数理解析研究所講究録
第 145 巻 1972 年 26-47

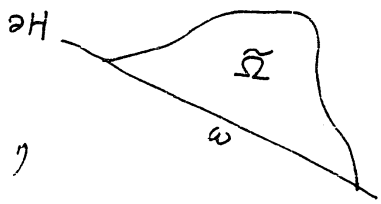
30, April, 1971

境界作用素つき線型微分作用素の値域について

大脇信一　（東大理）

内　容

§1. 序



Ω を R^n の開部分集合、ω を Ω の境界 $\partial\Omega$ とある開半空間 H の境界 ∂H の交わり $\partial\Omega \cap \partial H$ の開部分集合とし、$\tilde{\Omega} = \Omega \cup \omega$ とおく。
$P(D): C^\infty(\tilde{\Omega}) \longrightarrow C^\infty(\tilde{\Omega})$ を定数係数線型微分作用素、
$\tilde{R}^\ell \circ B(D): C^\infty(\tilde{\Omega}) \longrightarrow C^\infty(\omega)^\ell$ を定数係数線型の境界作用素とする時（細かい記号については後を参照）

$$T : C^\infty(\tilde{\Omega}) \begin{array}{l} \xrightarrow{P(D)} C^\infty(\tilde{\Omega}) \\ \qquad\quad \times \\ \xrightarrow[\tilde{R}^\ell \circ B(D)]{} C^\infty(\omega)^\ell \end{array}$$

の値域を決めるのが一つの目標である。これは

$$\begin{cases} P(D)u = f & \text{in } \tilde{\Omega} \\ B_j(D)u = f_j & \text{in } \omega \quad (1 \leq j \leq \ell) \end{cases} \qquad \text{但し } B(D) = \begin{pmatrix} B_1(D) \\ \vdots \\ B_\ell(D) \end{pmatrix}.$$

という境界値問題がいつ解けるか条件を求める事である。

ω の法線方向 vector を N とした時、0 でない定数 a により、$P(\xi + \tau N) = a\tau^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\xi)\tau^k \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ \tau \in \mathbb{R})$

と表わせるならば、T は次の様に分解される。

$$\begin{tikzcd}
 & C^\infty(\tilde{\Omega}) \arrow[r, "id."] & C^\infty(\tilde{\Omega}) & & C^\infty(\tilde{\Omega}) \\
C^\infty(\tilde{\Omega}) \arrow[ur, "P(D)"] \arrow[dr, "\tilde{R}^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})"'] & \times & \times \arrow[rr, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}"] & & \times \\
 & C^\infty(\omega)^m \arrow[r, "\tilde{B}(D)"] & C^\infty(\omega)^\ell & & C^\infty(\omega)^\ell
\end{tikzcd}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$ は同型であり、$\tilde{B}(D)$ は定数係数線型微分作用素系で良く調べられている（Ehrenpreis, 1961）。

$$T_0 : \begin{tikzcd}
 & C^\infty(\tilde{\Omega}) \\
C^\infty(\tilde{\Omega}) \arrow[ur, "P(D)"] \arrow[dr, "\tilde{R}^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})"'] & \times \\
 & C^\infty(\omega)^m
\end{tikzcd}$$

の値域は稠密である。

故に問題は T_0 が全射になるための条件を求める事に帰着される。これは

$$\begin{cases} P(D)u = f & \text{in } \tilde{\Omega} \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^j u = f_j & \text{in } \omega \quad (0 \leq j \leq m-1) \end{cases}$$

という普通の Cauchy 問題である。以下の節でこの問題のほぼ完全な答を説明する。例えば、T_0 が全射になるための必要十分条件は、$P(D)$ が H に関して発展作用素であり、かつ $\tilde{\Omega}$ が P-適切なことである。

大切なことは、ここで使う技術は Cauchy 問題に限らずすべての線型境界値問題に適用できると思われる事である。$C^\infty(\tilde{\Omega})$ や $H^{loc}_{(s)}(\Omega,\omega)$ 等の局所的函数空間で境界作用素のついた線型微分作用素の値域を決めるための必要十分条件が §2, §3 の結果からすぐに出せるのである。(例えば §8)
そこに出てきた条件の評価式は energy 不等式, Gårding 不等式、先験的評価式等より大分精密で計算が大変だと思われる。又 T-凸性の条件の幾何学的意味を調べるには、境界の特異点での Cauchy 問題の一意性や、根の特異性の一意接続定理など色々大変な道具を開発する必要がありそうである。しかし原理的には遂行可能であり、境界条件を含んだ Hilbert 空間や Banach 空間で微分作用素を閉作用素として扱う等の従来の方法よりは自然な結果が出せると期待できる。特に混合問題を自然な型で扱うことが出来そうである。

以上の理由から §2, 3 では少し精しく説明する。§4 以下は主な結果だけ列挙する。証明を入れると大変長くなるので、証明は省く。以下定義しない記号は大体において

L. Schwartz, Théorie des Distributions (1966), 又は

L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators (1963)

に従う。

§2. Frechet 空間における基本補題

E，F を（Hausdorff）局所凸空間、$T: E \longrightarrow F$ を稠密な定義域 $D(T)$ を持つ線型作用素、R を T の値域 $R(T)$ を含む F の部分空間とする。 E' を E の双対空間、$x \in E$ と $x' \in E'$ に対して $\langle x, x' \rangle = x'(x)$、$|x'|(x) = |\langle x, x' \rangle|$、$T': F' \longrightarrow E'$ を T の双対写像とする。E 上の連続 semi-norm 全体の集合を Spec E と書く。$C > 0$，$p \in \mathrm{Spec}\, E$、$x \in E$ に対し $(C \cdot p)(x) = C \cdot p(x)$ とおく。$p, q \in \mathrm{Spec}\, E$ が $p \leq q$ であるとは、任意の $x \in E$ に対し $p(x) \leq q(x)$ となる事である。 $\mathcal{B}$ が Spec E の基底であるとは、$\mathcal{B} \subset \mathrm{Spec}\, E$ かつ任意の $p \in \mathrm{Spec}\, E$ に対し $C > 0$ と $q \in \mathcal{B}$ が存在して $p \leq C \cdot q$ となる事である。 $x' \in E'$、$p \in \mathrm{Spec}\, E$ に対し

$$\|x'\|_p = \inf \{ C > 0 \; ; \; |x'| \leq C \cdot p \}$$

とおく。 但し $|x'| \leq C \cdot p$ となる $C > 0$ が存在しない時は、$\|x'\|_p = \infty$ とする。E_p を $E/\mathrm{Ker}\, p$ に $p \in \mathrm{Spec}\, E$ から導かれる norm を入れた norm 空間とし、E'_p を E_p の双対空間とする。

命題 2.1. $p \in \mathrm{Spec}\, E$ の時、norm $\|\cdot\|_p$ を持つ norm 空間 $\{ x' \in E' \; ; \; \|x'\|_p < \infty \}$ は Banach 空間 E'_p と同型である。

定義. (E, R) が T-凸 であるとは、任意の $p \in \mathrm{Spec}\,E$ に対して次の条件を満す $q \in \mathrm{Spec}\,F$ が存在する事である。$y' \in D(T')$ が $\|T'(y')\|_p < \infty$ を満すならば、y' は $R \cap \mathrm{Ker}\,q$ 上で 0 になる。

定理 2.2. E, F を Frechet 空間、$T: E \longrightarrow F$ を稠密な定義域を持つ線型閉作用素、R を $R(T)$ を含む F の閉部分空間、$\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ を $\mathrm{Spec}\,E$, $\mathrm{Spec}\,F$ のそれぞれの基底とする。この時 $R(T) = R$ となるための必要十分条件は、次の (1) と (2) が成り立つ事である。又 (2) と (3) は同値である。

(1) (E, R) は T-凸 である。

(2) 任意の $p \in \mathcal{B}_E$、$q \in \mathcal{B}_F$ に対し、次の条件を満す $C > 0$ と $r \in \mathcal{B}_F$ が存在する。$\mathrm{Ker}\,q$ で 0 になる任意の $y' \in D(T')$ に対して、$\mathrm{Ker}\,q$ で 0 になる $z' \in D(T')$ が存在して、R 上で $y' = z'$、かつ $\|z'\|_r \leq C \|T'(z')\|_p$ を満す。

(3) 任意の $y \in R$ と $q \in \mathcal{B}_F$ に対して、$q(y - T(x)) = 0$ となる $x \in D(T)$ が存在する。

この定理の証明は、解析的な条件を幾何学的条件に直し、開写像定理の証明に帰着させて行なうが、かなり長くなる。

開写像定理が十分一般化されているので（*Raikov* (1966), *Schwartz*, *Martineau*, *De Wilde*, *etc.*）、この定理の E, F の条件も $\mathcal{D}'(\Omega)$、$\mathcal{D}'(\Omega,\omega)$、$\mathcal{D}'_{+}(\overline{\Omega})$ 等の空間に適用できるようにゆるめられると思う。　以下の方針はこの定理の条件を具体的な空間について計算していく事である。

命　題　2.3.　　$\tau : E \longrightarrow F$ を $D(\tau)=E$、$R(\tau)=F$ で連続開線型写像とする。　$\mathcal{B}_E$ を Spec E の基底とする時、

$$\{F \ni y \longmapsto \inf\{p(x) ;\ \tau(x)=y\} ;\ p \in \mathcal{B}_E\}$$

は Spec F の基底であり、任意の $q \in \mathrm{Spec}\,F$ に対して

$$F'_q \overset{t_\tau}{\cong} E'_{q\circ\tau} \quad \text{かつ} \quad F' \overset{t_\tau}{\cong} (\mathrm{Ker}\,\tau)^{\circ} \quad (\text{汎弱同型})$$

である。　但し $(\mathrm{Ker}\,\tau)^{\circ} = \{x' \in E' ;\ x' = 0 \text{ in } \mathrm{Ker}\,\tau\}$ である。

命　題　2.4.　　$j : F \hookrightarrow E$ を F から $j(F)$ 上への同型写像とする。　$\mathcal{B}_E$ を Spec E の基底とする時、

$\{p \circ j ;\ p \in \mathcal{B}_E\}$ は Spec F の基底であり、任意の $p \in \mathrm{Spec}\,E$ に対して、$t_j : E'_p \longrightarrow F'_{p\circ j}$ は連続開全射で

$$\|y'\|_{p\circ j} = \inf\{\|x'\|_p ;\ t_j(x') = y'\} \quad (y' \in F') \text{ である。}$$

注　意.　上の命題で τ, j の双対写像を t_τ, t_j と書いた。（前には τ', j' を使った）　以下両方の記号を使う。

命題 2.5. E_j $(1 \leq j \leq \ell)$ を局所凸空間とし、$F = \prod_{j=1}^{\ell} E_j$ とする。$\mathcal{B}_j$ $(1 \leq j \leq \ell)$ をそれぞれ $\mathrm{Spec}\, E_j$ の基底とする時、

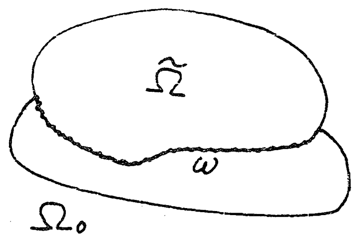
$$\{ F \ni (x_j)_{1 \leq j \leq \ell} \longmapsto \sum_{j=1}^{\ell} p_j(x_j) \; ; \; p_j \in \mathcal{B}_j \; (1 \leq j \leq \ell) \}$$

は $\mathrm{Spec}\, F$ の基底である。$q((x_j)_{1 \leq j \leq \ell}) = \sum_{j=1}^{\ell} p_j(x_j)$ とする時、$F'_q \cong \prod_{j=1}^{\ell} (E_j)'_{p_j}$ である。

$D(j) = E$ かつ連続線型(開写像と限らない)な単射 $j : F \longrightarrow E$ が存在する時、$F \hookrightarrow E$ と書く。

§3. 空間 $\mathcal{F}(\Omega, \omega)$ と $\mathcal{F}'_+(\tilde{\Omega})$.

Ω, Ω_0 を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合で $\Omega \subset \Omega_0$、ω を $\partial\Omega$ の開部分集合、かつ $\Omega_0 \cap (\partial\Omega \setminus \omega) = \phi$ とする。



$\tilde{\Omega} = \Omega \cup \omega$ とおく。

定義. ω の局所有限開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ と開錐 $C_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n ; a_\alpha |x|^2 < \langle x, \vartheta_\alpha \rangle, |x| < b_\alpha\}$ $(\alpha \in A)$ $(0 \leq a_\alpha < 1, b_\alpha > 0, \vartheta_\alpha \neq 0)$ の族が存在して、$U_\alpha + C_\alpha \subset \Omega$ かつ $U_\alpha - C_\alpha \subset \mathbb{R}^n \setminus \tilde{\Omega}$ を満す時、$\tilde{\Omega}$ は制限的錐条件を満すと言う。

$\mathcal{F}(\Omega_0)$ を $\mathcal{D}'(\Omega_0)$ の部分空間とし、$\rho : \mathcal{F}(\Omega_0) \longrightarrow \mathcal{F}(\Omega)$ を制限写像とする。 この時、

$$\mathcal{F}(\Omega, \omega) = \{ u \in \mathcal{F}(\Omega) ;\ \rho(w) = u \text{ となる } w \in \mathcal{F}(\Omega_0) \text{ が存在} \}$$

$$\mathcal{F}_+(\tilde{\Omega}) = \{ u \in \mathcal{F}(\Omega_0) ;\ supp\ u \subset \tilde{\Omega} \}$$

と定義し、$\mathcal{F}(\Omega, \omega)$ には ρ によって $\mathcal{F}(\Omega_0)$ から導かれる位相を入れ、$\mathcal{F}_+(\tilde{\Omega})$ には $\mathcal{F}(\Omega_0)$ の部分空間としての位相を入れる。

$C^m(\tilde{\Omega}) = \{ u \in C(\tilde{\Omega}) ;\ u|_\Omega \in C^m(\Omega)$ かつ $u_\alpha \in C(\tilde{\Omega})$ $(|\alpha| \leq m)$ が存在して $D^\alpha(u|_\Omega) = u_\alpha|_\Omega$ $(|\alpha| \leq m) \}$

と定義する。 $(0 \leq m$: 自然数 $\leq \infty)$ ω が C^m-級ならば

$C^m(\tilde{\Omega}) \cong \mathcal{E}^m(\Omega, \omega)$ である。

命 題 3.1. $\mathcal{F}(\Omega_0)$ が Frechet 空間ならば、$\mathcal{F}(\Omega, \omega)$、$\mathcal{F}_+(\tilde{\Omega})$ も Frechet 空間である。

命 題 3.2. $\mathcal{F} = \mathcal{D}^m, \mathcal{E}^m, \mathcal{E}'^m, \mathcal{D}'^m$ $(0 \leq m \leq \infty)$ の時、

$$\mathcal{F}(\Omega, \omega)' \overset{tp}{\cong} \mathcal{F}'_+(\tilde{\Omega}) \quad \text{(汎弱同型)}$$

$$\mathcal{F}_+(\tilde{\Omega})' \cong \mathcal{F}'(\Omega, \omega) \quad \text{(汎弱同型)}$$

である。

命 題 3.3. $1 \leq p < \infty$、$k \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$、かつ $\tilde{\Omega}$ が制限的錐条件を満すならば、

$$\mathcal{B}^{loc}_{p,k}(\Omega, \omega)' \overset{tp}{\cong} (\mathcal{B}^{loc}_{p,k})'_+(\tilde{\Omega}) \quad \text{(汎弱同型)}$$

$$(\mathcal{B}_{p,k}^{loc})_+(\tilde{\Omega})' \cong (\mathcal{B}_{p,k}^{loc})'(\Omega,\omega)$$ （汎弱同型）である。

命　題　3.4.　$E=\mathcal{E}(\Omega,\omega)$、$s\in\mathbb{R}$、$\chi\in C_0^\infty(\Omega_0)$、$K_1\subset\subset K=\mathrm{supp}\,\chi$、かつ任意の $\varphi\in E$ に対し

$$q(\varphi)=\inf\{\|\chi\cdot\psi\|_{(s)}\ ;\ \psi\in C_0^\infty(\Omega_0)\ \text{かつ}\ \psi|_\Omega=\varphi\}$$

とおくならば、

$\{u\in H_{(-s)}\ ;\ \mathrm{supp}\,u\subset\tilde{\Omega}\cap K_1\}\hookrightarrow E_q'\hookrightarrow\{u\in H_{(-s)}\ ;\ \mathrm{supp}\,u\subset\tilde{\Omega}\cap K\}$　である。

命　題　3.5.　$1\leq p<\infty$、$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$、$k\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$、$E=\mathcal{B}_{p,k}^{loc}(\Omega,\omega)$、$\chi\in C_0^\infty(\Omega_0)$、$K_1\subset\subset K=\mathrm{supp}\,\chi$、

$$q(\varphi)=\inf\{\|\chi\cdot\psi\|_{p,k}\ ;\ \psi\in\mathcal{B}_{p,k}^{loc}(\Omega_0)\ \text{かつ}\ \psi|_\Omega=\varphi\}$$

（$\varphi\in E$）、かつ $\tilde{\Omega}$ は制限的錐条件を満すとする。この時、

$\{u\in\mathcal{B}_{p',\frac{1}{k}}\ ;\ \mathrm{supp}\,u\subset\tilde{\Omega}\cap K_1\}\hookrightarrow E_q'\hookrightarrow\{u\in\mathcal{B}_{p',\frac{1}{k}}\ ;\ \mathrm{supp}\,u\subset\tilde{\Omega}\cap K\}$　である。

命　題　3.6.　命題3.4と同じ仮定のもとで、$K\subset\subset K_2\subset\subset\Omega_0$ とする時、$\{\varphi\in E\ ;\ \varphi=0\ \text{in}\ \Omega\cap K_2\}\subset\mathrm{Ker}\,q\subset\{\varphi\in E\ ;\ \varphi=0\ \text{in}\ \Omega\cap K\}$、かつ任意の $u\in\mathcal{E}_+'(\tilde{\Omega})$ に対して u が $\mathrm{Ker}\,q$ 上で消える事は $\mathrm{supp}\,u\subset\tilde{\Omega}\cap K$ と同値である。

命　題　3.7.　命題3.5と同じ仮定のもとで、$K \Subset K_2 \Subset \Omega_0$ とする時、$\{\varphi \in E\,;\, \varphi = 0 \text{ in } \Omega \cap K_2^\circ\} \subset \mathrm{Ker}\, q \subset \{\varphi \in E\,;\, \varphi = 0 \text{ in } \Omega \cap K^\circ\}$、かつ任意の $u \in (\mathcal{B}_{p,k}^{loc})'_+(\hat{\Omega})$ に対して、$\mathrm{supp}\, u \subset \hat{\Omega} \cap K_1$ ならば u は $\mathrm{Ker}\, q$ 上で0になり、u が $\mathrm{Ker}\, q$ 上で0になるならば $\mathrm{supp}\, u \subset \hat{\Omega} \cap K$ となる。

命　題　3.8.　$E = \mathcal{E}_+(\hat{\Omega})$、$s \in \mathbb{R}$、$\chi \in C_0^\infty(\Omega_0)$、$K_1 \Subset K = \mathrm{supp}\, \chi$、$q(\varphi) = \|\chi \cdot \varphi\|_{(s)}$　$(\varphi \in E)$　とすると、

$\{u \in \mathcal{E}'(\Omega, \omega)\,;\, \mathrm{supp}\, u \subset \Omega \cap K_1$、かつ $v|_\Omega = u$ となる $v \in H_{(-s)}$ が存在する$\} \hookrightarrow E'_q \hookrightarrow \{u \in \mathcal{E}'(\Omega, \omega)\,;\, \mathrm{supp}\, u \subset \Omega \cap K$、かつ $v|_\Omega = u$ となる $v \in H_{(-s)}$ が存在する$\}$ である。ここで u の norm は $\inf\{\|v\|_{(-s)}\,;\, v \in H_{(-s)}$ かつ $v|_\Omega = u\}$ とする。

命　題　3.9.　$1 \le p < \infty$、$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$、$k \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$、$E = (\mathcal{B}_{p,k}^{loc})_+(\hat{\Omega})$、$\chi \in C_0^\infty(\Omega_0)$、$K_1 \Subset K = \mathrm{supp}\, \chi$、$q(\varphi) = \|\chi \cdot \varphi\|_{p,k}$　$(\varphi \in E)$　とし、$\hat{\Omega}$ は制限的錐条件を満すとする。　この時、

$\{u \in (\mathcal{B}_{p,k}^{loc})'(\Omega, \omega)\,;\, \mathrm{supp}\, u \subset \Omega \cap K_1$ かつ $v|_\Omega = u$ となる $v \in \mathcal{B}_{p',\frac{1}{k}}$ が存在する$\} \hookrightarrow E'_q \hookrightarrow \{u \in (\mathcal{B}_{p,k}^{loc})'(\Omega, \omega)\,;$ $\mathrm{supp}\, u \subset \Omega \cap K$ かつ $v|_\Omega = u$ となる $v \in \mathcal{B}_{p',\frac{1}{k}}$ が存在する$\}$

である。 ここで u の norm は $\inf\{\|v\|_{p',\frac{1}{k}}\ ;\ v\in\mathcal{B}_{p',\frac{1}{k}}$ かつ $v|_{\Omega}=u\}$ とおく。

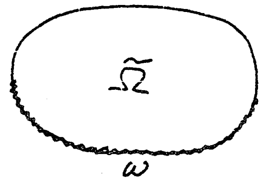
命題 3.10. $1\le p<\infty$、$k\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$、$K\subset\subset\Omega_0$、$K\subset\subset K'$、かつ $\tilde{\Omega}$ は制限的錐条件を満すとする。この時 $C>0$ が存在して、$\Omega\cap\mathrm{supp}\,u\subset\Omega\cap K$ となる任意の $u\in\mathcal{D}(\Omega_0)$ に対して

$$\inf\{\|v\|_{p,k}\ ;\ v\in\mathcal{B}_{p,k}\ \text{かつ}\ v=u\ \text{in}\ \Omega\}$$
$$\le\inf\{\|v\|_{p,k}\ ;\ v\in\mathcal{D}、v=u\ \text{in}\ \Omega、\text{かつ}\ \mathrm{supp}\,u\subset K'\}$$
$$\le C\inf\{\|v\|_{p,k}\ ;\ v\in\mathcal{B}_{p,k}\ \text{かつ}\ v=u\ \text{in}\ \Omega\}.$$

が成り立つ。

§4. 空間 $\mathcal{F}(\Omega,\omega)$ における定数係数線型微分作用素

定義. $\tilde{\Omega}$ が P-凸 であるとは、任意の compact 集合 $K\subset\tilde{\Omega}$ に対して、compact 集合 $K'\subset\tilde{\Omega}$ が存在して、$u\in\mathcal{D}_+(\tilde{\Omega})$ が $\mathrm{supp}\,P(-D)u\subset K$ を満すならば $\mathrm{supp}\,u\subset K'$ となる事を言う。



定理 4.1. $1\le p<\infty$、$k\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$、かつ $\tilde{\Omega}$ が制限的錐条件を満す時、次の条件 (1)～(4) は同値である。

(1) $\tilde{\Omega}$ は P-凸 である。

(2) $P(D) : \mathcal{E}(\Omega, \omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega, \omega)$ は全射である。

(3) $P(D) : \mathcal{D}'(\Omega, \omega) \longrightarrow \mathcal{E}(\Omega, \omega)$ は全射である。

(4) $P(D) : \mathcal{B}^{loc}_{p,k\tilde{P}}(\Omega, \omega) \longrightarrow \mathcal{B}^{loc}_{p,k}(\Omega, \omega)$ は全射である。

定理 4.2. 次の場合 $\tilde{\Omega}$ は P-凸である。

(1) Ω_0 を P-凸 (Malgrange 1955) にとれる。

(2) $\tilde{\Omega}$ は凸集合である。

(3) P は楕円型である。

逆に、一つの定まった ω を持つ任意の $\tilde{\Omega}$ が P-凸 ならば、P は楕円型である。又 $\tilde{\Omega}$ が連結で ω が平坦、かつ任意の P に対して $\tilde{\Omega}$ が P-凸 ならば、$\tilde{\Omega}$ は凸集合である。

定理 4.3. $n = 2$、ω は平坦、かつ $\tilde{\Omega}$ は連結とする。この時 $\tilde{\Omega}$ が P-凸 であるための必要十分条件は、任意の特性直線と $\tilde{\Omega}$ の交わりが連結になることである。

定理 4.4. $P(D)$ の主要部 $P_M(D)$ が実係数を持ち、ある $\omega' \subset\subset \omega$ に関して $\partial\Omega \setminus \omega'$ が C^2-級であるとする。この時 $\tilde{\Omega}$ が P-凸 ならば、境界 $\partial\Omega$ が単一特性的な $\partial\Omega \setminus \omega$ 上の任意の点において、$\partial\Omega$ の法線曲率は接平面上の培特性方向に関

して非負である。

定　理　4.5.　$P_M(D)$ は実係数を持ち、ある $\omega'\subset\subset\omega$ に関して $\partial\Omega\setminus\omega'$ が C^2-級であるとする。$\partial\Omega$ が単一特性的な $\partial\Omega\setminus\omega$ 上の任意の点において、$\partial\Omega$ の法線曲率が接平面上の培特性方向に関して常に正であるとする。この時、$\tilde{\Omega}$ は P-凸である。

定　義.　$\tilde{\Omega}$ が強 P-凸であるとは、$\tilde{\Omega}$ が P-凸であり、かつ任意の compact 集合 $K\subset\tilde{\Omega}$ に対して次の条件を満す compact 集合 $K'\subset\tilde{\Omega}$ が存在する事である。$u\in\mathcal{E}'_+(\tilde{\Omega})$ が sing. supp $P(-D)u\subset K$ を満すならば sing supp $u\subset K'$ である。

定　理　4.6.　$P(D):\mathcal{D}'(\Omega,\omega)\longrightarrow\mathcal{D}'(\Omega,\omega)$ が全射なための必要十分条件は、$\tilde{\Omega}$ が強 P-凸なことである。

強 P-凸性についても色々特徴付けができる。

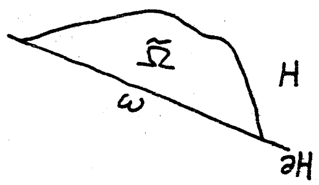
定　理　4.7.　$l, m\in\mathbb{N}$、$P(D)=(P_{jk}(D))_{\substack{1\le j\le m\\ 1\le k\le l}}$、かつ $\tilde{\Omega}$ を凸集合とする時、$P(D):\mathcal{E}(\Omega,\omega)^l\longrightarrow\mathcal{E}(\Omega,\omega)^m$ の値域は

$\{u\in\mathcal{E}(\Omega,\omega)^m;\ Q(\xi)\in\mathbb{C}[\xi]^m\ \&\ Q(\xi)P(\xi)=0$ ならば $Q(D)u=0\}$

である。

§5. 空間 $\mathcal{F}_+(\tilde{\Omega})$ における定数係数線型微分作用素

以下の節では簡単のため ω は開半空間 H の境界 ∂H 上にあるとする。



定 義. $\tilde{\Omega}$ が P-適切であるとは、任意の compact 集合 $K\subset\tilde{\Omega}$ に対して compact 集合 $K'\subset\tilde{\Omega}$ が存在し、任意の $u\in\mathcal{D}(\Omega,\omega)$ が $\mathrm{supp}\,P(-D)u\subset\Omega\cap K$ を満すならば $\mathrm{supp}\,u\subset\Omega\cap K'$ となることをいう。

定 理 5.1. $1\leq p<\infty$、$k\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ の時、次の条件 (1)～(3) は同値である。

(1) $P(D)$ は H に関して発展作用素であり (cf. Hörmander, Ann. Math. 1968)、かつ $\tilde{\Omega}$ は P-適切である。

(2) $P(D):\mathcal{E}_+(\tilde{\Omega})\longrightarrow\mathcal{E}_+(\tilde{\Omega})$ は全射である。

(3) $P(D):(\mathcal{B}^{loc}_{p,k\tilde{P}})_+(\tilde{\Omega})\longrightarrow(\mathcal{B}^{loc}_{p,k})_+(\tilde{\Omega})$ は全射である。

定 理 5.2. ω が $P(D)$ に関して非特性的な場合には、上の条件 (1)～(3) は次の条件 (1′) と同値である。

(1′)　PはHに関して双曲型 (cf. Gårding, Acta. Math. 1950) であり、かつ $\tilde{\Omega}$ はP-適切である。

予　想.　　$\tilde{\Omega}$ が連結な場合には、次の条件(1)〜(3)は同値である。但し、$1\leq p<\infty$、$k\in\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.

(1)　PはHに関して双曲型であり、かつ $\tilde{\Omega}$ はP-適切である。

(2)　$P(D):\mathcal{E}_+(\tilde{\Omega})\longrightarrow\mathcal{E}_+(\tilde{\Omega})$ は全単射である。

(3)　$P(D):(\mathcal{B}^{loc}_{p,k\tilde{P}})_+(\tilde{\Omega})\longrightarrow(\mathcal{B}^{loc}_{p,k})_+(\tilde{\Omega})$ は全単射である。

実際、$\tilde{\Omega}=H$ の場合、及び $n=2$ の場合にはこの予想は成り立つ。問題なのは Cauchy 問題の解の大域的な一意性である。

定　理　5.3.　一つの定まった ω に対し、任意の $\tilde{\Omega}$ がP-適切になるための必要十分条件は、Pが楕円型になる事である。

定　理　5.4.　$\tilde{\Omega}$ が任意の $P(D)$ に対してP-適切になるための必要十分条件は、$\tilde{\Omega}=\{x\in\mathbb{R}^n;\ a\leq\langle x,N\rangle<b\}$ $(-\infty<a<b\leq\infty)$ と書けることである。

定理 5.5. $n=2$ かつ $\hat{\Omega}$ が連結とする時、$\hat{\Omega}$ が P-適切となるための必要十分条件は、任意の特性直線と $\hat{\Omega}\cup(\mathbb{R}^n\setminus H)$ の交わりが連結になる事である。

定理 5.6. $P(D)$ の主要部 $P_M(D)$ が実係数を持ち、$\partial\Omega\setminus\omega$ が C^2-級とする。$\hat{\Omega}$ が P-適切ならば、次の条件(1)(2)が成り立つ。

(1) 境界が単一特性的な $\partial\Omega\setminus\partial H$ 上の任意の点において、境界の法線曲率は接平面上の陪特性方向に関して非負である。

(2) $\partial\omega$ 上の任意の点 x_0 の近傍において、x_0 で単一特性的な $\partial\omega$ を通る特性曲面が x_0 の近傍で高々 M 枚存在するが、その曲面は x_0 の十分近くで Ω と交わらない。

定理 5.7. $P(D)$ が準楕円型ならば、次の条件(1)と(2)は同値である。

(1) ある $\tau_0\in\mathbb{R}$ が存在して、任意の $\xi\in\mathbb{R}^n$ と $\tau<\tau_0$ に対して $P(\xi+i\tau N)\neq 0$ である。ここで、N は H の法線方向 vector。更に、$\hat{\Omega}$ は P-適切である。

(2) $P(D):\mathcal{D}'_+(\hat{\Omega})\longrightarrow\mathcal{D}'_+(\hat{\Omega})$ は全射である。

定義. $\hat{\Omega}$ が強 P-適切であるとは、$\hat{\Omega}$ が P-適切で

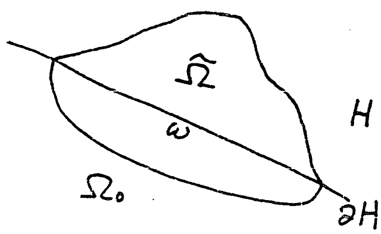
あり、かつ任意の compact 集合 $K \subset \tilde{\Omega}$ に対して次の条件を満す compact 集合 $K' \subset \tilde{\Omega}$ が存在することである。$u \in \mathcal{E}'(\Omega, \omega)$ が $sing\ supp\ P(-D)u \subset \Omega \cap K$ を満すならば $sing\ supp\ u \subset \Omega \cap K'$ である。

定　理　5.8.　次の条件 (1), (2) は同値である。

(1)　$P(D)$ は H に関して発展作用素であり、かつ $\tilde{\Omega}$ は強 P-適切である。

(2)　$P(D) : \mathcal{D}'_{+}(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{D}'_{+}(\tilde{\Omega})$ は全射である。

§6.　境界作用素



$R : \mathcal{F}(\Omega_0) \longrightarrow \mathcal{F}(\omega)$,

$\tilde{R} : C^{\infty}(\tilde{\Omega}) \longrightarrow C^{\infty}(\omega)$ を制限写像、

$\frac{\partial}{\partial n}$ を ω の法線方向の微分とし、

$$B^m\left(\frac{\partial}{\partial n}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\partial}{\partial n} \\ \vdots \\ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{m-1} \end{pmatrix}, \quad R^m = \underbrace{\begin{pmatrix} R & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & R \end{pmatrix}}_{m}, \quad \tilde{R}^m = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{R} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{R} \end{pmatrix}}_{m}, \quad R^N \circ B^N\left(\frac{\partial}{\partial n}\right) = \begin{pmatrix} R \\ R \circ \frac{\partial}{\partial n} \\ R \circ \left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

とおく。　${}^tR$ は R の双対写像を表わす。

次の結果は大部分本質的に新しいものではないと思われる。

(1)　$R^m \circ B^m\left(\frac{\partial}{\partial n}\right) : \mathcal{D}(\Omega_0) \longrightarrow \mathcal{D}(\omega)^m$ は連続全射である。

(2)　〃　$: \mathcal{E}(\Omega_0) \longrightarrow \mathcal{E}(\omega)^m$　〃

(3)　〃　$: \mathcal{D}^{\ell}(\Omega_0) \longrightarrow \prod_{k=0}^{m-1} \mathcal{D}^{\ell-k}(\omega)$　〃　$(\ell = m-1, m, \cdots)$

(4) $R^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})$: $\mathcal{E}^l(\Omega_0) \longrightarrow \prod_{k=0}^{m-1} \mathcal{E}^{l-k}(\omega)$ は連続全射である。
$(l = m-1, m, \cdots)$

(5) 〃 : $H^{loc}_{(l,s)}(\Omega_0) \longrightarrow \prod_{k=0}^{m-1} H^{loc}_{(l+s-k-\frac{1}{2})}(\omega)$ 〃 $(l \geqq m, s \in \mathbb{R})$

(6) $R^N \circ B^N(\frac{\partial}{\partial n})$: $\mathcal{D}(\Omega_0) \longrightarrow \mathcal{D}(\omega)^N$ は連続で値域は $\{u \in \mathcal{D}(\omega)^N;$ $\mathrm{supp}\, u \subset\subset \omega\}$ である。

(7) 〃 : $\mathcal{E}(\Omega_0) \longrightarrow \mathcal{E}(\omega)^N$ は連続全射である。

(8) $R^l \circ B(D)$: $\mathcal{E}(\Omega_0) \longrightarrow \mathcal{E}(\omega)^l$ は連続で、ω が凸集合ならば値域は $\{u \in \mathcal{E}(\omega)^l;\ Q(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]^l,\ Q(\xi)B(\xi) \equiv 0,\ \frac{\partial}{\partial \tau}Q(\xi + \tau N) \equiv 0$ ならば $Q(D)u = 0$ である。$\}$ である。

(9) 制限写像 $\mathcal{D}^m(\Omega_0) \longrightarrow C_0^m(\tilde{\Omega})$ は連続全射である。$(0 \leqq m \leqq \infty)$

(10) 〃 $\mathcal{E}^m(\Omega_0) \longrightarrow C^m(\tilde{\Omega})$ 〃

以下この節の終りまで簡単のために $H = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n;$ $x_n \geqq 0\}$ とする。 $R^m \circ B^m(D_n)$ の双対写像は $\sum_{k=0}^{m-1} (-D_n)^k \circ {}^tR$ であるが、ここでは $\sum_{k=0}^{m} D_n^k \circ {}^tR$ の値域を調べる。

(11) $\sum_{k=0}^{m} D_n^k \circ {}^tR$: $\mathcal{D}(\omega)^{m+1} \longrightarrow \{u \in \mathcal{D}_{n-1} \hat{\otimes} \mathcal{E}_1'^m(\Omega_0);\ \mathrm{supp}\, u \subset \omega\}$ は連続全単射である。

(12) 〃 : $\mathcal{E}(\omega)^{m+1} \longrightarrow \{u \in \mathcal{E}_{n-1} \hat{\otimes} \mathcal{D}_1'^m(\Omega_0);\ \mathrm{supp}\, u \subset \omega\}$ 〃

(13) 〃 : $\mathcal{E}'(\omega)^{m+1} \longrightarrow \{u \in \mathcal{E}'_{n-1} \hat{\otimes} \mathcal{E}_1'^m(\Omega_0);\ \mathrm{supp}\, u \subset \omega\}$ 〃

(14) 〃 : $\prod_{k=0}^{m} \mathcal{E}'^{m-k}(\omega) \longrightarrow \{u \in \mathcal{E}'^m(\Omega_0);\ \mathrm{supp}\, u \subset \omega\}$ 〃

(15) 〃 : $\prod_{k=0}^{m} \mathcal{D}'^{m-k}(\omega) \longrightarrow \{u \in \mathcal{D}'^m(\Omega_0);\ \mathrm{supp}\, u \subset \omega\}$ 〃

(16) $\sum_{k=0}^{m} D_n^k \circ {}^tR : \mathcal{D}'(\omega)^{m+1} \longrightarrow \{ u \in \mathcal{D}'_{n-1} \hat{\otimes} \mathcal{D}'^m_1(\Omega_0) ;\ supp\, u \subset \omega \}$ は

連続全単射である。

§7. 境界作用素つき定数係数線型微分作用素

この節では、ある0でない定数 a によって

$$P(\xi + \tau N) = a\tau^m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(\xi)\tau^k \quad (\xi \in \mathbb{R}^n,\ \tau \in \mathbb{R})$$

と書ける、即ち P は N 方向に正規である、と仮定する。

補題 7.1. 次の二つの条件は同値である。

(1) $P(D) : \mathcal{E}_+(\tilde{\Omega}) \longrightarrow \mathcal{E}_+(\tilde{\Omega})$ は全射（単射）である。

(2) $C^\infty(\tilde{\Omega}) \xrightarrow[\tilde{R}^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})]{P(D)} C^\infty(\tilde{\Omega}) \times C^\infty(\omega)^m$ は全射（単射）である。

定理 7.2. 次の二つの条件は同値である。

(1) $P(D)$ は H に関して発展作用素であり、かつ $\tilde{\Omega}$ は P-適切である。

(2) $C^\infty(\tilde{\Omega}) \xrightarrow[\tilde{R}^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})]{P(D)} C^\infty(\tilde{\Omega}) \times C^\infty(\omega)^m$ は全射である。

定理 7.3. $P(D)$ が H に関して発展作用素、$\tilde{\Omega}$ が P-適切、ω が凸集合、かつ $B(D)$ が定数係数線型微分作用素系とする。この時、$C^\infty(\tilde{\Omega}) \xrightarrow[\tilde{R}^\ell \circ B(D)]{P(D)} C^\infty(\tilde{\Omega}) \times C^\infty(\omega)^\ell$ の値域は、

$\{(f, f') \in C^\infty(\tilde{\Omega}) \times C^\infty(\omega)^\ell$; $Q(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$、$Q'(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]^\ell$、$Q(\xi)P(\xi) + Q'(\xi)B(\xi) \equiv 0$、かつ $\frac{\partial}{\partial\tau}Q'(\xi + \tau N) \equiv 0$ ならば ω 上で $Q(D)f + Q'(D)f' = 0$ である。$\}$ である。

定　理　7.4.　ω が P に関して非特性的な場合には、次の二つの条件は同値である。

(1)　P は H に関して双曲型であり、かつ $\tilde{\Omega}$ は P-適切である。

(2)

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\tilde{\Omega}) \arrow[r, "P(D)"] \arrow[ddr, "\tilde{R}^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})"'] & C^\infty(\tilde{\Omega}) \\ & \times \\ & C^\infty(\omega)^m \end{tikzcd}$$

は全射である。

定　理　7.5.　$n = 2$、かつ $\tilde{\Omega}$ が連結ならば、次の二つの条件は同値である。

(1)　P は H に関して双曲型であり、かつ $\tilde{\Omega}$ は P-適切である。

(2)

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\tilde{\Omega}) \arrow[r, "P(D)"] \arrow[ddr, "\tilde{R}^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})"'] & C^\infty(\tilde{\Omega}) \\ & \times \\ & C^\infty(\omega)^m \end{tikzcd}$$

は全単射である。

定　理　7.6.　次の二つの条件は同値である。

(1)　$P(D)$ は H および $\mathbb{R}^n \setminus H^\circ$ に関して発展作用素であり、かつ $\tilde{\Omega}$ と $\Omega_0 \setminus \Omega$ が共に P-適切である。

(2)

$$\begin{tikzcd} C^\infty(\Omega_0) \arrow[r, "P(D)"] \arrow[ddr, "R^m \circ B^m(\frac{\partial}{\partial n})"'] & C^\infty(\Omega_0) \\ & \times \\ & C^\infty(\omega)^m \end{tikzcd}$$

は全射である。

定　理　7.7.　$n = 2$、かつ Ω_0 が連結ならば、次の二つの条件は同値である。

(1) P は H に関して双曲型であり、かつ $\hat{\Omega}$ と $\Omega_0\setminus\Omega$ が共に P-適切である。

(2)
$$\begin{tikzcd} C^\infty(\Omega_0) \arrow[r, "P(D)"] \arrow[ddr, "R^n\circ B^n(\frac{\partial}{\partial x_n})"'] & C^\infty(\Omega_0) \\ & \times \\ & C^\infty(\omega)^m \end{tikzcd}$$
は全単射である。

§8. 境界作用素つき劣決定系、および変数係数の場合

以下簡単のために、$H=\overline{R^n_+}$ で ω は $\{x_n=0\}$ 上にあるとする。

参考のために、§2、3 を用いてすぐに出せる次の色々な作用素についての条件をあげておく。

定　理　8.1.
$$\begin{tikzcd} C^\infty(\tilde{\Omega}) \arrow[r, "P(D)"] \arrow[ddr, "R^n\circ B^n(\frac{\partial}{\partial x_n})"'] & C^\infty(\tilde{\Omega})^\ell \\ & \times \\ & C^\infty(\omega)^m \end{tikzcd}$$
の値域が

$R=\{(f,f')\in C^\infty(\tilde{\Omega})^\ell\times C^\infty(\omega)^m\ ;\ Q(\xi)\in \mathbb{C}[\xi]^\ell$、$Q(\xi)P(\xi)\equiv 0$ ならば $Q(D)f=0\}$ となるための条件は次の (1)、(2) である。

(1) 任意の $s\in N$、compact 集合 $K\subset\tilde{\Omega}$ に対して、$t\in N$ と $C>0$ が存在して、任意の $(u,u')\in\mathcal{E}'_+(K)^\ell\times\mathcal{E}'_+(K\cap\omega)^m$ に対して次の条件を満す $(v,v')\in\mathcal{E}'_+(K)^\ell\times\mathcal{E}'_+(K\cap\omega)^m$ が存在する。任意の $(f,f')\in R$ に対し、$\langle f,u\rangle+\langle f',u'\rangle=\langle f,v\rangle+\langle f',v'\rangle$ かつ $\|v\|_{(-t)}+\|v'\|_{(-t)}\leqq C\left(\int\left|\sum_{j=1}^{\ell}P_j(-\xi)\hat{v}_j(\xi)+\sum_{k=0}^{m-1}(-\xi_n)^k\hat{v}'_k(\xi')\right|^2(1+|\xi|^2)^{-s}d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$ を満す。

(2) 任意の $s\in N$、compact 集合 $K\subset\tilde{\Omega}$ に対し、次の条件を満す compact 集合 $K'\subset\tilde{\Omega}$ が存在する。$(u,u')\in\mathcal{E}'_+(\tilde{\Omega})^l\times\mathcal{E}'(\omega)^m$、$(f,f')\in R$ が ${}^tP(D)u+\sum_{k=0}^{m-1}(-D_n)^k\circ{}^tR\,u'_k\in H_{(-s)}$、$\mathrm{supp}\,({}^tP(D)u+\sum_{k=0}^{m-1}(-D_n)^k\circ{}^tR\,u'_k)\subset K$、$f=0$ in K'、$f'=0$ in $K'\cap\omega$ を満すならば、$\langle f,u\rangle+\langle f',u'\rangle=0$ である。

定　理　8.2.　$P(x,D):\mathcal{E}_+(\tilde{\Omega})\longrightarrow\mathcal{E}_+(\tilde{\Omega})$ が全射であるための条件は次の (1)、(2) である。

(1) 任意の $s\in N$、compact 集合 $K\subset\tilde{\Omega}$ に対して $t\in N$、$C>0$ が存在し、$\mathrm{supp}\,u\subset\Omega\cap K$ を満す任意の $u\in\mathcal{E}'(\Omega,\omega)$ が $\|u\|^+_{(-t)}\leq C\|{}^tP(x,D)u\|^+_{(-s)}$ を満す。

但し、$\|u\|^+_{(-t)}=\inf\{\|v\|_{(-t)}\,;\,v\in H_{(-t)}$ かつ $v|_\Omega=u\}$.

(2) 任意の $s\in N$、compact 集合 $K\subset\tilde{\Omega}$ に対し次の条件を満す compact 集合 $K'\subset\tilde{\Omega}$ が存在する。$u\in\mathcal{E}'(\Omega,\omega)$ が ${}^tP(x,D)u\in H_{(-s)}(\overline{R^n_+})$、かつ $\mathrm{supp}\,{}^tP(x,D)u\subset\Omega\cap K$ を満すならば $\mathrm{supp}\,u\subset\Omega\cap K'$ である。

以　上.