数理解析研究所講究録
第145巻 1972年 123-146

常微分作用素について

東大 理 小松彦三郎

1変数の hyperfunction の理論は佐藤氏の論文[7]で確立され，常微分方程式もそこで詳しく論じられている．しかし，全く問題が残っていないわけではない。ここでは，昨年(1970年)私が行った hyperfunction の入門講義[3](主として1変数の理論)のつづきとして，常微分方程式の最も基礎的な理論を扱う．

対象とする作用素は，区間 (a, b) 上で実解析的な係数 $a_j(x)$ をもつ単独の常微分作用素

$$(1) \quad P(x, \frac{d}{dx}) = a_m(x)\frac{d^m}{dx^m} + a_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + a_0(x)$$

である．主要部の係数 $a_m(x)$ は恒等的に 0 ではないと仮定する．多くの結果は $a_j(x)$ が実解析函数を要素とする $N\times N$ 行列であって，$\det a_m(x)$ が恒等的に 0 でない場合に拡張される．

扱う問題は方程式

$$(2) \qquad P\left(x, \frac{d}{dx}\right) u(x) = f(x)$$

の解の存在，延長，一意性および正則性など，最も基礎的なものである．

これらの問題は，既知函数 $f(x)$ および未知函数 $u(x)$ の属すべき函数族を指定してはじめて意味をもつ．そして，その解答は当然函数族に応じてかわってくる．逆に，これらの解答の自然さによって方程式 (2) を扱うのに適した函数族が自ずから定まるといってよい．歴史的にみても，distribution は線型微分方程式を扱うのにより適した函数族の元として導入されたのであった．

1. 例.

はじめにいくつかの例にあたってみる．

例 1.

$$(3) \qquad \left(x \frac{d}{dx} - 1\right) u(x) = x.$$

この方程式は原点の近くで無限回微分可能な解を持たない．実際，両辺を比較して，$u(x) = x\,v(x)$ と表わせることがわかる．これから

$$x^2 \frac{dv}{dx} = x$$

を得るが，原点における零点の位数を比較すればわかるように，いかなる無限回微分可能な v もこの方程式をみたさない。

しかし（3）は distribution 解 $x \log x$ をもつ．

（3）に対応する同次方程式

(4) $$\left(x \frac{d}{dx} - 1\right) u(x) = 0$$

は二つの一次独立な distribution 解

$$\begin{cases} u(x) = x \\ u(x) = |x| \end{cases}$$

をもつ．$u(x) = x$ は (4) の唯一つの一次独立な無限回微分可能解かつ実解析解である

<u>例2.</u> (4) の低位の項をかえて

(5) $$\left(x \frac{d}{dx} + 1\right) u(x) = 0$$

とすると，

$$\begin{cases} u(x) = \delta(x) \\ u(x) = \mathrm{v.p.} \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

が一次独立な distribution 解となり，すべての distribution 解は，これらの一次結合で表わされる．従って，0 以外，無限回微分可能な解も，実解析的な解も存在しない。

例3.

$$(6) \qquad \left(x^2\frac{d}{dx}-1\right)u(x)=0.$$

この方程式は $x>0$ および $x<0$ で通常の解 $ce^{-\frac{1}{x}}$ をもつ. distribution解もこれ以外にない([8], Chap.V, Th.IX). $x>0$ で $e^{-\frac{1}{x}}$ に等しい解は, $x\leqq 0$ で0として延長することにより, 0を含む区間で無限回微分可能な解となる. しかし明らかに, 実解析的な解としては延長不可能である.

一方, $x<0$ で $e^{-\frac{1}{x}}$ に等しい解は, 原点を含む区間上のいかなるdistributionに延長することもできない. 従って解としても延長できない.

結局, 原点を含む区間の上ではただ1次元のdistribution解がある。

例4.

$$(17) \qquad \left(x^3\frac{d^2}{dx^2}-2\right)u(x)=0.$$

例3同様この方程式も $x>0$ および $x<0$ では通常の解 $ce^{-\frac{1}{x^2}}$ 以外の解をもたない. これらの解は原点の反対側で0として延長することにより, 0を含む区間での無限回微分可能な解となる. distribution解は必らずこれらの

一次結合として表わされる．

例5.

(8) $$\left(x^3\frac{d^2}{dx^2}+2\right)u(x)=0$$

この方程式の $x>0$ および $x<0$ での解 $ce^{\frac{1}{x^2}}$ は原点を含む区間上の distribution に延長することはできない．故に (8) は原点を含む区間上で 0 以外の distribution 解をもたない．

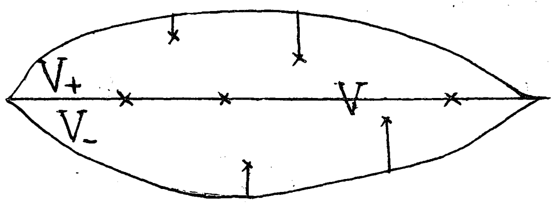
以上の例からわかるように，実解析函数，無限回微分可能函数，あるいは distribution の範囲では，われわれの問題に対する簡単な答は得られそうにない．しかし，次節にみられるように，hyperfunction にまで拡張すると，実に簡単明瞭な解答が得られる．

2. Hyperfunction 解の存在と一意性．$\mathcal{B}(a,b)$ でもって区間 (a,b) 上の hyperfunction 全体のなす空間を，$\mathcal{O}(V)$ でもって開集合 $V\subset\mathbb{C}$ 上の正則函数全体のなす空間をあらわす．

解の存在．

定理1 (佐藤[7])．任意の $f\in\mathcal{B}(a,b)$ に対して，(2) の解 $u\in\mathcal{B}(a,b)$ が存在する．

証明. (a, b) の複素近傍 V で, (1) の係数 $a_j(x)$ がすべて V 上に解析接続され, $V \cap \mathbb{R} = (a, b)$, $a_m(z)$ の V 上の零点はすべて (a, b) に含まれ, かつ V および $V_\pm = \{z \in V ; \pm \operatorname{Im} z > 0\}$ が共に連結かつ単連結となるものがある. 実際, $a_m(z)$ の零点を考慮することなく V をとり, $V \setminus (a, b)$ の中に零点があれば, 図のように, それらから V の外部に至る単一曲線をとり去ればよい.



$P(x, \frac{d}{dx})$ の解析接続を $P(z, \frac{d}{dz})$ とかく.

f の定義函数を φ:

$$f = [\varphi] \quad , \quad \varphi \in \mathcal{O}(V_+ \cup V_-)$$

とする. $V_\pm$ は単連結であり, $a_m(z)$ の零点を含まないから, 線型常微分方程式に対する正則解の存在定理によって,

$$P(z, \frac{d}{dz}) \psi(z) = \varphi(z)$$

となる $\psi \in \mathcal{O}(V_+ \cup V_-)$ が存在する. このとき,

$$u = [\psi] \in \mathcal{B}(a, b)$$

は明らかに (2) の解である.

解の延長.

定理 2 (佐藤 [7]). (c, d) を (a, b) の部分区間

とする．$f \in \mathcal{B}(a, b)$ のとき，(c, d) 上での (2) の解 $u \in \mathcal{B}(c, d)$ はある (a, b) 上での解 $\tilde{u} \in \mathcal{B}(a, b)$ の制限に等しい．

証明．定理1によって (a, b) 上での (2) の解が存在するから，同次方程式

$$(9) \qquad P\left(x, \frac{d}{dx}\right) u(x) = 0$$

の解の延長が存在することを示せば十分である．V を定理1の証明に用いた (a, b) の複素近傍とする．このとき，(c, d) の複素近傍として，

$$W = V \setminus ((a, b) \setminus (c, d))$$

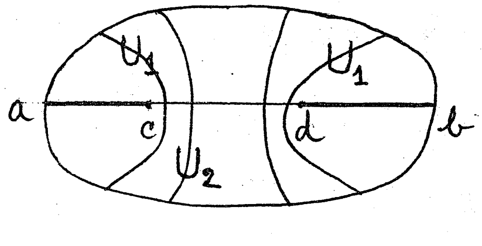
をとることができる．(c, d) 上の (9) の解 u の定義函数を φ とすれば，$\varphi \in \mathcal{O}(V_+ \cup V_-)$ かつ $P(z, \frac{d}{dz})\varphi$ は W 上の正則函数に拡張される．いま

$$P\left(z, \frac{d}{dz}\right)\psi(z) - P\left(z, \frac{d}{dz}\right)\varphi(z)$$

が V 上正則となるような $\psi \in \mathcal{O}(W)$ が存在することを示せば，

$$\tilde{u} = [\varphi - \psi] \in \mathcal{B}(a, b)$$

が求める u の延長になる．



明らかに，$U_1 \cup U_2 = V$,

$U_2 \cap ((a, b) \setminus (c, d)) = \phi$

かつ，$U_1 \setminus ((a,b)\setminus(c,d))$ が単連結かつ $a_m(z)$ の零点を持たないような開集合 U_1，U_2 が存在する．方程式

$$P(z,\tfrac{d}{dz})\psi_0(z) = P(z,\tfrac{d}{dz})\varphi(z)$$

の $U_1\setminus((a,b)\setminus(c,d))$ 上の解を ψ_0 とする．$\mathbb{C}$ の任意の開集合は Stein であるから，

$$\psi_0(z) = \psi_2(z) - \psi_1(z),\quad z\in U_1\cap U_2$$

となる $\psi_1 \in \mathcal{O}(U_1)$，$\psi_2 \in \mathcal{O}(U_2)$ が存在する（[1], Th. 1.4.5）．そこで，

$$\psi(z) = \begin{cases} \psi_0(z)+\psi_1(z), & z\in U_1\setminus((a,b)\setminus(c,d)) \\ \psi_2(z), & z\in U_2 \end{cases}$$

と定義すれば，$\psi\in\mathcal{O}(W)$ かつ $P\psi - P\varphi$ は V 上正則な函数に延長される．

一意性．

線型方程式に一つでも解が存在する場合，その解の多様性は同次方程式の解のなす線型空間によって定まる．

微分作用素（1）は局所的な作用素であり，

$$P(x,\tfrac{d}{dx}) : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B},$$
$$P(z,\tfrac{d}{dz}) : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}$$

は層の準同型となる．$\mathcal{B}^P$ および $\mathcal{O}^P$ でもってこれらの核の層を表わす．$\mathcal{B}^P$ は同次方程式（9）の解 $u\in\mathcal{B}$ のなす層である．従って（9）の解 $u\in\mathcal{B}(a,b)$ のなす空間を

$\mathcal{B}^P(a, b)$ とかく.

<u>定理3.</u>

$$(10) \qquad \dim \mathcal{B}^P(a, b) = m + \sum_{x \in (a, b)} \operatorname{ord}_x a_m(x).$$

ただし, m は方程式の位数, $\operatorname{ord}_x a_m(x)$ は $a_m(x)$ の x における零点の位数をあらわす.

この定理は正則解に関する次の指数定理を用いて証明される.

<u>定理4.</u> $V \subset \mathbb{C}$ を有限個の連結成分をもつ開集合(またはコンパクト集合), (1)の係数 $a_j(z) \in \mathcal{O}(V)$, かつ $a_m(z)$ は V のどの連結成分の上でも恒等的に 0 でないとする. このとき,

$$P(z, \tfrac{d}{dz}) : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(V)$$

は $\mathcal{O}(V)$ の自然な位相に関し, 閉部分空間を値域とする連続線型作用素であり, その指数

$$(11) \qquad \begin{aligned} \chi(P) &= \dim \ker P - \operatorname{codim} \operatorname{im} P \\ &= m\,\chi(V) - \sum_{z \in V} \operatorname{ord}_z a_m(z). \end{aligned}$$

ここで, $\chi(V)$ は V の Euler 標数

$$(12) \qquad \begin{aligned} \chi(V) &= \dim H^0(V, \mathbb{C}) - \dim H^1(V, \mathbb{C}) \\ &= V\text{の連結成分の数} - V\text{の穴の数} \end{aligned}$$

を意味する．ただし，穴とは $\mathbb{C}\setminus V$ のコンパクト（相対コンパクト）な連結成分のことである。

<u>略証</u>．1° $P=\frac{d}{dz}$ のとき．V は Stein 多様体であるから，

$$H^0(V,\mathbb{C})\cong \ker\frac{d}{dz},$$
$$H^1(V,\mathbb{C})\cong \operatorname{coker}\frac{d}{dz}.$$

故に，$\chi(P)=\chi(V)$（例えば Hörmander [1], Th. 2. 7. 10）

2° $P=a_0(z)\cdot$ のとき．明らかに，

$$\ker a_0(z)=0.$$

一方，Weierstraß の定理により，

$$\operatorname{coker} a_0(z)\cong\prod_{z\in V}\mathbb{C}^{\operatorname{ord}_z a_0(z)}.$$

故に，

$$\chi(P)=-\sum_{z\in V}\operatorname{ord}_z a_0(z).$$

3° $P=a_m(z)\frac{d^m}{dz^m}$ のとき．作用素の積の指数は作用素の指数の和に等しいから（11）がなりたつ．

4° P 一般の場合．$m-1$ 位以下の部分は $a_m(z)\frac{d^m}{dz^m}$ に比べて小さいから，指数の摂動に対する安定性から，これを加えても指数はかわらない．

実際は 4° で用いる定理は Fréchet 空間 $\mathcal{O}(V)$ に直接適用したのではうまくゆかない．そのため Banach 空間の

列で近似しながら証明を遂行する [4].

定理4の系1 (Perron の定理) $V \subset \mathbb{C}$ が連結かつ単連結ならば

(13) $$\dim \mathcal{O}^P(V) \geqq m - \sum_{z \in V} \operatorname{ord}_z a_m(z).$$

定理4は Riemann-Roch の定理に似た次の形に表わすこともできる.

定理4の系2. Vを有限の Euler 標数をもつ $\mathbb{C}$の開集合(またはコンパクト集合)とし, (1) の係数 $a_j(z) \in \mathcal{O}(V)$ かつ $a_m(z)$ は Vにおいて高々有限個の零点をもつとする.

このとき,

(14) $$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}^P) &= \dim H^0(V, \mathcal{O}^P) - \dim H^1(V, \mathcal{O}^P) + \dim H^2(V, \mathcal{O}^P) \\ &= m\chi(V) - \sum_{z \in V} (m - \dim H^0(z, \mathcal{O}^P)). \end{aligned}$$

定理3の証明. $(a, b) = \Omega$ とかく. 定義によって次頁の図式は可換であり, すべての行および列は完全である. 定理4により, P_V および $P_{V \setminus \Omega}$ は共に指数をもつ作用素であり, m位の微分方程式の解であることから, $\ker P_V = \mathcal{O}^P(V)$ および $\ker P_{V \setminus \Omega} = \mathcal{O}^P(V \setminus \Omega)$ は有限次元である. 従って, P_Ω も指数をもつ作用素であり, その指数は

$$\chi(P_\Omega) = \chi(P_{V \setminus \Omega}) - \chi(P_V)$$

$$= 2m - \left(m - \sum_{x \in \Omega} \mathrm{ord}_x\, a_m(x)\right)$$

$$= m + \sum_{x \in \Omega} \mathrm{ord}_x\, a_m(x)$$

となる．定理1により，P_Ω は上への写像であるから，

$$\dim \mathcal{B}^P(\Omega) = \chi(P_\Omega) - m + \sum \mathrm{ord}_x\, a_m(x).$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}^P(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}^P(V \setminus \Omega) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & \mathcal{B}^P(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}^P(\Omega)/\pi\, \mathcal{O}^P(V \setminus \Omega) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[d, "P_V"] & \mathcal{O}(V \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d, "P_{V \setminus \Omega}"] & \mathcal{B}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d, "P_\Omega"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}(V \setminus \Omega) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B}(\Omega) \arrow[r] \arrow[d] & 0. & \\
 & \mathcal{O}(V)/P_V\, \mathcal{O}(V) \arrow[d] & 0 & 0 & & \\
 & 0 & & & &
\end{tikzcd} \tag{15}$$

この図式から容易にわかるように，

$$\mathcal{O}(V)/P_V\, \mathcal{O}(V) \cong \mathcal{B}^P(\Omega)/\pi\, \mathcal{O}^P(V \setminus \Omega).$$

従って，同次解 $\mathcal{B}^P(\Omega)$ には $\mathcal{O}^P(V \setminus \Omega)/\mathcal{O}^P(V)$ に由来するものと，$\mathcal{O}(V)/P_V\, \mathcal{O}(V)$ に由来するものがある．

<u>例6.</u> 原点を含む近傍で

$$P\left(x, \frac{d}{dx}\right) = x\frac{d}{dx} - \alpha$$

を考える．複素近傍 V として原点を含む円板をとることが

できる．このとき，

(16) $\qquad \chi(P_V) = 1 - 1 = 0.$

$V \setminus \{0\}$ における一般解は $c\, z^{\alpha}$ である．故に

(i) $\alpha \neq 0, 1, 2, \cdots$ ならば，$\mathcal{O}^{\ell}(V) = 0$，従って

(16) により $\mathcal{O}(V) = P_V\, \mathcal{O}(V)$.

(ii) $\alpha = 0, 1, 2, \cdots$ ならば，$\dim \mathcal{O}^{\ell}(V) = 1$ かつ

$$\mathcal{O}(V) = P_V\, \mathcal{O}(V) + \mathbb{C}\, z^{\alpha}$$

となる．

$$\left(z \frac{d}{dz} - \alpha \right) v(z) = z^{\alpha}$$

は解

$$v(z) = z^{\alpha} \log z$$

をもつ．

(i) の場合，更に α が整数でなければ，$[0, \infty)$ に切れ目を入れた z^{α} と $(-\infty, 0]$ に切れ目を入れた z^{α} は $\mathcal{O}(V)$ を法として一次独立である

$\alpha = -1, -2, -3, \cdots$ の場合はこれらが一致するので，もう一つの解は $V \setminus \Omega$ の各成分上独立にとった z^{α} の枝によって代表される．

結局，次の一次独立解を得る．

(a) $\alpha \neq$ 整数の場合．

$$\begin{cases} x_+^\alpha = \dfrac{-1}{2i\sin\pi\alpha}\,[(-z)^\alpha]\,, \\ x_-^\alpha = (-x)_+^\alpha\,. \end{cases}$$

(b) $\alpha = -1, -2, \cdots$ の場合

$$\begin{cases} \delta^{(-\alpha-1)} = \dfrac{(-1)^\alpha(-\alpha-1)!}{2\pi i}\,[z^\alpha]\,, \\ \mathrm{v.p.}\, x^\alpha = \dfrac{1}{2}\left((x+i0)^\alpha + (x-i0)^\alpha\right). \end{cases}$$

(c) $\alpha = 0, 1, 2, \cdots$ の場合.

$$\begin{cases} x^\alpha\,, \\ x_+^\alpha = \dfrac{-1}{2\pi i}\,[z^\alpha \log(-z)]\,. \end{cases}$$

ただし, z^α, $\log z$ は主値をとる.

<u>例7.</u> 例3で示したように方程式(6)は0を含む区間で distribution 解を1次元しかもたないが, hyperfunction 解は公式(10)からわかるように3次元ある. 他の二つの一次独立な解は

$$\begin{cases} e^{-\frac{1}{x+i0}} \\ \left[e^{-\frac{1}{z}}\right] \end{cases}$$

によって与えられる. はじめの解は $x<0$ で $e^{-\frac{1}{x}}$ となる解を延長したものであり, あとの解は原点のみに台をもつ hyperfunction 解である.

<u>3. 正則性.</u> $\mathcal{A}(a, b)$ でもって，区間 (a, b) 上実解析的な函数全体のなす空間をあらわす．

<u>定理 5.</u> 微分作用素 (1) に対し次は同値である．

(a) $\qquad \mathcal{B}^P(a, b) \subset \mathcal{A}(a, b)$.

(b) $\qquad a_m(x) \neq 0, \quad x \in (a, b)$.

(c) $\quad u \in \mathcal{B}(a, b)$ かつ $P(x, d/dx)u(x) \in \mathcal{A}(a, b)$ ならば，$u \in \mathcal{A}(a, b)$.

<u>証明.</u> (b) $\Rightarrow$ (c). 定理 1 の証明のように (a, b) の複素近傍 V をとり，u の定義函数を ψ とする．ψ の $V_\pm$ 上の成分をそれぞれ $\psi_\pm$ とかく．$Pu \in \mathcal{A}(a, b)$ であるから，必要があれば V を小さくとりなおすことにより，$P(z, \frac{d}{dz})\psi_\pm(z)$ は $\mathcal{O}(V)$ の元 $\varphi_\pm(z)$ に拡張される．$a_m(z)$ は V 上零点を持たないから，$V_\pm$ における方程式

$$P(z, \frac{d}{dz})\psi_\pm(z) = \varphi_\pm(z)$$

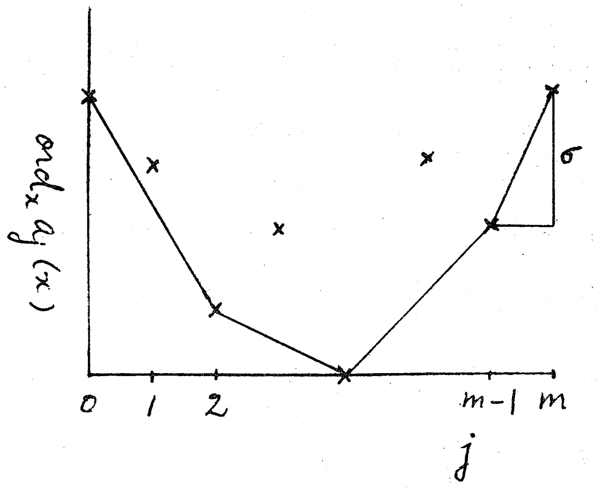
の解 $\psi_\pm(z)$ はそれぞれ (a, b) をこえて V まで解析的に延長できる．故に，$u(x) = \psi_+(x+i0) - \psi_-(x-i0)$ は解析的である．

(c) $\Rightarrow$ (a). 自明.

(a) $\Rightarrow$ (b). $a_m(x) = 0$ となる点 $x \in (a, b)$ が存在したとする．十分小さい x の近傍 (c, d) をとると，他に $a_m(x)$ の零点を含まないとしてよい．定理 3 により，

同次方程式 (9) は (c, d) 上 m 個以上の一次独立な解をもつ．一方 (c) により，(c, x) 上では m 個しか一次独立な解をもたない．従って少くとも一つ (c, x) 上では 0，$[x, d)$ 上では 0 とならない解 $u \in \mathcal{B}^L(c, d)$ がある．u の延長 $\tilde{u} \in \mathcal{B}^L(a, b)$ は実解析的であり得ない．

以下 $a_m(x)$ が零点をもつ場合を考える．$a_m(x)$ の零点を特異点とよび，特異点の非正則度 σ を次のように定義する．



図のように，$(j, \mathrm{ord}_x a_j(x))$ をプロットし，それらの点より下にあって，下に凸である最大の折れ線を描く．そのとき，その折れ線の最大の勾配を σ とする．

$\sigma \leqq 1$ のとき，その特異点は確定特異点であり，$\sigma > 1$ のとき，不確定特異点である．

$\mathcal{D}'(a, b)$ でもって区間 (a, b) 上の distribution 全体の空間をあらわす．

<u>定理 6.</u> 微分作用素 (1) に対して次は同値である．

(a) $\mathcal{B}^L(a, b) \subset \mathcal{D}'(a, b)$.

(b) (a, b) に属するすべての特異点は確定特異点で

ある．

(c)　$u \in \mathcal{B}(a, b)$ かつ $P(x, \frac{d}{dx})u \in \mathcal{D}'(a, b)$ ならば，$u \in \mathcal{D}'(a, b)$.

証明．(a) ⇒ (b)．原点が非正則度 $\sigma > 1$ の不確定特異点であったとする．福原－岩野 [2] によれば，方程式

(17)　$$P(z, \frac{d}{dz})u(z) = 0$$

は，原点を頂点とし $\pi/(1-\sigma)$ より小さい角度をもつ任意の角域において少くとも一つ

(18)　$$u(z) \sim e^{\frac{\lambda}{\sigma-1}\frac{1}{z^{\sigma-1}} + \cdots + \frac{\omega}{z^{1/q}}} z^{\rho} p(z, \log z)$$

という漸近展開をもつ解 $u(z)$ をもつ．ここで $\lambda \neq 0$ は一定の数である．λ の偏角に応じて，上または下半平面をとれば，どちらかで

(19)　$$\sup_{x \in K} |u(x+iy)| \geq C \exp\left(\left(\frac{L}{|y|}\right)^{\sigma-1}\right)$$

という評価をもつ解が存在する．ただし，ここで K は 0 を含むある閉区間，C, L は正の定数である．u の境界値 $u(x \pm i0)$ が distribution であるための必要十分条件は (19) の左辺が $C|y|^{-n}$ でおさえられることであるから，$u(x \pm i0) \notin \mathcal{D}'(a, b)$．一方，明らかに $u(x \pm i0)$ は

同次方程式 (9) の hyperfunction 解である．

(b) ⇒ (c)． u が distribution であるかどうかは局所的な性質であるから，一般性を失うことなく (a, b) は原点を含む区間であって，$a_m(x)$ は原点にのみ零点をもつとしてよい．さらに，原点を中心とする円板が定理1の証明に用いた (a, b) の複素近傍としてよい．

$\psi(z) \in \mathcal{O}(V_+ \cup V_-)$ を u の定義函数とする．$P(x, \frac{d}{dx})u(x) \in \mathcal{D}'(a, b)$ ゆえ，任意のコンパクト区間 $K \subset (a, b)$ に対して

$$\sup_{x \in K} \left| P(z, \tfrac{d}{dz}) \psi(x + iy) \right| \leqq C |y|^{-n}$$

をみたす定数 n および C が存在する．V をあらためて小さくとりなおせば，K に無関係に上の評価がなりたつとしてもよい．

本質的な差はないから，以下 V_+ 上の成分 ψ_+ のみを考えることにする．

$$(20) \qquad \psi_j(z) = \left(z \frac{d}{dz}\right)^j \psi_+(z), \quad j = 0, 1, \cdots, m-1$$

とおけば，$\Psi(z) = {}^t(\psi_0(z), \cdots, \psi_{m-1}(z))$ は方程式

$$(21) \qquad \left(z \frac{d}{dz} + B(z)\right) \Psi(z) = \Psi(z)$$

をみたす. たゞし, $B(z)$ は V 上正則な函数を要素とする $m\times m$ 行列であり, $\Phi(z)$ は各成分 $\varphi_j(z)$ が, V_+ 上正則かつ評価

$$(22) \qquad |\varphi_j(x+iy)| \leqq C' y^{-n'}$$

をみたす函数からなるベクトルである.

ここで, 独立変数を

$$(23) \qquad t = r + is = \log\frac{i}{z}$$

にとりかえると, V_+ は t の領域

$$(24) \qquad V'_+ = \{r+is\,;\ d < r < \infty,\ -\pi < s < \pi\}$$

にうつされる. z を変数とする函数を, t を変数とする函数とみなしたものを, $'$ をつけて表わせば, (21) は方程式

$$(25) \qquad \left(-\frac{d}{dt} + B'(t)\right)\Phi'(t) = \Phi'(t)$$

に, (22) は

$$(26) \qquad |\varphi'_j(r+is)| \leqq C' e^{n'r - n'\log\cos s}$$

に変換される. $B'(t)$ が V'_+ 上有界であることを用いると, 簡単な微分不等式の計算により

$$|\psi'_j(r+is)| \leqq C'' e^{n''r - n''\log\cos s}$$

という評価が得られる．従って，$\psi(x+i0) \in \mathcal{D}'(a,b)$．

(c) ⇒ (a) は自明である．

証明からわかるように，この定理は1階連立方程式の場合もなりたつ．この拡張と，定理3を連立方程式に拡張したものを用いると，直ちに Fuchs 型1階連立方程式の同次 distribution 解の次元についての Methée [6] の結果が導かれる．

次に，(1) が不確定特異点をもつ場合を考える．そのため，定義函数が (19) の右辺程度の増大度をもつ hyperfunction の族を定めておかなければならない．

$s > 1$ とし，Beurling 型 (Roumieu 型) Gevrey 族の函数空間を

$$(27)\quad \mathcal{D}^{(s)}(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega);\ \forall h > 0\ \exists C\ \sup|D^\alpha\varphi(x)| \leqq C h^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s\},$$

$$(28)\quad \mathcal{D}^{\{s\}}(\Omega) = \{\varphi \in C_0^\infty(\Omega);\ \exists h,\ \exists C\ \sup|D^\alpha\varphi(x)| \leqq C h^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s\}$$

によって定義する．これらは Banach 空間

$$(29)\quad \mathcal{D}_K^{\{s\},h} = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp}\varphi \subset K,\ \sup|D^\alpha\varphi(x)| \leqq C h^{|\alpha|}(|\alpha|!)^s\}$$

を用いて，

$$(30) \qquad \mathcal{D}^{(s)}(\Omega) = \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \varprojlim_{h\to 0} \mathcal{D}_K^{\{s\},h}$$

$$(31) \qquad \mathcal{D}^{\{s\}}(\Omega) = \varinjlim_{K\subset\subset\Omega} \varinjlim_{h\to\infty} \mathcal{D}_K^{\{s\},h}$$

と表わされる．これによって自然な局所凸位相を入れる．これらの双対空間 $(\mathcal{D}^{(s)}(\Omega))'$ $((\mathcal{D}^{\{s\}}(\Omega)')$ を $\mathcal{D}^{(s)'}(\Omega)$ $(\mathcal{D}^{\{s\}'}(\Omega))$ とかき，その元を位数 s の Beurling 型（Roumieu 型）Gevrey 族の ultradistribution とよぶ．

$\mathcal{D}^{(s)}(\Omega)$ $(\mathcal{D}^{\{s\}}(\Omega))$ も十分多くの函数を含み，この中で 1 の分割の存在等が示される。従って distribution の理論とほゞ同様に ultradistribution の理論が組立てられる．特に，$\mathcal{D}^{(s)'}$ および $\mathcal{D}^{\{s\}'}$ は自然な制限写像の下に層をなす．これらは hyperfunction の層 $\mathcal{B}$ の部分層になる．

<u>定理7</u>. 区間 (a,b) 上の hyperfunction $f=[\varphi]$ が位数 s の Beurling 型（Roumieu 型）Gevrey 族の ultradistribution であるための必要かつ十分条件は，任意のコンパクト区間 $K\subset(a,b)$ に対して定数 L と C が存在（任意の $L>0$ に対して定数 C が存在）し

$$(32)\qquad \sup_{x\in K}|\varphi(x+iy)| \leqq C\exp\left(\left(\frac{L}{|y|}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right)$$

がなりたつことである。

この定理の証明は複雑であるから次の機会にゆずる。[5] 参照。

これを用いて次の定理が証明される。

定理 8. $s>1$ とするとき，微分作用素（1）に対して次の条件は同値である。

(a) $\mathcal{B}^P(a,b)\subset\mathcal{D}^{(s)\prime}(a,b)$ $(\mathcal{D}^{\{s\}\prime}(a,b))$.

(b) (a,b) に属するすべての特異点の非正則度 σ が

$$(33)\qquad \sigma \leqq \frac{s}{s-1}\qquad \left(\sigma<\frac{s}{s-1}\right)$$

をみたす。

(c) $u\in\mathcal{B}(a,b)$ かつ $P(x,\frac{d}{dx})u\in\mathcal{D}^{(s)\prime}(a,b)$ $(\mathcal{D}^{\{s\}\prime}(a,b))$ ならば，$u\in\mathcal{D}^{(s)\prime}(a,b)$ $(\mathcal{D}^{\{s\}\prime}(a,b))$.

証明. (a) ⇒ (b) の証明は定理 6 の証明と同じである。

(b) ⇒ (c). これもほゞ同様である。（20）の代りに

$$(34)\qquad \psi_j(z)=\left(z^\sigma\frac{d}{dz}\right)^j\psi_+(z),\quad j=0,\cdots,m-1$$

とすれば，$\Psi(z)={}^t(\psi_0(z),\cdots,\psi_{m-1}(z))$ は方程式

$$(35)\qquad \left(z^\sigma\frac{d}{dz}+B(z)\right)\Psi(z)=\Phi(z)$$

をみたす．ただし，$B(z)$ は V_+ 上正則，有界な函数を要素とする $m\times m$ 行列であり，右辺は各成分が，ある定数 L，C（任意の定数 $L>0$ に対しある定数 C）が存在して，

$$(36)\qquad |\varphi_j(x+iy)| \leqq C\exp\left(\left(\frac{L}{y}\right)^{\frac{1}{s-1}}\right)$$

をみたす V_+ 上の正則函数からなるベクトルである．

ここで，(23) の代りに

$$(37)\qquad t=\left(\frac{i}{z}\right)^{\frac{1}{s-1}}$$

を独立変数にとって，微分不等式の計算にもちこめば，$\psi_+(x+i0)\in \mathcal{D}^{(s)'}(a,b)$ $(\mathcal{D}^{\{s\}'}(a,b))$ が示される．

参考文献

[1]. L. Hörmander, An Introduction to Complex Analysis in Several Variables, Van Nostrand, Princeton, 1966.

[2]. M. Hukuhara - M. Iwano, Étude de la convergence des solutions formelles d'un système differentiel ordinaire linéaire, Funkcial. Ekvac. 2 (1959), 1-18.

[3]. 小松彦三郎 佐藤超函数論入門 京大数理解析研究所講究録 予定

[4]. H. Komatsu, On the index of ordinary differential operators, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 18 (1971),

[5]. H. Komatsu, Ultradistributions and hyperfunctions, 京大数理解析研究所講究録 予定.

[6]. P.-D. Methée, Systèmes differentiels du type de Fuchs en théorie des distributions, Comment. Math. Helv. 33 (1959), 38-46.

[7]. M. Sato, Theory of hyperfunctions, I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I, 8 (1959), 139-193.

[8]. L. Schwartz, Théorie des Distributions, I, Hermann, Paris, 1950.