異点 P を持つ。点 P の resolution を $\sigma_1: X_1\to X$ を点 P の resolution とする。$\sigma\sigma_1: X_1\to\mathbb{C}^3$ は一般には，monoidal 変換の succession では得られない birational morphism となる。

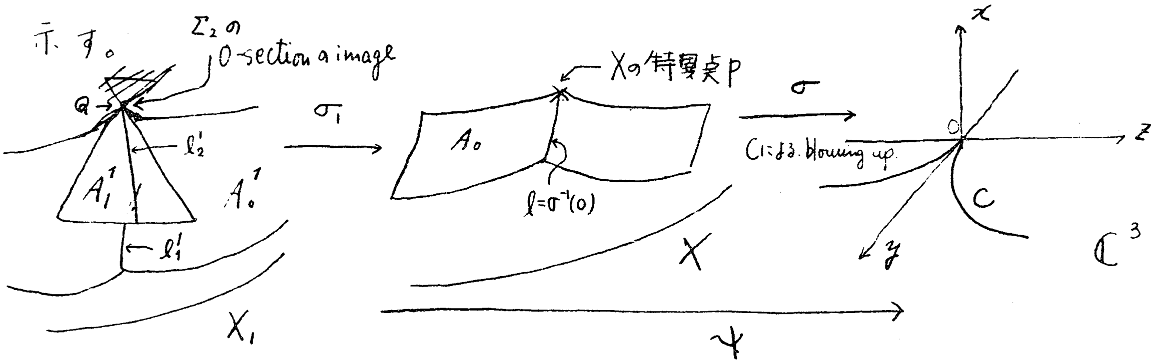
今 $f(y,z)=y^2+z^d$ $d=2k+1$ として，$\sigma\sigma_1$ が上の意味で monoidal 変換に分解できることを示そう。($d=2k$ の時は，$\sigma\sigma_1$ 自身が monoidal 変換に分解する。) まず X_1 の resolution。

lemma 12. $x^2+y^2+z^2+u^d=0$ $d=2k+1$ で定義される孤立特異点は，点中心の monoidal 変換を k 回繰り返すことにより resolution できる。$\varphi: \hat{X}\to X$ を，resolution とする。P を特異点，$\varphi^{-1}(P)=\bigcup_{i=1}^{k}\Theta_i$ とする。ここで Θ_i は，i 番目の monoidal 変換により得られる曲面とする。この時，$\Theta_i\cong\Sigma_2$, $i=1,\dots,k-1$ $\Theta_k\cong$ (Σ_2 の 0-section を contract した surface)。$N_{\Theta_i/\hat{X}}|_{F_i}=-2H_{F_i}$。$F_i$ は Θ_i の general fibre。$\Theta_i\cap\Theta_{i+1}$ $i=1,\dots,k-1$ は，Θ_i の 0-section，Θ_{i+1} の ∞-section。

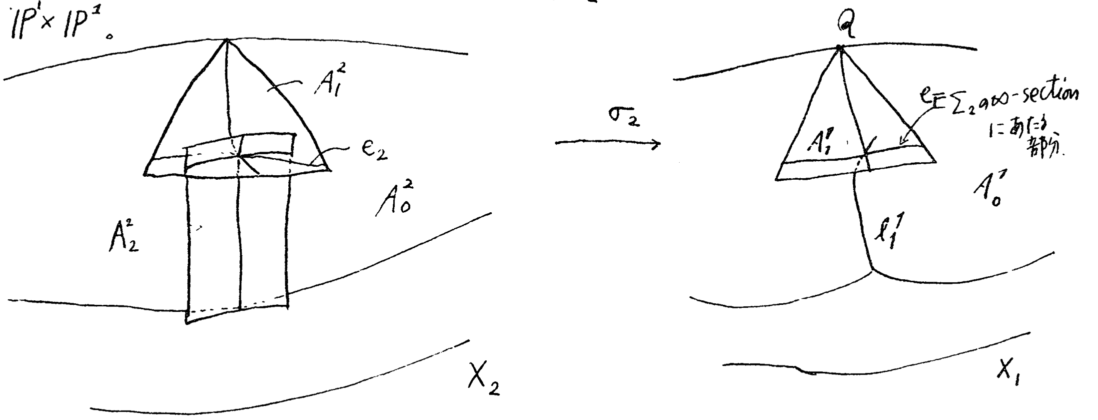
証明は direct computation によるので省略。

lemma により，上で $f(y,z)=y^2+z^d$, $d=2k+1$ とした時，$\sigma\sigma_1: X_1\to\mathbb{C}^3$

が完全にわかる。まず $d=3$ とする。$\psi=\sigma\sigma_1$ とおく。$\psi^{-1}(C)=A_0^1\cup A_1^1$ とする。但し、ここで A_0^1 は C の proper transform, A_1^1 は上記号で X の特異点の resolution σ_1 の例外曲面。従がって $A_1^1\cong\Sigma_2/0$-section。これを図で示す。

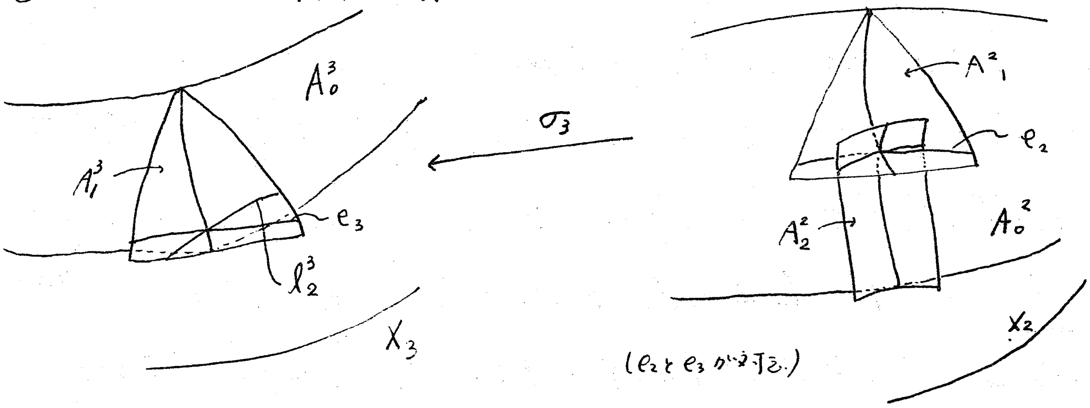


X の特異点 P の記述：ある affine open において $xt=y^2+z^3$ で定義されている。Q の近傍で X_1：$\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{t}{z}\right)=\left(\frac{y}{z}\right)^2+z$　A_1：$z=0$. $\left(\frac{x}{z}\right)\left(\frac{t}{z}\right)=\left(\frac{y}{z}\right)^2$。$l_1^1=\sigma_1^{-1}[l]$ とする。$\sigma_2: X_2\longrightarrow X_1$ を l_1 に沿っての monoidal 変換とする。$A_1^2=\sigma_2^{-1}[A_1^1]$, $A_0^2=\sigma_2^{-1}[A_0^1]$　$A_2^2=\sigma_2^{-1}[l_1]$ とする。(一般に A_i^k は、$\sigma_k^{-1}[\cdots\sigma_{i+1}^{-1}[A_i^i]]\cdots]$，すなわち，$A_i^i$ の X_k における proper transform を表わす。ただし $k>i$。) さて，この時，$A_0^2\to A_0^1$ は非特異化，A_1^2 は，第1種例外曲線を含む。$A_2^2\cong\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$。

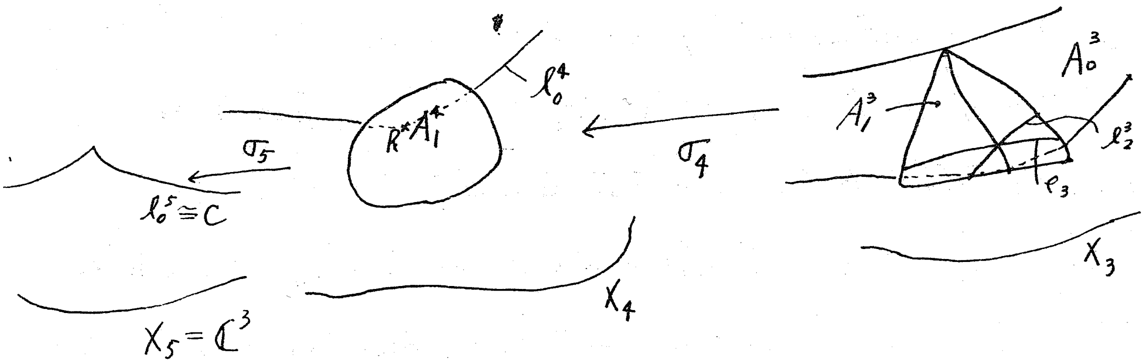


この時，A_2^2 は，もう1方のファイバリングの方へ contractible。

$\sigma_3 : X_2 \to X_3$ をこの contraction とする。$\sigma(A_2^2) = \ell_2^3$ とする。この時 A_0^3 は、C 上の $\mathbb{P}^1$-bundle に同型。A_1^3 は A_1^2 と同型。



この時 A_0^3 が自然にファイバー方向に contractible。contraction を $\sigma_4 : X_3 \to X_4$ とする。$\sigma_4(A_0^3) = \ell_0^4$ とする。この時 $A_1^4 \cong \mathbb{P}^2$。



この時、A_1^4 が contractible で、contraction を $\sigma_5 : X_4 \to X_5$ とする。

この時、$\sigma\sigma_1\sigma_2 = \sigma_5\sigma_4\sigma_3$ が成り立つ。つまり $\sigma\sigma_1 = \psi = \sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2^{-1}$ というふうに monoidal 変換に分解できた。$d=5$ にすると少し違った situation が出現するが、これらを説明すると徒に紙数を費やすので、結果だけ述べる。P.10 の記号を用いて $\sigma\sigma_1 = \psi$ とおく。

<u>Proposition 13.</u> P.10 でさらに $f(x,y) = x^2 + y^d$ とおく。この時、$\psi_d = \sigma\sigma_1$ とおこう。すると ψ_d は、monoidal 変換に分解できる。d は任意

さらに一般に、isolated singularity $xy = z^a + u^b$　a, b 整数 $\geqq 2$ の非特異化を構成することも可能である。(修論参照) $f_{(z,u)} = z^a + u^b$ とおいて、ψ の monoidal 変換を実験してみてもおもしろいだろう。

回 $f: X \to Y$ を3次元の birational morphism とする。最初に述べた意味での monoidal 変換への分解ができないことは、たとえば、P.11 の ψ などがその例であるが、f^{-1} の fundamental point が、Y の1点 P、あるいは非特異曲線 C であるとして、f が、Y の、P あるいは C を center とする monoidal 変換を dominate するか？という問題が生じる。まず、1点 P の場合に反例をあげよう。$Y = \mathbb{C}^3$, $\sigma_1: Y_1 \to Y$ を原点での blowing up とする。

反例　birational morphism $f: X \to \mathbb{C}^3$ で $f|_{X - f^{-1}(0)}: X - f^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^3 - \{0\}$ をみたしかつ、$\sigma^{-1} f: X \to Y_1$ は dominating でないものが存在する。

いささか繁雑であるが、これを正確に述べよう。

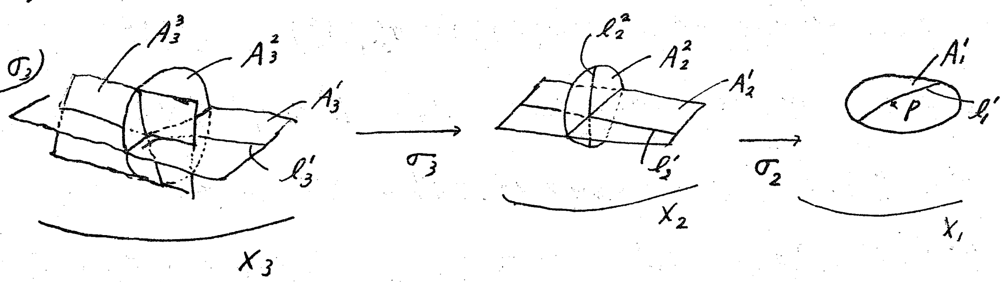
(1) 上の記号でさらに、$A_1^1 = \sigma_1^{-1}(0)$ とおく。$A_1^1 \cong \mathbb{P}^2$, $N_{A_1^1/Y_1} \cong -H_{A_1^1}$ である。$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(z_1, z_2, z_3)$ とする。$z_1 = 0$ で定義される plane を E_0 とし、X_1 でのその proper transform を E_1 とする。$E_1 \cap A_1^1$ は A_1^1 の line である。これを l_1^1 とする。$N_{l_1^1/E_1} = -H_{l_1^1}$ である。P を l_1^1 上の任意の点とする。

(2) $\sigma_2: Y_2 \to Y_1$ を点 P における monoidal 変換とする。$A_2^2 = \sigma_2^{-1}(P)$ とすると、$A_2^2 \cong \mathbb{P}^2$, $N_{A_2^2/X_2} \cong -H_{A_2^2}$ である。A_1^1 の proper transform $\sigma_2^{-1}[A_1^1]$ を A_2^1 とおく。$A_2^1 \cong \Sigma_1$ である。$\sigma_2^{-1}[l_1^1] = l_2^1$ とすると、l_2^1 は A_2^1 の fibre である。$N_{A_2^1/X_2}|_{l_2^1} \cong -2H_{l_2^1}$ である。(pf) $\sigma_2^{-1}[E_1] = E_2$ とする。$l_2^1 \subset E_2$ である。$\sigma_2|_{E_2}: E_2 \longrightarrow E_1$ は点 $P \in E_2$ における monoidal 変換である。従って $N_{l_2^1/E_2} = -2H_{l_2^1}$ である。

E_2 は ℓ_2' で transversal に A_2' に交わるから，$N_{A_2'/X_2}|\ell_2' \cong N_{\ell_2'/E_2} = -2H_{\ell_2'}$ である。)

(3) $E_2 \cap A_2^2 = \ell_2^2$ とする。ℓ_2^2 は A_2^2 上の line である。$\sigma_3: X_3 \to X_2$ を ℓ_2^2 を center とする monoidal 変換とする。$A_3^3 = \sigma_3^{-1}(\ell_2^2)$ とする。$A_3' = \sigma_3^{-1}[A_2']$ とおく。$\sigma_3|A_3': A_3' \to A_2'$ は $p_2 = A_2' \cap \ell_2^2$ による monoidal 変換である。$\sigma_3^{-1}[\ell_2'] = \ell_3'$ とする。$p_2 \in \ell_2'$ だから，$N_{\ell_3'/A_3'} = -H_{\ell_3'}$ である。また $N_{A_3'/X_3}|\ell_3' = -2H_{\ell_3'}$ である。(pf). $E_2 \supset \ell_2'$ であった。$\sigma_3^{-1}[E_2] = E_3$ とおくと，E_3 は A_3' と ℓ_3' で transversal に交わる。$\sigma_3|E_3: E_3 \to E_2$ は σ_3 の center ℓ_2^2 が E_2 に含まれているから isomorphism である。従って $N_{A_3'/X_3}|\ell_3' = N_{\ell_3'/E_3} = N_{\ell_2'/E_2} = -2H_{\ell_2'} = -2H_{\ell_3'}$.) また $N_{\ell_3'/X_3} \cong (-H_{\ell_3'}) \oplus (-2H_{\ell_3'})$ である。(pf) ℓ_3' において A_3' と E_3 が transversal に交わり両方とも nonsingular であるから，$N_{\ell_3'/X_3} = N_{\ell_3'/A_3'} \oplus N_{\ell_3'/E_3} = (-H_{\ell_3'}) \oplus (-2H_{\ell_3'})$)

(4) $\sigma_{23} = \sigma_2\sigma_3$ とおく。



$\ell_1' \subset A_1' \subset X_1$, $\sigma_{23}^{-1}[\ell_1'] = \ell_3'$ であった。$\sigma_4: X_4 \to X_3$ を，ℓ_3' を center とする monoidal 変換とする。$\sigma_4^{-1}[\ell_3'] = A_4^4$ とおくと，(3) の最後から $A_4^4 \cong \Sigma_1$. $A_4' = \sigma_4^{-1}[A_2']$ とおくと $\ell_4' = A_4' \cap A_4^4$ は，やはり (3) の最後の事実より A_4^4 の 0-section である。(3) における議論と同様に，

$N_{\ell_4'/X_4} = N_{\ell_4'/A_4'} \oplus N_{\ell_4'/A_4^4} = (-H_{\ell_4'}) \oplus (-H_{\ell_4'})$

(5) $\sigma_{234} = \sigma_2\sigma_3\sigma_4: X_4 \to X_1$ とする。$\ell_4' = \sigma_{234}^{-1}[\ell_1']$ である。$\sigma_5: X_5 \to X_4$ を

l_4'を center とする monoidal 変換とし，$\sigma_5^{-1}[l_4'] = A_5^5$ とおくと，lemma 1 より $A_5^5 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$。$p_i : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, $i=1,2$ を 1st factor, 2nd factor への射影とする。σ_5 により induce される A_5^5 の fibre structure が p_1 に一致するとする。この時 P.2 により，birational morphism $\sigma_5' : Y_5 \to Y_5'$ が存在し，$\sigma_5'|_{Y_5 - A_5^5}$

$Y_5 - A_5^5 \simeq Y_5' - \sigma_5'(A_5^5)$ かつ $\sigma_5'|A_5^5 : A_5^5 \to \sigma_5'(A_5^5)$ が p_2 と一致する~~と~~ ~~が~~ $l' = \sigma_5'(A_5^5)$ とおく。

(6) $f : Y_5' \to \mathbb{C}^3$ への birational morphism で，$f \cdot \sigma_5' = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5$ なるものが存在することは明らかである。birational map $g : Y_5' \to Y_1$ を $g = \sigma_2\sigma_3\sigma_4\sigma_5\cdot\sigma_5'^{-1}$ で定義すれば，g により l' の各点と，curve l_2' が対応する。すなわち $g : Y_5' \to Y_1$ は dominating でない。$g = \sigma_1^{-1} f$ であるから $f : Y_5' \to \mathbb{C}^3$ が求める example である。

(7) $f^{-1}(0) = \sigma_5'(A_5^1) \cup \sigma_5'(A_5^2) \cup \sigma_5'(A_5^3) \cup \sigma_5'(A_5^4)$。$\sigma_5'(A_5^l) = B^l$ $l = 1,2,3,4$ とする。$B^1 \cong \Sigma_2$ $N_{B^1/Y_5'}|_{F^1} \cong -2H_{F^1}$ $B^2 \cong \mathbb{P}^2$ $N_{B^2/Y_5'} \cong -2H_{B^2}$,

B^3 は Σ_2 から，2回 σ-process を行って得られる surface. $N_{B^3/Y_5}|_{F^3} \cong -H_{F^3}$

$B^4 \cong \mathbb{P}^2$. $N_{B^4/Y_5'} \cong -2B^4$ である。// A_1 の proper transform が Σ_m になるもの

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ のような奇妙な を構成することもできる。

図形が点の逆像として表われてくる以上，一般の birational morphism に関しては，予想のたてようもない。

次に nonsingular curve C が，birational morphism $f : X \to Y$ の基本点になっている場合は，どうであろうか。C 上に，$\dim f^{-1}(Q) = 2$ となる点がある場合には容易な（当然の）反例がある。今，$\dim f^{-1}(Q) = 1$ $\forall Q \in C$ とする。

<u>Theorem 1</u>　Y を $\mathbb{C}^3$ の原点の近傍, C を Y の curve とする。C の原点での既約成分の中に非特異なもの C_0 があれば, f は, C_0 を center とする Y の monoidal 変換を dominate する。($\dim f^{-1}(Q)=1$ $Q\in C$ は仮定)

pf) $Y\subset\mathbb{C}^3$ の座標を (x, y, z), C_0 が $x=y=0$ で定義されているとする。$a=(a_0:a_1)\in\mathbb{P}^1$ に対し, $a_0x+a_1y=0$ で定義される plane を E_a, これと $z=0$ との交線を l_a と書く。$|E_a|$ を $a\in\mathbb{P}^1$ のなす linear system とする。$\bar{E}_a=f^{-1}(E_a)$ とし, $|\bar{E}_a|$ の fixed component を F とする。linear system $L=|\bar{E}_a|-F$ の base locus B が空集合であることをみればよい。L の general member は, $|E_a|$ の general member の proper transform $\tilde{E}_a$ である。まず lemma 4 により, $Y-0$ 上では f は, nonsingular center の monoidal 変換の successions としてよいから, $\tilde{E}_a\cap\tilde{E}_b\subset f^{-1}(0)$, が, $\tilde{E}_a$, $\tilde{E}_b$ が general の時成立する。従がって特に $B\subset f^{-1}(0)$. $f^{-1}(0)$ の既約成分 D_i が B に含まれる。$\longleftrightarrow$ $D_i\subset\tilde{E}_a$ for general $\tilde{E}_a$ である。~~従がって B が有限個の点ならば,~~ 従がって $\tilde{E}_a\cap\tilde{E}_b=B$ が general $\tilde{E}_a$, $\tilde{E}_b$ に対し成立する。(よって $B\neq\phi$ なら $\dim B=1$。) $\hat{l}_a$ を f による l_a の proper transform とする。$f|\hat{l}_a$: $\hat{l}_a\to l_a$ は, biholomorphic map である。$\hat{l}_a\cap S=R$ とする。ここで S は, f の例外集合。$R\notin B$ を示そう。この時 $R\in f^{-1}(0)\cap\tilde{E}_a$ から $B=\phi$ がでる。実際 $\tilde{E}_a\cap f^{-1}(0)=B$ が成立するからである。(ここでもちろん $\tilde{E}_a$ は general member) R の近くでの local coordinate (u, v, w) を $u|\hat{l}_a$ が $\hat{l}_a$ の parameter となるようにとる。この座標に関し f を $x=f_1(u,v,w)$ $y=f_2(u,v,w)$, $z=f_3(u,v,w)$ と表わす。座標 x, y を general にとって, $x=t(u,v,w)g_1(u,v,w)$, $y=t(u,v,w)g_2(u,v,w)$, g_1, g_2 は互いに素, とする時

g_1, g_2 は点 R で同時に 0 にはならないことを示せばよい。この時 $g_1=0$ が $\hat{E}_a$ のの方程式に対応しているからである。さて $f^{-1}\hat{l}_a$ は l_a の parameter が x ととれる時, $x = t(u,0,0)\,g_1(u,0,0)$ となる。これが degree 1 の map を表すためには, $t(0,0,0)=0$ であるから $g_1(0,0,0)\neq 0$ でなければならない。 q.e.d.

さらに, ここで $t(u,v,z)=u+\cdots\cdots$ という展開をもつと考えてよい。すなわち S は R で nonsingular である。

<u>lemma 14</u> 逆に, $f^{-1}(0)\cap S$ に, S の nonsingular point R が含まれれば, C の既約成分に nonsingular なものが存在する。

Pf) Koopman[3] により R の近傍の座標 (u, v, w) に関し, f は次の形をとる。 $x=u^{s_1}$, $y=u^{s}\left(\sum_{k=0}^{\lambda} u^k h_k(w) + u^{\lambda} v\right)$ $z=w$ $_{s_1, s>0\ \lambda\geq 0}$ ここで $u=0$ が S の local equation になるとしている。従って $u=0$ の image は $x=0$ $y=0$ で定義される nonsingular curve である。

<u>lemma 15</u> 定理の仮定で C ~~の既約成分~~ が plane curve, すなわち $\mathbb{C}^3$ のある nonsingular hypersurface に原点の近傍で含まれるとする。この時, $f^{-1}(0)\cap S$ の点で S の nonsingular point でもあるものが存在する。

Pf) C が $\mathbb{C}^3$ で $f_0(x, y)=0$, $z=0$ で定義されているとしてよい。 $x=y=0$ で定義される line を l とする。 $\hat{l}$ を l の proper transform とし $\hat{l}\cap S=R$ とする。 R で S が non-singular であることが上と同様にして証明される。// lemma 14, 15 をあわせると

<u>Theorem 1′</u>: Theorem の 1 の C に関する仮定を「C を plane curve

とする」におきかえる。この時，C の既約成分に nonsingular なものが存在し，これを C_0 とする時，定理1の帰結が成立する。// もっと一般に

<u>lemma 16</u> 定理1の条件で，C は任意の curve とする。$\dim f^{-1}(Q)=1$ $\forall Q\in C$ なら，C の中に，非特異な成分 C_0 が存在する。

pf) lemma 14 から，$f^{-1}(0)$ 上に S の nonsingular point が存在することを言えばよい。$\dim f^{-1}(0)=1$ から $R\in f^{-1}(0)$ で，$Y=\mathbb{C}^3$ の原点を通る2本の line l_1, l_2 の proper transform $\hat{l}_1, \hat{l}_2$ が，R を通るものがある。$0\in Y$ と $R\in X$ の座標 (x, y, z)，(u, v, w) を，l_1, l_2 が各々 $\overset{y=z}{\cancel{x=w}}=0$，$\overset{x=z}{\cancel{y=w}}=0$，$\hat{l}_1, \hat{l}_2$ が各々 $v=w=0$ $u=w=0$ で定義されるようにとる。さらに$^{(*)}$ $u=v=0$ で定義される line は $z=0$ なる plane の proper transform に含まれないとしてよい。この時 f は $u=x$，$v=y$，$z=g(u, v, w)$ という形で与えられる。Weierstrass の予備定理が使えて，g は w に関して m 次の Weierstrass polynomial としてよい。$m>1$ だと，上の式から f が原点の近傍で，1対1でなくなる。よって $m=1$。この時，f は R の近傍で同型。R のとり方に反する。これは条件(*)に矛盾したのである。書き忘れたが，この条件は C が plane curve の時には成立しない。plane curve の時は lemma 13. <u>q.e.d.</u>

<u>corollary. 17</u> $\dim f^{-1}(Q)=1$ $\forall Q\in C$ なら，C は plane curve。

今まで，f を Y に関し local に考えてきた。これを global にするために，

<u>Definition. 1</u> X, Y を複素多様体，$f: X\to Y$ birational morphism とする時，f が複合 monoidal 変換とは，$\forall x\in X$，$\forall y\in Y$ s.t. $y=f(x)$ に対し，近傍 $U_x\ni x$，$U_y\ni y$ と nonsingular complex manifolds V_i，その open subset V_i，V_i の nonsingular

submanifold A_i, $i=0,1,\cdots,r$ が存在し，$\tilde{U}_0 = U_y$，$\tilde{U}_r = U_x$ かつ $\tilde{U}_i$ は $\tilde{U}_{i-1}$ より A_{i-1} を center とする monoidal 変換で得られる。さらに，これを，$\sigma_i : \tilde{U}_i \longrightarrow \tilde{U}_{i-1}$ と考える時，$f|U_x = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdots\cdots \sigma_r$ が成立する。この時を言う。

<u>Theorem 2</u>　$f : X \to Y$ を birational morphism，$\dim f^{-1}(Q) \leq 1$ $\forall Q \in Y$ とする。（f^{-1} の不確定点を C とする。）この時 f は，複合 monoidal 変換である。

証明は，C の特異点の近傍ごとに考えて今までの結果を寄せ集めればできる。

$\boxed{\text{訂正}}$ 1．シンポジウムで話した広中先生の例に関して center の surface が，非特異に contract するというのは誤りであった。ここに慎んで訂正します。実際 Ann. Math. Vol. 75. P. 176 の記号で，$E_0 \cong \mathbb{P}^2$，$N_{E_0/U_0'} = -2H_{E_0}$ であった。contract し得ないことは，Theorem 1 あるいは系．17 からもわかることである。

2．P.6〜7 で $g|A_r : A_r \longrightarrow g(A_r)$ の fibre の連結性はまだできていなかった。あとの議論に支障はない。

3．P.9 5行目：$N_{B'/Z} = -2H_{B'}$ であった。従って Z_1 は singular pt を持つ。この時下から8行目のように矛盾が生じるかどうか興味があるがわからない。

Reference：[1] Kodaira：Ann. Math. Vol. 75. [2] Kodaira：Amer. Jour. Math. 1963. [3] Koopman：Bull. Amer. Math. Soc. 34　その他 [4] Aeppli Comm. Math Helv. 33 [5] Hopf Comm. Math. Helv. 29 [6] Kuhlmann. Archiv. Math XI [7] Moišezon. Amer. Math. Soc. tr. 1968? [8] Šavarevič and others. Algebraic surfaces. [9] Zariski. Intro. to the problem of minimal models.