数理解析研究所講究録
第145巻 1972年 92-108

hyperfunction の measure による表現について*)

東大 理 金子晃

hyperfunction の理論において，local operator という無限階の微分作用素が自然に出てくる。そこまで考えるのが自然であるとともに，一方実際に古典的な問題を解くのにそういうものを考察することが必要になるということを第一回のシンポジウムの時に報告した。あれ以来 hyperfunction 学派の発展は目覚しく，今では hyperfunction における一々の理論は他の解析的な範疇との関連を示さずともそれ自身意義があるということを認めぬ人はいないであろう。それにもかかわらず今日は敢えてまた hyperfunction と古典解析学的感覚とのつながりの例を論ずることにしたい。それは古典的な有限階の微分作用素に加えて local operator

*) この原稿は 1972年1月に書き直したものである。実際に行われた講演及びその直後に作成した原稿には重大な誤り及び不備があった。関係各位に謹んでおわびします。

を駆使することによって hyperfunction を微分積分学が古典的な函数を扱ったように易々と扱おうという試みに対する第一歩でもある。

§1. 位相的な考察

K を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし $\mathfrak{A}(K)$ を K の近傍で実解析的な函数の作る空間とする。$\mathcal{B}[K]$ を K に台をもつ hyperfunction の空間とする。良く知られているように $\mathfrak{A}(K)$ は DFS 空間, $\mathcal{B}[K]$ は FS 空間となり，互いに dual である。

$J(D)$ を一つの定数係数 local operator とする。(即ち，ある条件を満たす無限階の微分作用素. [1] §2 を見よ。)
$f \in \mathfrak{A}(K)$ に対し

$$\|f\|_J = \sup_{x \in K} |J(D) f(x)|$$

は一つのセミノルムを定める。$J(D)$ をいろいろ動かしたとき，これらのセミノルムが定める $\mathfrak{A}(K)$ の位相を $\mathfrak{A}_{\mathcal{J}}(K)$ で表わそう。我々はまず次のことに注意する。

補題 1.1　次の二つは同値である。

1)　$\mathfrak{A}(K)$ の弱位相 $\sigma(\mathfrak{A}(K), \mathcal{B}[K])$ は $\mathfrak{A}_{\mathcal{J}}(K)$ より弱い。

2)　任意の超函数 $u \in \mathcal{B}[K]$ は $u = J_1(D)\mu_1 + \cdots + J_N(D)\mu_N$

と表わされる。ここに J_i は定数係数 local operator, μ_i は K に台をもつ測度である。

証明. 2) ⇒ 1) は容易。1) ⇒ 2). $u \in \mathcal{B}[K]$ を任意に選ぶ。仮定により定数係数 local operator J_i, $i=1,\cdots,N$ が存在して

$$|\langle f, u\rangle| \leq \sup_{x\in K}|J_1(D)f(x)| + \cdots + \sup_{x\in K}|J_N(D)f(x)| \quad \forall f \in \mathcal{O}(K)$$

という不等式が成り立つ。これより u は部分空間

$$\left\{ \begin{pmatrix} J_1(D)f \\ \vdots \\ J_N(D)f \end{pmatrix} ; \ f \in \mathcal{O}(K) \right\} \subset C(K)^N$$

の上の汎函数として $C(K)^N$ の通常の supremum ノルムで連続であることがわかる。故に Hahn-Banach の定理により $C(K)^N$ 上の連続線型汎函数まで拡張され，次いで Rieß の定理によって

$$\langle f, u\rangle = \int_K J_1(D)f\mu_1 + \cdots + \int_K J_N(D)f\mu_N$$
$$= \langle f, J_1(-D)\mu_1 + \cdots + J_N(-D)\mu_N\rangle$$

と表現される。ここに最後の式は測度 μ_i を hyperfunction とみなして $J_i(D)$ を dual に移したものである。q.e.d.

この補題を基礎として講演では convex な K に対し，Fundamental Principle と類似の Fourier 変換の

technique を用いて $\sigma(\mathfrak{A}(K), \mathfrak{B}[K]) < \mathfrak{A}_g(K)$ を直接証明し，それを用いて $\mathfrak{B}[K]$ の measure による表現定理（補題 1.1 の主張 2））を示そうとしたのであったが，その後発見した証明の gap がどうしても埋められないので，以下これと関連した分野でわかったことを記す。それらは同じ頃，或いはその後半年あまりの間にいろいろな所で話したものである。

$\sigma(\mathfrak{A}(K), \mathfrak{B}[K]) < \mathfrak{A}_g(K)$ はわからないが，次のことはわかる。その前に $\mathfrak{A}_g(K) < \mathfrak{A}(K)$ は trivial にわかることを注意しておこう。

<u>定理 1．2</u>　$\mathfrak{A}_g(K) \longrightarrow \sigma(\mathfrak{A}(K), \mathfrak{B}[K])$ は sequential に連続である。（よく知られているように sequence の収束に関して $\mathfrak{A}(K)$ と $\sigma(\mathfrak{A}(K), \mathfrak{B}[K])$ は一致するので，これは $\mathfrak{A}_g(K) \rightarrow \mathfrak{A}(K)$ と云っても同じである。）

証明．$\{f_n\} \subset \mathfrak{A}_g(K)$ とし，$f_n \longrightarrow f$ in $\mathfrak{A}_g(K)$ とする．定義より明に $\forall p \in K$ に対し，$J(D)f_n(p) \longrightarrow J(D)f(p)$．これは $\langle f_n, J(-D)\delta(x-p)\rangle \longrightarrow \langle f, J(-D)\delta(x-p)\rangle$ と書きなおせるが，一点に台を持つ hyperfunction の構造定理によりこれは $f_n \longrightarrow f$ in $\sigma(\mathfrak{A}(p), \mathfrak{B}[p])$（従って in $\mathfrak{A}(p)$）を意味する。$\mathfrak{A}(p)$ の列の収束に関してよく知られた性質により，これは点 p のある複素近傍 V が存在してその

上で一様に$f_n \to f$を意味する。このことは$\forall p \in K$について云えるのだから，結局Kのある複素近傍が存在してそこに於いて一様に$f_n \to f$. つまり$\mathfrak{A}(K)$の位相で収束することがわかった。q.e.d.

系1.3. $\mathfrak{A}_g(K)$は sequentially complete である。

証明。上と同様の証明で$\mathfrak{A}_g(K)$の Cauchy 列は$\mathfrak{A}(K)$の Cauchy 列になることがわかる。q.e.d.

実解析函数の新しい特徴づけに関する定理（講演で予告したこと）はこれから証明できるはずである。一変数のときには[3]を見よ。そこでは$\mathfrak{A}_g(K) \succ \sigma(\mathfrak{A}(K), \mathfrak{B}[K])$（一変数のときは正しい）を用いているが，上の定理1.2.で十分である。従ってそこで正しいかどうかわからないと述べた Remark の内容も上の論法で正しいことがわかる。（一点で議論すれば十分だから）

注意. 次の§2.で一変数のときには補題1.1，2）を示すので，同補題によりこの場合には$\mathfrak{A}_g(K) \succ \sigma(\mathfrak{A}(K), \mathfrak{B}[K])$も正しい。また，何変数であっても$K$が一点のときは$\mathfrak{A}_g(0) = \sigma(\mathfrak{A}(0), \mathfrak{B}[0])$である。一般には$K$が内点を持てば正しいが，$K$が一点でなく平べったいときは正しくないだろうと予想される。定理1.2.があるので位相的な面から反例を作

るのは容易でない。

§2. compact support の超函数の構造定理

Schwarz の distribution は local には連続函数の有限階の微分である。local operator を用いれば hyperfunction を用いてもこの類似が成立つ。

定理2.1　$u \in \mathcal{B}[K]$ は $u = J(D)f(x)$ と表わされる。ここに J は定数係数 local operator, $f(x)$ は $\mathbb{R}^n$ 上の連続函数である。

証明の方針.　K は convex と思ってよい。u の Fourier 変換は良く知られたように

$$(2.1)\qquad |\tilde{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi| + H_K(\xi)}, \quad \forall\varepsilon>0, \exists C_\varepsilon>0$$

という増大度を持つ整函数であるが, この増大度は次のように書き直される。

$$(2.2)\qquad |\tilde{u}(\xi)| \leq C e^{\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)} + H_K(\xi)}$$

ここに $\varphi(r)$ は ∞ に単調に増加する $r \geq 0$ の函数であって, 実際

$$\psi(r) = \sup_{|\xi|=r} \tilde{u}(\xi)\exp(-H_K(\xi))$$

とおけば

$$(2.3)\qquad \varphi(r) = \inf_{s \leq r} \max\left\{1, \frac{s}{\log(e+\psi(s))}\right\}$$

でよい。次の段階は実軸の付近においてこの増大度 $e^{\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)}}$

を実現する entire infra-exponential function を作ることである。これには二通りの作り方がある。第一は

(2.4) $$J(\xi)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2}{(m\varphi(m))^2}\right)$$

を用いるもので，対応する local operator $J(D)$ は elliptic になる。これは distribution を $\Delta^N f(x)$ と表わすことに相当している。第二は

(2.5) $$J(\xi)=\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi_1^2}{(m\varphi(m))^2}\right)\cdots\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi_n^2}{(m\varphi(m))^2}\right)$$

を用いるもので，ここに $\psi(r)=\frac{1}{n}\varphi(nr)$ ととればよい。これは distribution を $(D_1\cdots D_n)^N f(x)$ と表わすことに相当する。

(2.6) $$\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)}\leq\sum_{j=1}^{N}\frac{|\xi_j|}{\psi(|\xi_j|)}$$

がわかるから，いずれの場合も初等的な計算（[1]を見よ。）で

$$F(\xi)=\frac{\tilde{u}(\xi)}{(1+\xi_1^2+\cdots+\xi_n^2)^{[\frac{n}{2}]+1}J(\xi)}$$

は実軸を含むある帯で正則で $|F(\xi)|\leq\frac{C}{(1+|\xi|^2)^{[\frac{n}{2}]+1}}$ を満たし，従ってそのFourier逆変換 $f(x)$ は連続であることが知られる。$f(x)$ ともとの $u(x)$ との関係はFourier超函数論の枠内で考えればよい。くわしい説明は省くが（[5]を見よ），

ともかく常識で想像されるように積は微分に対応して

$$u(x) = J(D) f(x)$$

となる。q.e.d.

系2.2 (一変数のとき) Kを$\mathbb{R}^1$のコンパクト区間とすれば$u \in \mathcal{B}[K]$に対し補題1.1の主張2)が(従って1)も)成立つ。([2])

証明. 上で得られた表現$u = J(D) f(x)$において$f(x)$をK上に"切り落とせば"もとのuとの差は高々両端の上に台を持つhyperfunctionであるから, 一点supportのhyperfunctionの構造定理により$u = J(D)(f(x)\chi_K(x)) + J_1(D)\delta(x-a) + J_2(D)\delta(x-b)$と3つで表わされる。

注。佐藤先生は2つで十分だろうと予想している。その根拠は$u = J(D)v$. vはKに台をもつnon-quasianalytic classのhyperfunction (以下の定義を見よ) と表わせるという因数分解定理の成否による。なおこの因数分解定理は多変数の場合にはtrivialな反例がある。:

$J(D_1)\delta(x_1, x_2) - \delta(x_1, x_2 - 1)$ ここでJはぎりぎりのinfra-exponentialにとる。そのFourier変換$J(\xi_1) - e^{i\xi_2}$は一般にlocalにもglobalにも既約である。

・多変数のときは上の系2.2はどの程度成り立つであろうか? ここでは不満足ながら次のことを示すにとどめる。

まず,

定義. $u \in \mathcal{B}[K]$ が non-quasianalytic class であるとは $\tilde{u}$ が評価 (2.2) を ($H_K(\zeta)$ の K は convex hull として)

$$(2.7) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m\,\varphi(m)} < \infty$$

なる φ に対し満たすことである。

<u>定理 2.3</u> $K=\overline{\Omega}$ は compact とし Ω は cone property を持つ領域とする。(すなわち Ω の各境界点に対しその点を頂点とし頂点以外は Ω に含まれるような non-degenerate な cone の先端が存在する) このとき $\mathcal{B}[K]$ の元 u で non-quasianalytic class (上の定義) に属する*) ものは $u=\sum_{i=1}^{N} J_i(D)\mu_i$ の形に表わされる。ここに $J_i(D)$ は定数係数 local operator, μ_i は K に台を持つ測度で個数 N は K の形状のみによって定まる。

証明. u が non-quasianalytic class なので regularization における local operator $J(D)$ は compact support の differentiable function に施すことができ, 結果は measure の範囲にとどまる。実際 [6], p.2 において $\psi(x)=\frac{1}{n}\varphi(nx)$, $C(x)=\frac{x}{\psi(x)}+\log(1+x^2)$ ととれば, 仮定より

$$\int_1^{\infty}\frac{C(x)}{x^2}\,dx \leq \int_1^{\infty}\frac{\log(1+x^2)}{x^2}\,dx+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m\psi(m)}<\infty$$

*) さらに φ は $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m\varphi(m)}<\infty$ を満たすとする.

だから

$$(2.8)\quad |F(z)| \leqq c\, e^{-\frac{x}{\varphi(x)} - n\log(1+x^2) + A|y|}$$

なる評価を持つ一変数の整函数が存在する。これらを各変数について掛ければ

$$(2.9)\quad \begin{aligned} |F(\zeta_1)\cdots F(\zeta_m)| &\leqq C\, e^{-\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{|\zeta_j|}{\varphi(|\zeta_j|)} + n\log(1+|\zeta_j|^2)\right) + A|\mathrm{Im}\,\zeta|} \\ &\leqq C(1+|\zeta|^2)^{-n} e^{-\frac{|\zeta|}{\varphi(|\zeta|)} + A|\mathrm{Im}\,\zeta|} \end{aligned}$$

を満たす整函数が得られた。従ってこの Fourier 逆変換 $\varphi(x)$ は先に述べたような性質を持つ。定数 $c=\int \varphi(x)dx$ で割って，compact 集合 L の characteristic function χ_L との convolution をとることにより函数 $\chi_L * \frac{1}{c\varepsilon}\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ は L の十分内部では 1 に等しく，L の十分外部では 0 に等しく，上の $J(D)$ を施しても L_2 にとどまることがわかる。[*)]

Cutting function が得られたところでまず次のことを確かめる：

$u\in\mathcal{B}[L]$ が non-quasianalytic ならば $u=J(D)f(x)+g(x)$ と表わされる。ここに $f(x)$，$g(x)$ は L_2 函数でその support は L の任意に小さい近傍に入るようにとることができる。

何故なら，まず $u=J(D)f(x)$ と (2.4) の $J(D)$ で表わし，上で得た cutting function χ (L のある近傍で 1 に等しくなるようにとる。) で f を cut する。$J(D)$ は

---

*) $\varphi(x)\geqq 0$ は以下必要としない。

elliptic で L の外では $J(D)f(x)=0$ なのだから $f(x)$ は cutting function が1でないところでは real analytic で，従って

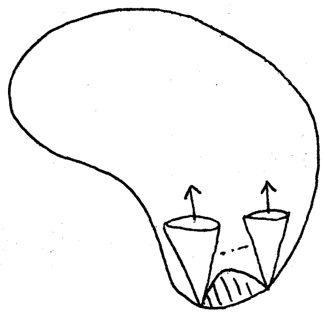
$$(2.10)\qquad u = J(D)(\chi(x)f(x)) + J(D)((1-\chi(x))f(x))$$

において第2項は $J(D)$ を施しても L_2 の範囲にとどまるのである。

support の方が広がらぬような sharp な表現定理にするために我々は次に hyperbolic operator を使う。つまり (2.5) の $J(\xi)$ において，各因子を

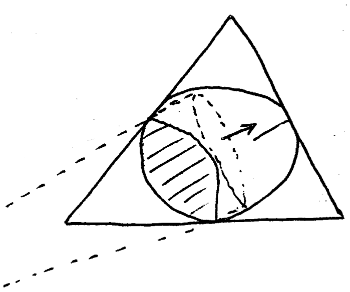
$$(2.11)\qquad \prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{\xi_1}{im\psi(m)}\right)$$

にとることができるのである。(non-quasianalytic の仮定！) こうして得られた (2.5) に対応する $J(D)$ は基本解が第一象限に support を持つような hyperbolic operator となる。さらに実の linear な座標変換によりこの support の cone の開きがいくらでも小さいような $J(D)$ を作ることが可能である。以上の準備の下に与えられた $u\in\mathcal{B}[K]$ を先ほど作った cutting function を用いていくつかに分ける。まず境界付近の部分と完全に内部に入っている部分に分けると，内部に入っている方は最初に述べた elliptic operator を用いて2個で表わす方法で済む。次に境界付近をいくつか有限個に切って各片は共通の cone が K の内部



にとれるようにできる。compact だからこれは可能である。これら各片に対しては2番目に述べた hyperbolic operator による regularization をやる。support は対応する cone に沿って広がるが適当なところで cut すると今度の剰余類（(2.10)と同様）は必ずしも L_2 に属するかどうかわからないが、support は K の完全内部にある。そしてそれが再び non-quasi-analytic class の hyperfunction になることも容易にわかるから*)、これに対し再び第一の elliptic operator による regularization を適用すれば結局定理の主張する表現が完成したことになる。個数 N が K の形状だけで決まることは以上の議論から明である。q.e.d.

注意. K が convex のときに個数を計算してみると



$n+3$ 個で良い（但し立方体のように「外接」する n-単体が書けない場合は例外的に $n+4$ 個）ことがわかる。佐藤先生の以前の予想では $n+1$ 個であるし、$n=1$ の場合と比べると大部甘い計算のようである。

*) ここで P.9 脚注に追加した条件が必要となるようである。

§3. 開集合上の超函数の構造定理

§2で述べた定理2.1は実はもっと強い形で成り立つ。すなわち（$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ の元の構造定理と比較せよ）

定理 3.1 $u \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ に対し $\exists J(D)$, $\exists f$: continuous on $\mathbb{R}^n$ が存在して $u = J(D)f$ と書ける。$J(D)$ は elliptic にとれる。

証明. u を Fourier hyperfunction $\mathcal{Q}(\mathbb{D}^n)$ の元まで拡張する。それを以下同じ文字で表わすことにする。Fourier 変換して $\tilde{u} = [F(\zeta)]$, すなわち, $F(\zeta)$ を $\tilde{u}$ の定義函数とすれば

$$(3.1) \qquad |F(\zeta)| \leq C_{\varepsilon, I}\, e^{\varepsilon|\xi|} \qquad \text{for } \eta \in I$$

ここに $I \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ であり, $\zeta = \xi + i\eta$ とおいた。今 $\delta > 0$ を fix すれば§2で (2.1) から (2.2) を出したのと同様の考察で

$$(3.2) \qquad |F(\xi \pm i\delta)| \leq C e^{\frac{|\xi|}{\varphi(|\xi|)}} \qquad \exists \varphi \uparrow \infty$$

がわかる。故に (2.4) で $J(\zeta)$ を定めて

$$G(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{(1+\zeta_1^2+\cdots+\zeta_n^2)^{[\frac{n}{2}]+1} J(\zeta)}$$

とおけば

$$|G(\xi \pm i\delta)| \leq C \frac{1}{(1+|\xi|^2)^{[\frac{n}{2}]+1}}$$

かつ,

$$[F(\zeta)] = J(\zeta)[G(\zeta)]$$

従って $[G(\xi)]$ の Fourier 逆変換 v に対し $u=J(D)v$ が成り立つ。あとは v が連続であることを見ればよいが，それには Fourier 逆変換の計算を積分路 $\xi\pm i\delta$ の上で行なうことにより v の定義函数 $V(z)$ に対し

$$V(z)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{0} e^{-i(x\xi-y\delta)+x\delta+y\xi}\,G(\xi\pm i\delta)\,d\xi$$

$$+\cdots$$

の各項は $y\downarrow 0$ としても収束する積分を表わすことがわかる。故に $V(z)$ の定める超函数 v は連続である。q.e.d.

系3.2　$\mathbb{R}^n\supset\Omega$ を任意の開集合とするとき $\mathcal{B}(\Omega)$ の元には $u=J(D)f$, $\exists J(D)$, $\exists f$: continuous on Ω, と書ける。

証明．　$\mathcal{B}$ の flabbiness により定理3.1に帰着される。

また上記証明から次のこともわかる。

系3.3　$\mathbb{R}^n$ 上の任意の増大度をもった連続函数 $f(x)$ 及び任意の $\delta>0$ に対し $f(x)=J(D)g(x)$ となる連続函数 $g(x)$ で評価 $|g(x)|\leq e^{\delta|x|}$ となるものがある。つまり超函数論的には増大度は exponential type まで考えれば十分である？！

注意1．無限階の微分作用素でさらに“積分”することによ

り $f(x)$ として non-quasianalytic なる限りいくらでもなめらかなものを選ぶことができることは明であろう。特に C^∞ 級にとれることは重要である。

注意2. $J(D)$ の作り方はきわめて任意である。すなわち，J を作るとき用いる数 $\varphi(m)$ は少々動かしても影響ないからあらかじめ与えられた数に対して transcendental にとることができる。特に $J(\xi)$ はあらかじめ与えられたいくつかの多項式 $P_i(\xi)$ と既約になるように作れる。これは応用上重要である。

注意3. 上の証明でとった連続函数 $f(x)$ の遠方における増大度は $|f(x)| \leq Ce^{\delta|x|}$ である。ここに $\delta>0$ はいくらでも小さくとれるが その度に J 及び f をとり替えねばならない。この f を infra-exponential type にとれるかどうかはまだ調べていない。

§4. 応用など.

定理3.1 又はその系を利用して連続函数或は C^∞ 函数で成立している定理を hyperfunction の世界に持ち込むことができる。例えば凸領域における定数係数線型偏微分作用素（有限階）の hyperfunction solution に対しても指数函数表示定理が成り立つことが，C^∞ 級解の結果をこ

うして持ち込むことにより証明できる。([4]),結果は
$u \in \mathcal{B}_p(\Omega)$ に対し

$$(4.1)\quad u(x)=\sum_{\lambda=1}^{\ell}\int_{N_\lambda} d_\lambda(\xi, -ix)\, e^{-ix\xi}\, d\mu(\xi)$$

ここに $\{N_\lambda\}$ は p に associate した代数多様体の族であり,d_λ は Noether 作用素,また測度 μ は

$$\sum\int_{N_\lambda} |d_\lambda(\xi, -ix)|\exp\left(-\varepsilon|\xi|+H_K(\xi)\right)|d\mu(\xi)|<\infty$$

なる増大度を満たす。従って(4.1)の積分は hyperfunction の意味である。すなわち x が実軸にあるときは位相的な意味では収束せず,x が虚に逃げたとき正則函数を与える。その境界値として定まる hyperfunction がもとの u に等しいのである。

引用文献

[1] Kaneko, A., On continuation of regular solutions of partial differential equations to compact convex sets, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA, 17-3 (1970) 567-580

[2] ———, On the structure of hyperfunctions with compact supports, Proc. Japan. Acad. Supplementary edition (1971), to appear. (J. Fac. Sci. Univ Tokyo)

[3] ———, A new characterization of real analytic functions, Proc. Japan. Acad. 47-10 (1971) 774-775

[4] ———, Fundamental Principle and extension of solutions of partial differential equations, Proc. Symposium on Hyperfunctions at Katata, October, 1971, to appear. (Springer. Lecture Note)

[5] Kawai, T., 超函数論における Fourier 変換の理論とその応用, 数理科学講究録 108 (1969) pp 84-288

[6] Mandelbroit, S., Fonctions entières et Transformées de Fourier Applications, Math. Soc. Japan, 1967