数理解析研究所講究録
第144巻 1972年 35-42

種数2の曲線の族の第一種特異ファイバーについて

東大 理　上野 健爾

以下述べることは浪川幸彦氏(名大 理)との共同研究の一部である。詳細はいずれ共著の論文として発表する予定である。

$f: \mathcal{C} \longrightarrow C$ を種数2の曲線の族とする。即ち $\mathcal{C}$, C はそれぞれ複素次元2, 1の多様体，f の一般ファイバーは種数2の非特異曲線とする。df が零になる点全体の f による像は従って有限個である。これを $P_1, \cdots, P_\ell$ としよう。点 P_i を中心とする局所座標を t_i とすると，$t_i(f) = 0$ は $\mathcal{C}$ の因子を表わす。この因子のことを，この曲線の族の特異ファイバー（P_i の上の）と呼ぶ。

特異ファイバーを

$$\Theta = \sum_{i=1}^{m} n_i \Theta_i$$

と書くと，

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \Theta_i \cdot \Theta_j = 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} n_i \Theta_i \cdot K = 2\pi(\Theta) - 2 = 2$$

なる関係がある。但し K は $\mathcal{C}$ の標準因子を表わす。$m \geqq 2$ として、特異ファイバーは第一種例外曲線（i.e. 既約な曲線 Γ で $\Gamma^2 = -1$, $\pi(\Gamma) = 0$ なるもの）を含まないとしておくと常に $\Theta_i \cdot K \geqq 0$ が成立つ。この事実を使って上の2個の関係式から Θ の形を定めることは飯高，Ogg によって成された。([2])

その分類は大きく分けて約50種類の類に分けられたが，そこに現われる Θ が実際に存在するかどうか分からなかった。

以下では特殊な場合にその構成法を与える。

問題は C に関して局所的であるので $C = \{z \mid |z| < 1\}$ と仮定しておく。すると $z = 0$ のまわりを正の向きに一周する道に沿って $H^1(C_{t_0}, \mathbb{Z})$ $C_{t_0} = f^{-1}(t_0)$ の変換 M(= Picard Lefschetz 変換) が定まる。M は $Sp(2, \mathbb{Z})$ の元としておいてよい。更に $C - \{0\}$ 上の曲線の Jacobi 多様体を考えることによって $C - \{0\}$ より種数2の Siegel 上半空間 $\mathfrak{S}_2$ への多価解析写像ができる。この解析写像が $C - \ell$（ℓ は 0 から出た半直線）内で $z \to 0$ とした時，$\mathfrak{S}_2$ の内点に極限をもつ場合を考える。（実はこの条件は M の位数が有限と同値である。）この極限値を τ_0 としよう。すると $M \cdot \tau_0 = \tau_0$ なる関係がなければならない。かかる (M, τ_0) は $Sp(2, \mathbb{Z})$ 共役で上野[3]

，[4] の appendix) で完全に求められている。

さて上の T_0 が曲線の Jacobi 多様体に対応する時，対応する特異ファイバーを第一種と呼ぶことにする。

T_0 が Jacobi 多様体に対応しない時（従って楕円直線に対応している時）特異ファイバーを第二種と呼ぶ。

第一種特異ファイバーの時 T_0 に対応する Jacobi 多様体は PL 変換 M に対応した自己同型をもつ，従って対応する曲線も自己同型をもつ。種数２の曲線の自己同型は Bolza [1] によって求められており，自明な involution 以外の自己同型をもつ曲線もすべて定まっている。

<u>命題</u> 1 (Bolza) 自明な involution 以外に自己同型をもつ種数２の曲線は次の通りである。

曲線	曲線の Jacobi 多様体に対応する $\mathfrak{S}_2$ の元
$y^2 = x^6 + \alpha x^4 + \beta x^2 + 1$	$\begin{pmatrix} z_1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & z_2 \end{pmatrix}$
$y^2 = x^5 + 1$	$\begin{pmatrix} \omega & \omega+\omega^{-2} \\ \omega+\omega^{-2}, & -\omega^{-1} \end{pmatrix}$
$y^2 = x(x^4 + \alpha x^2 + 1)$	$\begin{pmatrix} z & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & z \end{pmatrix}$
$y^2 = x^6 + \alpha x^3 + 1$	$\begin{pmatrix} z & \frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z & z \end{pmatrix}$

$y^2 = x^6 + 1$ $\qquad\qquad$ $\frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$y^2 = x(x^4+1)$ $\qquad\qquad$ $\begin{pmatrix} \eta & \frac{1}{2}(\eta-1) \\ \frac{1}{2}(\eta-1), & \eta \end{pmatrix}$

$$\eta = \frac{1+2\sqrt{-2}}{3}.$$

命題2. 第二種特異ファイバーに対応する τ_0 は $Sp(2,\mathbb{Z})$ によって次の点と同値になる。

$$\begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, \quad \rho = e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{3}}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}.$$

これらに対応するアーベル曲面は Jacobi 多様体ではない。(勿論 $\begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$ の時 z に特別な値をとると Jacobi 多様体になる場合もあるが その時は $Sp(2,\mathbb{Z})$ によって 命題1の点へうつされてしまう。)

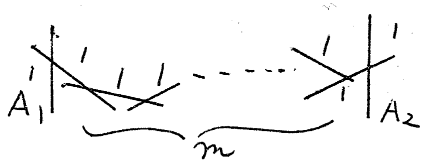
特異ファイバーを構成するのは 次の命題による

命題3 特異ファイバーは第一種又は第2種とする。対応する PL 変換 M の位数を m とする。$C = \{z \mid |z|<1\}$ の原点上の m 重分岐被覆 $\{\tau \mid |\tau|<1\} = \tilde{C}$

$$g:\ \begin{array}{ccc} \tilde{C} & \longrightarrow & C \\ \cup & & \cup \\ \tau & \longmapsto & \tau^m \end{array}$$

に対して $f: \mathcal{C} \longrightarrow C$ の $\tilde{C}$ への引上げを $\hat{f}: \hat{\mathcal{C}} \longrightarrow \tilde{C}$ とする。$\hat{\mathcal{C}}$ の非特異モデルで第一種例外曲線をもたないものを $\tilde{\mathcal{C}}$ とすると $\tilde{f}: \tilde{\mathcal{C}} \longrightarrow \tilde{C}$ の原点上のファイバーは

第一種 ‥‥‥ 種数2の曲線

第二種 ‥‥‥ 

$m \geq 0$

となる。*) 但し A_1, A_2 は elliptic curve で $A_1 \times A_2$ は T_0 に対応し、他は自交切数 -2 の $\mathbb{P}^1$ を表わす。また $\tilde{C}$ の自己同型

$$\tau \longrightarrow e^{\frac{2\pi i}{m}}\tau$$

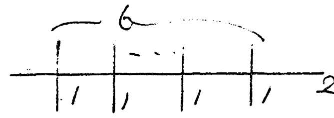
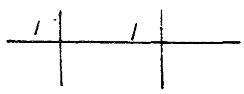
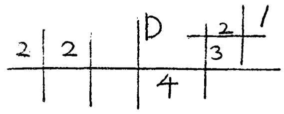
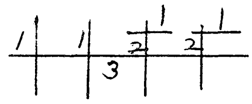
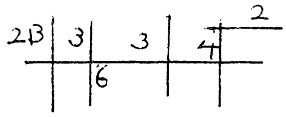
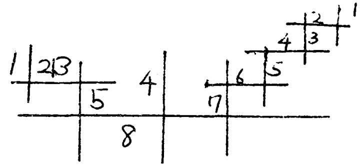
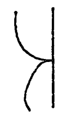
は $\tilde{\mathcal{C}}$ の自己同型 h に引上げられ群 $G=\{1, h, h^2, \dots, h^{m-1}\}$ は $\tilde{\mathcal{C}}$ は properly discontinuous に作用する。この時商空間 $\tilde{\mathcal{C}}/G$ の非特異モデルは $\mathcal{C}$ と一致する。また第一種特異ファイバーの時 G の $\tilde{\mathcal{C}}$ の原点上のファイバーへの制限は曲線の自明でない自己同型群を引起す。

この命題は構成問題を考える上だけでなく、モノドロミーが自明であっても特異ファイバーが現われること、及びその特異ファイバーは自然数をパラメーターとしてもっていることを示している点で重要である。

---

*) 但し $\mathcal{C} \longrightarrow C$ の原点上の特異ファイバーは必要なら何度か blow up してすべて normal crossing であると仮定しておく。

さて上のBolzaの結果を使って第一種特異ファイバーは命題3の $\mathcal{C}$ 及び G を見出すことによって構成される。(第二種の時はテータ函数の理論を使えば対応した議論が可能である。) 以下結果のみ記しておく。

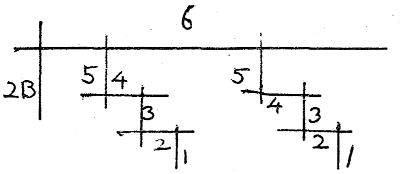
モノドロミー*) (PL変換)		特異ファイバー**)	
Ⅰ ②	$-I_4$		2B, 33
Ⅱ ① b)	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$		2A, 12
Ⅱ ② d)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		4
Ⅱ ③ c)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$		42
Ⅱ ④ c)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$		17
Ⅳ ① c)	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		22
Ⅳ ① d)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$		1 (Kod(Ⅲ))

---

*) 記号は上野[3]にある行列を表わしている。

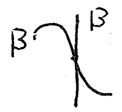
**) 数字はOgg[2]の分類番号。A, B D もOggの記号で A: elliptic curve B: 自己交叉数 -3 の P^1 C 自己交叉数 -4 の P^1 を表わす。

IV ③ a) $\begin{pmatrix} O & \begin{matrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{matrix} \\ \begin{matrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{matrix} & O \end{pmatrix}$



19

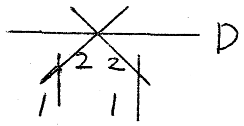
IV ③ b) $\begin{pmatrix} O & \begin{matrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{matrix} \\ \begin{matrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{matrix} & O \end{pmatrix}$



triple contact

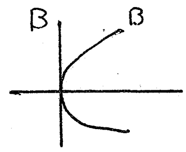
34

IV ④ a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$



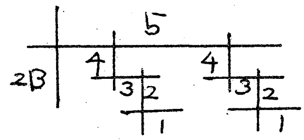
8

IV ④ b) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$



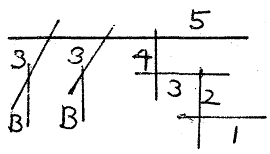
36

IV ④ c) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



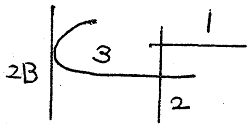
21

IV ④ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



44

IV ⑤ a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

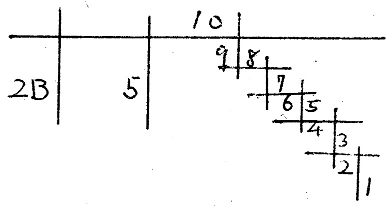


16

IV ⑤ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

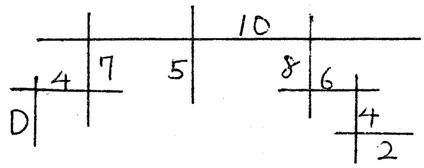
(2,5) cusp.

IV ⑤ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$



20

IV ⑤ d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$



17

— 文献 —

[1] O. Bolza ; On Binary sextics with linear transformations into themselves. Amer. J. Math 10 (1888) pp 47 ~ 70

[2] A. P. Ogg. On pencils of curves of genus two. Topology 5 (1966) pp 355 ~ 362.

[3] K. Ueno. On fibre spaces of normally polarized abelian varieties of dimension 2, I. Jour. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec IA. vol 18 (1971) pp 37 ~ 95

[4] K. Ueno. ———————— II. (to appear)