数理解析研究所講究録
第145巻 1972年 79-91

抽象的コーシー問題のhyperfunction解

九州大学　工学部（応用理学）
大内　忠

§0　Banach空間 X における抽象的コーシー問題（発展方程式

$$
(0.1)\qquad
\begin{cases}
\dfrac{du(t)}{dt} = A\,u(t) \\[2ex]
u(0) = a \qquad\qquad a \in X,\quad A: \text{線型作用素}
\end{cases}
$$

の超函数解（hyperfunction solutions）の存在，一意性，解の正則性についての結果を報告する。Distributionについての結果は J. Chazarain[1]，G. Da Prato [2]，D. Fujiwara[3]，J. L. Lions [4]，T. Ushijima [6] 等を参照されたい。以下に述べる結果により，distributionの意味で (0.1) が解けるような A は hyperfunctionの意味でも解ける。これは hyperfunction が distribution より広い函数概念の拡張であることから予想される当然の結果である。

我々は，超函数解の存在，一意性，正則性を，A の resolvent の存在領域と，そこでの resolvent の増大度（評価）でもって特徴づける。

なお以下において，超函数といえば hyperfunction のことを意味し，Schwartz の distribution は distribution と書くことにする。

§1. ベクトル値超函数 (Banch space に値をとる超函数)

以下において必要になるベクトル値超函数の定義，いくつかの結果を証明なしに与える。これらの証明については，M. Sato [5a], [5b] の場合の証明をベクトル (Banach space valued) に直すことは容易である。

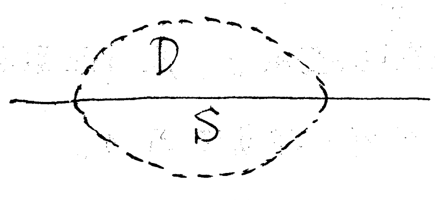
E を Banach 空間とする。

$\mathcal{O}(\Omega, E)$: E-valued 正則函数で定義域 $\Omega \subset \mathbb{C}^1$

S を R^1 の open set とする。E-valued hyperfunction を次の商空間の元として定義する。

$$\mathcal{B}(S, E) = \frac{\mathcal{O}(D-S, E)}{\mathcal{O}(D, E)}$$

ここで D は S を閉集合として含む複素近傍。



$\mathcal{B}(S, E)$ は D のとり方によらない。また $\mathcal{B}(S, E)$ の重要な性質として，次の性質がある。

$\left\{ \begin{array}{l} \text{任意の } f \in B(S,E) \text{ に対して、以下の性質をもつ } \tilde{f} \in \mathcal{B}(R^1,E) \\ \text{が存在する。} \tilde{f}|_S \ (\tilde{f} \text{ の } S \text{ への制限}) \text{ が } f \text{ と一致する.} \end{array} \right\}$

これは、超函数が flabby sheaf をなすことを示しているのである。

§2. コーシー問題の適切性.

E, F, を Banach space とし、各々のノルムを $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$ で表わす。 $L(E, F)$ でもって E から F への有界線型作用素の作る Banach 空間を表わし、そのノルムを $\|\cdot\|_{E\to F}$ で示す。 $L(E,E)$ は簡単に $L(E)$ で表わす。

X を Banach 空間とする。 A は X の部分空間で定義された閉作用素で、その定義域を $[D(A)]$ でもって表わし、グラフノルムをもつバナッハ空間とみなす。 $\rho(A)$ は A の resolvent set の記号。 I: 恒等写像, I_X: 恒等写像 on X, $I_{[D(A)]}$: 恒等写像 on $D(A)$ を表わすものとする.

定義　閉作用素 A が超函数の意味で $t=0$ における Cauchy 問題が適切 (well-posed) であるとは、次の条件 (2.1) (2.2) を満たす $\mathcal{T} \in \mathcal{B}(R^1, L(X, D(A)))$ が存在すること。

(2.1) support of $\mathcal{T}$ $\subset [0, \infty)$

$$(2.2)\quad (\delta^{(1)}(t)\otimes I - \delta(t)\otimes A) * \mathcal{T} = \delta(t)\otimes I_X$$
$$\mathcal{T} * (\delta^{(1)}(t)\otimes I - \delta(t)\otimes A) = \delta(t)\otimes I_{[D(A)]},$$

ここで $\delta(t-\tau)$ は $t=\tau$ における δ-measure, $*$ 合成積, $\delta^{(k)}(t)$ は $\delta(t)$ の k 次導函数, $\otimes$ はテンソル積を表わす。
$\mathcal{T}$ を超函数基本解ということにする。

Remark 1.

A が超函数の意味で well-posed ならば，その基本解は $\mathcal{D}'(R^1, L(X, [D(A)]))$ で一意的である。 それは，$\mathcal{T}$ が両逆の基本解で，その support が $[0, \infty)$ に含まれていることより従う.

我々の第一の定理は次のそれである。

定理 1.

閉作用素 A が超函数の意味で well-posed であるための必要十分条件は，A の resolvent について次の条件が満たされることである。

$\forall \varepsilon > 0$ に対して $\exists k_\varepsilon$ があって，

$\Sigma_\varepsilon = \{\lambda;\ \mathrm{Re}\lambda \geq \varepsilon|\mathrm{Im}\lambda| + k_\varepsilon\}$ なる集合が $\rho(A)$ に含まれ，かつ そこで $\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X\to X} \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|\lambda|)$ なる評価式が成り立つ。

定理1の証明の概略

必要性

Aをwell-posedとせよ。超函数のflabbinessより次の性質をもつ $\mathcal{T}_1 \in \mathcal{B}(R^1, L(X,[D(A)]))$ が存在する。

$$t<1 \qquad \mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$$

$$t>1 \qquad \mathcal{T}_1 = 0.$$

この超函数$\mathcal{T}_1$に対して

$$(\delta^{(1)}(t)\otimes I - \delta(t)\otimes A) * \mathcal{T}_1 = \delta(t)\otimes I_X + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{(n)}(t-1)\otimes A_n$$

ここで $A_n \in L(X)$ で一点にsupportをもつ超函数の構造定理により。$\forall \varepsilon>0 \ \exists M_\varepsilon>0$

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \Big\|_{X\to X} \le M_\varepsilon \exp \varepsilon(|\lambda|) \quad \text{が成り立つ}$$

従って T_1のLaplace変換 $\langle T_1, \exp(-\lambda t)x \rangle$, $x\in X$ に対して

$$(\lambda - A)\langle T_1, \exp(-\lambda t)x\rangle = x + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \exp(-\lambda) A_n x$$

が成り立ち、もし、$\mathrm{Re}\,\lambda \ge \varepsilon|\lambda| + \log 2M_\varepsilon$ ならば

$$\Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \exp(-\lambda) A_n \Big\|_{X\to X} \le \frac{1}{2} \quad \text{となり} \quad A\text{の resolvent}$$

があることになる。

そこでは

$$\|(\lambda - A)^{-1}\|_{X\to[D(A)]} \le 2\,\|\langle T_1, \exp(-\lambda t)\cdot\rangle\|_{X\to[D(A)]} \le C_\varepsilon \exp \varepsilon(|\lambda|)$$

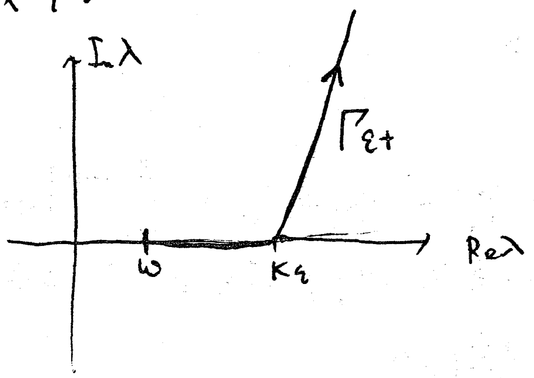
十分性　実数 $\omega \in \rho(A)$ を一つ固定し

path $\Gamma_{\varepsilon\pm}$: もし $\omega \leq \mathrm{Re}\,\lambda \leq k_\varepsilon$ ならば $\mathrm{Im}\,\lambda = 0$

もし $\mathrm{Re}\,\lambda \geq k_\varepsilon$ ならば

$\mathrm{Re}\,\lambda = \pm\varepsilon\,\mathrm{Im}\,\lambda + k_\varepsilon$ で $\mathrm{Im}\,\lambda \gtrless 0$

と定義する



$$T_\pm(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{\varepsilon\pm}} e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1}\,d\lambda$$ とおき、$z>0$ を変換させることにより、$T_\pm(z)$ は $C' - [0, \infty)$ で一つの正則函数を定める。すなわち $\mathcal{O}(C'-[0,\infty), L(X, D(A)))$ である。

かんたんな計算により

$$\frac{dT(z)}{dz} = AT(z) + \frac{-1}{2\pi i}\frac{e^{\omega z}}{z} I_X$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = T(z)A + \frac{-1}{2\pi i}\frac{e^{\omega z}}{z} I_{[D(A)]}$$ であることがわかり、$T(z)$ の定める超函数が基本解となる

Remark 2.

J. Chazarain[1]において, distribution の意味での well-posed な作用素の特徴づけがなされた。それと比較してみると, 超函数の意味で well-posed な作用素の方が多いことがわかる。(当然の結果!!)

§3. 正則性.

超函数基本解の正則性について述べよう.

定理2.

閉作用素 A が $\underbrace{\text{well-posed}}_{\text{超函数の意味で}}$ でその基本解が扇形領域

$\Sigma = \{ z ;\ |\arg z| < \alpha,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \}$ で正則であるための, 必要十分条件は, A が次の条件を満たすことである:

$\forall \varepsilon > 0$ に対して, 実数 ω_ε があり, 任意の $\lambda \in \Sigma_\varepsilon$

$\Sigma_\varepsilon = \{ \lambda ;\ |\arg(\lambda - \omega_\varepsilon)| < \theta ;\ \theta = \frac{\pi}{2} + \alpha - \varepsilon \}$ に対して,

$(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ が存在し, $\| (\lambda - A)^{-1} \|_{X \to X} \leq C_\varepsilon \exp(\varepsilon|\lambda|)$

が成り立つ。

定理3.

閉作用素 A が $\underbrace{\text{well-posed}}_{\text{超函数の意味で}}$ で, その基本解が正の実軸上で, 実解析的であるための必要十分条件は, 次の条件であ

る。

$\forall\varepsilon>0$ に対して、k_ε, $0<\delta_\varepsilon\le\varepsilon$ があり、$\lambda\in\Sigma_\varepsilon = \{\lambda;\ \varepsilon\,\mathrm{Re}\lambda \ge -\delta_\varepsilon|\mathrm{Im}\lambda| + k_\varepsilon\}$ で $(\lambda-A)^{-1}\in L(X)$ が存在し、評価式 $\|(\lambda-A)^{-1}\|_{X\to X} \le C_\varepsilon \exp(\varepsilon|\mathrm{Re}\lambda| + \delta_\varepsilon|\mathrm{Im}\lambda|)$ が成り立つことである。

定理2の証明は、基本解の回転により、定理1に帰着される。従って、以下においては、定理3の証明の概略をのべる。

定理3の証明の概略

必要性

$$T(t) = [T(z)] \qquad \frac{dT(z)}{dz} \equiv AT(z) + \frac{(-1)}{2\pi i} I \quad \mathrm{mod}\ \text{正則函数}.$$

・$T(t)$ が $t>0$ で実解析的とせよ。

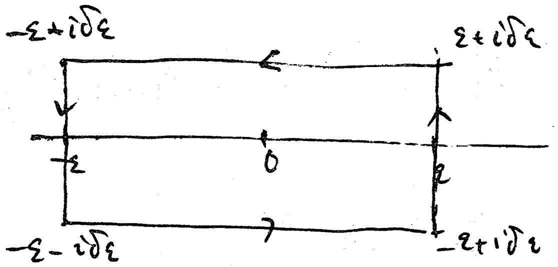
$\forall\varepsilon>0$ に対して、$\exists\delta_\varepsilon >$ があり、$T(t)$ は $t=\varepsilon$ を中心として収束半径 $2\delta_\varepsilon$ の Taylor 級数に展開できる。

$0<\delta_\varepsilon\le\varepsilon$ としてよい。

さて
$$T_+(z) = T(z)\big|_{\mathrm{Im}\,z>0}$$
$$T_-(z) = T(z)\big|_{\mathrm{Im}\,z<0}$$
とおくと

$T_+(z)$ は仮定により、正の実軸をこえて、$\varepsilon-2i\delta_\varepsilon$,

$T_-(z)$ は正の実軸をこえて ε と $\varepsilon + i\delta_\varepsilon$ まで解析接続できる。
よって $\hat{T}(z)$ を正の実軸をこえて，解析接続された $T(z)$ ととすると，$\hat{T}(z)$ は正の実軸のある近傍で一価正則函数となる。



$\Gamma_{\varepsilon+}$　$\varepsilon + i\delta_\varepsilon$ より矢印の方へまわり，もとにもどる道。

$\Gamma_{\varepsilon-}$．$\varepsilon - i\delta_\varepsilon$ より矢印の方向へまわり，もとに戻る道。

さて $\forall x \in X$

$$\int_{\Gamma_{\varepsilon+}} e^{-\lambda z}\hat{T}_z x\,dz \text{ を考えよ。}$$

もちろん 多くの場合 zero にはならない
（$\hat{T}_z x$ が多価ゆえ）

$$(\lambda - A)\int_{\Gamma_{\varepsilon+}} e^{-\lambda z}\tilde{T}_z x\,dz = \int_{\Gamma_{\varepsilon+}} -\frac{d}{dz}e^{-\lambda z}\hat{T}_z x\,dz - \int_{\Gamma_{\varepsilon+}} e^{-\lambda z}A\tilde{T}_z x\,dz$$

$$= e^{-\lambda(\varepsilon+i\delta_\varepsilon)}\left[-\hat{T}_{\varepsilon+i\delta_\varepsilon} + \tilde{T}_{(\varepsilon+i\delta_\varepsilon)e^{2\pi i}}\right]x + \int_{\Gamma_{\varepsilon+}} e^{-\lambda z}\frac{d\tilde{T}_z}{dz}x\,dz - \int_{\Gamma_{\varepsilon+}} e^{-\lambda z}A\hat{T}_z x\,dz$$

$$= e^{-\lambda(\varepsilon+i\delta_\varepsilon)}\left[-\tilde{T}_{\varepsilon+i\delta_\varepsilon}+\tilde{T}_{(\varepsilon+i\delta_\varepsilon)e^{2\pi i}}\right]x+x$$

最初の項 $\|\quad\|<\frac{1}{2}$ なら resolvent がある。

$\lambda=\sigma+i\tau$ とすると

$$\|e^{-\sigma\varepsilon+\tau\delta_\varepsilon}k_\varepsilon\|\le\frac{1}{2}\qquad k_\varepsilon=\|-\tilde{T}_{\varepsilon+i\delta_\varepsilon}+\tilde{T}_{(\varepsilon+i\delta_\varepsilon)e^{2\pi i}}\|$$

$\sigma\varepsilon\ge\tau\delta_\varepsilon+k_\varepsilon'$ で $k_\varepsilon'=\log 2k_\varepsilon$

resolvent があり

$$\|(\lambda-A)^{-1}x\|\le 2\left\|\int_{\Gamma_{\varepsilon+}}e^{-\lambda z}\tilde{T}_z x\,dz\right\|$$

$$\le C_\varepsilon e^{|\sigma|\varepsilon+|\tau|\delta_\varepsilon}\|x\|$$

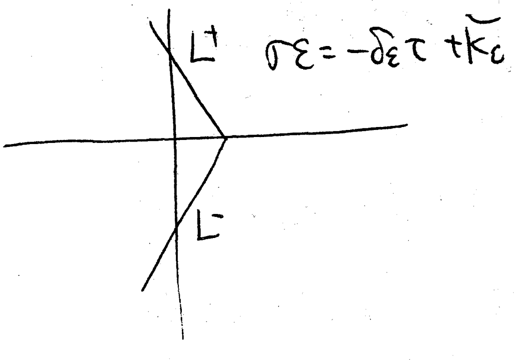
$\Gamma_{\varepsilon+}$ についても同様で　結局

$\sigma\varepsilon\ge-\delta_\varepsilon|\tau|+\tilde{k}_\varepsilon$ で resolvent があり、

$$\|(\lambda-A)^{-1}\|\le C_\varepsilon e^{\varepsilon|\sigma|+\delta_\varepsilon|\tau|}\quad(0<\delta_\varepsilon\le\varepsilon)$$ が

成り立つ。

(十分性)　　∀ε>0に対して



$$S(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L=L^+\cup L^-}e^{\lambda z}(\lambda-A)^{-1}d\lambda$$

とおく

$|dx| \leq C'_\varepsilon |d\tau|$ $\lambda = \sigma + i\tau$ $z = x + iy$

$\| e^{\lambda z}(\lambda - A)^{-1} \| \leq e^{\sigma x - \tau y} e^{|\sigma|\varepsilon + |\tau|\delta_\varepsilon}$

$\sigma < 0$ として $\leq e^{\sigma x - \tau y} e^{-\sigma\varepsilon + |\tau|\delta_\varepsilon}$

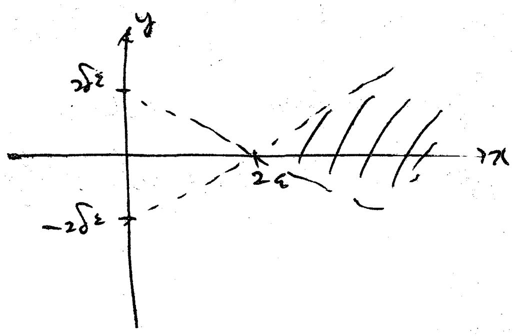
$\tau > 0$ の時

$$\sigma x - \tau y - \sigma\varepsilon + |\tau|\delta_\varepsilon = \left(-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}x - y + 2\delta_\varepsilon\right)\tau + x k_\varepsilon - k_\varepsilon$$

$\tau < 0$ の時

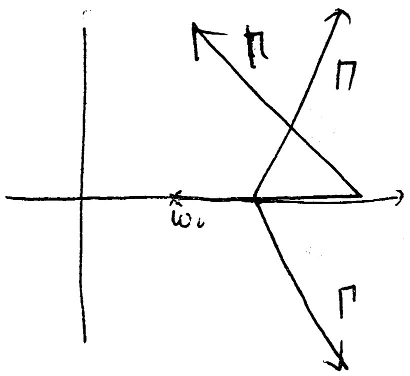
$$\sigma x - \tau y - \sigma\varepsilon + |\tau|\delta_\varepsilon = \left(+\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}x - y - 2\delta_\varepsilon\right)\tau + x k_\varepsilon - k_\varepsilon$$

よって $-\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}x + 2\delta_\varepsilon < y < +\frac{\delta_\varepsilon}{\varepsilon}x - 2\delta_\varepsilon$ で絶対収束



よって $S(x)$ は $x > 2\varepsilon$ で実解析的. $\varepsilon > 0$ は任意ゆえ $S(x)$ は $x > 0$ で解析的

ここで $S(x)$ を超函数として定める正則函数 $\mathfrak{S}$ $(S = \mathfrak{S}_+ - \mathfrak{S}_-)$ は $\omega_0 \in \rho(A)$ を固定して, 次の頁の図のように path Γ を変化させて作った正則函数. Γ の負の実軸へのくいこみの度合により, $S(x)$ が解析拡大できる範囲が決まる.



$0<\delta_\varepsilon \le \varepsilon$ という条件は $\hat{\varphi}$ が正の実軸及び 0 を除いて一価正則な函数を定めるのに用いられる。

Remark 3

超函数解が $t>0$ で C^∞ あるいは適当な class $\{M_n\}$ に属する条件も原点の近くでの積分を複素平面にもちあげることによりえられる。

References

[1], J. Chazarain: Probleme de Cauchy et applications a quelques problemes mixtes. (to appear in J. Functional Analysis)

[2]. G. Da Prato, U. Mosco: semi gruppi distribuzioni analitici (Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 19 (1965) 367～396)

[3]. D. Fujiwara:

A characterization of exponential distribution semi groups. J. Math. Soc. Japan. 18, 3 (1966) 267~274.

[4]. J. L. Lions:

Les semi groupes distributions. Portug. Math. 19 (1960) 141~164

[5]. M. Sato:

[5a] 超函数の理論 (数学, 1958)

[5b] The theory of hyperfunctions I (J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8) (1959) 139-194

[6] T. Ushijima:

Some properties of regular distribution semi-groups. Proc. Japan. Acad. 45 (1969) 224-227