数理解析研究所講究録
第144巻 1972年 43-47

elliptic surface 上の vector bundle

名大 理　竹本吏夫

S を代数的閉体 k 上 non-singular projective surface, H を S 上 ample line bundle とする。

<u>Definition</u>　S 上の vector bundle E が <u>H-stable</u> とは, E のすべての non-trivial, non-torsion quotient sheaf F について $d(E,H)/r(E) < d(F,H)/r(F)$ が成り立つこととする。

ここで $r(F)$ は F の rank, $d(F,H)$ は $(c_1(F), H)$ である。($c_1(F)$ は F の first Chern class とする)

実は上の Definition は次の様に言ってもよい。E が H-stable とは, 任意の birational morph. $f: X \to S$ (X は non-singular projective surface) 及び $f^*(E)$ の任意の quotient <u>bundle</u> F に対して, $d(E,H)/r(E) < d(F, f^*(H))/r(F)$ が成り立つ事とする。

H-stable について; 次の事が言える。

1) line bundle は H-stable

2) H-stable $\Longleftrightarrow$ $H^{\otimes n}$-stable　$n>0$

3) E が H-stable $\Longleftrightarrow$ $E\otimes L$ が H-stable　L: line bundle

4) E が H-stable ⟺ E の dual bundle E^* が H-stable

5) H-stable ⇒ simple i.e. global endomorphism は constant のみ。

注) 1)〜5)は，任意次元の variety についても成り立つ。(なお，去年(1970)の数理研での"代数多様体，複素多様体の理論"研究集会では，ここで述べた H-stable を H-weakly stable と言った。)

次に述べる lemma は，H-stable vector bundle を具体的に決定するのに有用である。

Lemma　E を S 上 H-stable，その Euler-Poincaré characteristic $\chi(E)$ が正で，かつ $d(E^*\otimes K_S, H)$ が負ならば，$H^0(E)\neq 0$ (ここで K_S は S の canonical line bundle)

又，この lemma を用いて，S 上 rank 2 の H-stable vector bundle で numerically Chern classes $c_1(E)$, $c_2(E)$ を fix したもの全体は bounded family をなす。つまり，algebraic family に含まれることを示すことができる。

以下 vector bundle はすべて rank 2 とする。

Prop　(1), (2) のいずれかが成り立つ時，(rank 2の) vector bundle E が あるHについて H-stable ならば，すべての ample line bundle H' についても H'-stable

(1)　$c_1^2(E)-4c_2(E)>0$

(2) $c_1^2(E) - 4c_2(E) = 0$

(2a) S が geometrically ruled or abelian
or
(2b) $k = \mathbb{C}$, S が第1種 exceptional curve を含まない.

注) $c_1^2(E) - 4c_2(E) = -c_2(\mathrm{End}(E))$ だから, $N(E) = c_1^2(E) - 4c_2(E)$ とおけば, $N(E) = N(E^*) = N(E \otimes L)$ L : line bundle

1) S が abelian surface のとき, Riemann-Roch の定理を用いて, E が simple ならば, $c_1^2(E) - 4c_2(E) \leqq 0$ (但し $\mathrm{ch}\, k \neq 2$)

$c_1^2(E) - 4c_2(E) = 0$ のとき, E : H-stable $\Leftrightarrow$ E : simple 更に $k = \mathbb{C}$ のとき (See Oda : Vector bundles on abelian surfaces, Inv. Math. vol. 13 (1971)) E : simple $\Leftrightarrow$ $E = \varphi_*(L)$ ここで, φ は isogeny : $X \to S$, L は X 上 line bundle $\ker \varphi \ni {}^\forall a \neq 0$ に対して $T_a^*(L) \not\cong L$, T_a は a による translation)

C : curve, V : C 上 rank 2 の vector bundle. このとき $\mathbb{P}(V)$ を geometrically ruled surface と言う。 $p : \mathbb{P}(V) \to C$ canonical projection.

2) S が geometrically ruled surface のとき, Prop. を用いて. E が H-stable $\Rightarrow$ $c_1^2(E) - 4c_2(E) \leqq 0$. $c_1^2(E) - 4c_2(E) = 0$ のとき, E が H-stable $\Leftrightarrow$ $E = p^*(\hat{E}) \otimes L$ ここで $\hat{E}$ は C 上 stable vector bundle, L は S 上 line bundle.

$c_1^2(E)-4c_2(E)<0$ で H-stable vector bundle が完全に分類できる例を示そう。 $V=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ $a\geqq 0$, $H_{1,m}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(1)\otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m))$ $m>0$. A を rank 2 の $\mathbb{P}(V)$ 上 $H_{1,m}$-stable vector bundle で $c_1(E)=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)\otimes p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+m+1))$, $c_2(E)=0$ なるもの全体とする。 このとき, A から t-次元 projective space $\mathbb{P}^t(k)$ への bijection φ ($t=a+2m-1$) と, $\mathbb{P}^t\times_k\mathbb{P}(V)$ 上の vector bundle $\mathcal{E}$ があって, $\forall E\in A$ は $\mathcal{E}|_{\varphi(E)\times\mathbb{P}(V)}$ と同型 かつ $\dim_k H^1(End(E))=t$。

2') S が projective plane $\mathbb{P}^2$ のとき, Riemann-Roch の定理より E が simple $\Rightarrow$ $c_1^2(E)-4c_2(E)<0$。 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n)=c_1(E)$ $m=\min\{k \mid H^0(E\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(k))\neq 0\}$ とおく。 そのとき, E: simple $\Leftrightarrow$ E: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)$-stable $\Leftrightarrow$ $2m+n>0$。(Schwarzenberger) $\mathbb{P}^2$ の一点を blow up すれば geometrically ruled surface になる事を用いて, "$c_1^2(E)-4c_2(E)=-3$ なる simple bundle は, line bundle で tensor してずらすことを除けば, tangent bundle のみである" ことが言える. etc.... 注) 2頁で述べた事を用いれば, fixed chern classes $c_1(E)$, $c_2(E)$ を持つ $\mathbb{P}^2$ 上 rank 2 の simple bundle 全体は bounded family を成す。

3) S が elliptic surface のとき, まだ部分的にしか

わからない。 例えば、S が basic elliptic bundle のとき、($S \xrightarrow{\Phi} \Delta$ Δ : non-singular proj. curve) $\tilde{E}$ が Δ 上 stable $\Rightarrow$ $\Phi^*(\tilde{E})$ は $^{\forall}H$-stable。 或いは、S が basic hyperelliptic surface のとき、E が S 上 H-stable ならば、$c_1^2(E) - 4c_2(E) \leqq 0$。 etc.

注) S が basic hyperelliptic surface, $c_1^2(E) - 4c_2(E) = 0$ のとき、E が simple $\Leftrightarrow$ E : H-stable or $\exists L$: line bundle $0 \to \mathcal{O}_S \to E \otimes L \to K_S^{-1} \to 0$ non-trivial ext. ($E \otimes L$ は not H-stable)

参考文献としては、Stable vector bundles on algebraic surfaces to appear in Nagoya Math. Journal. を見て下さい。